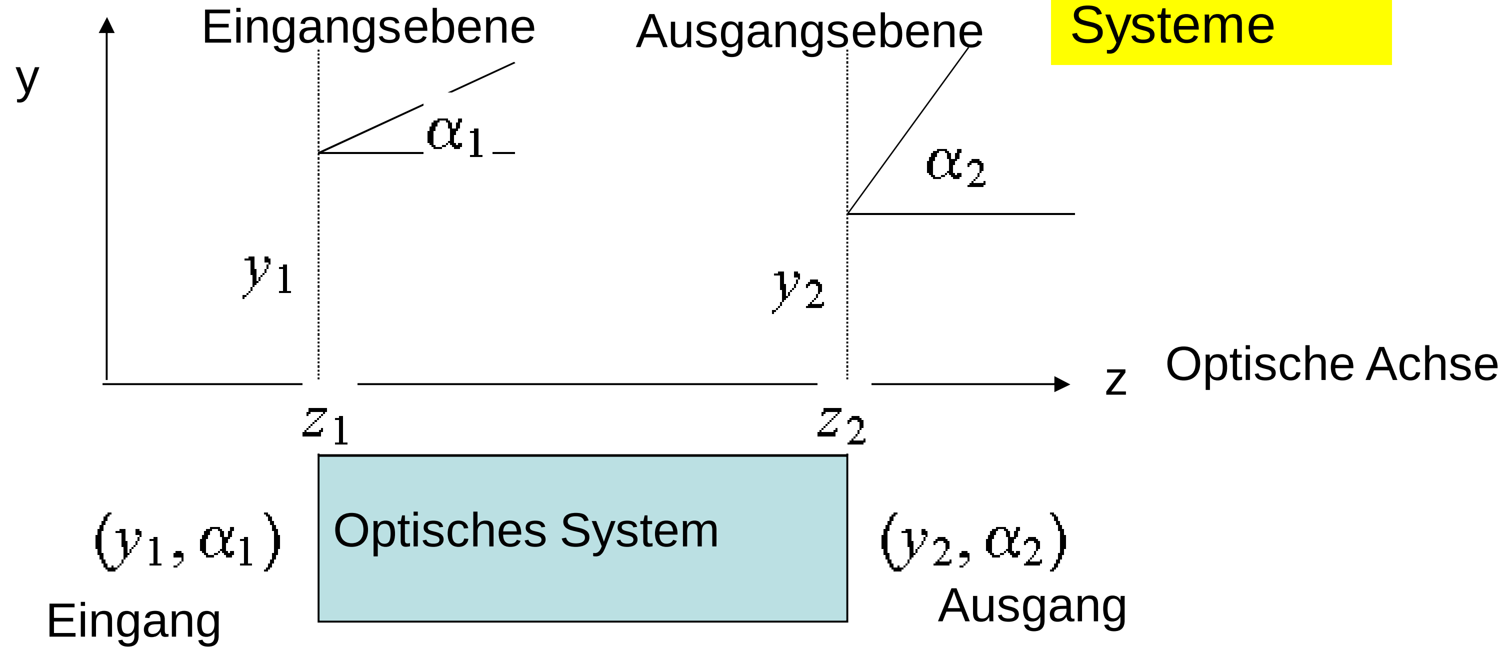
Matrixelemente für paraxiale Strahlen

Berechnung optischer Systeme



Paraxiale Näherung $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$ $\rightarrow$ Linearer Zusammenhang zwischen Eingangsgrößen (y_1, α_1) und Ausgangsgrößen (y_2, α_2)

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$

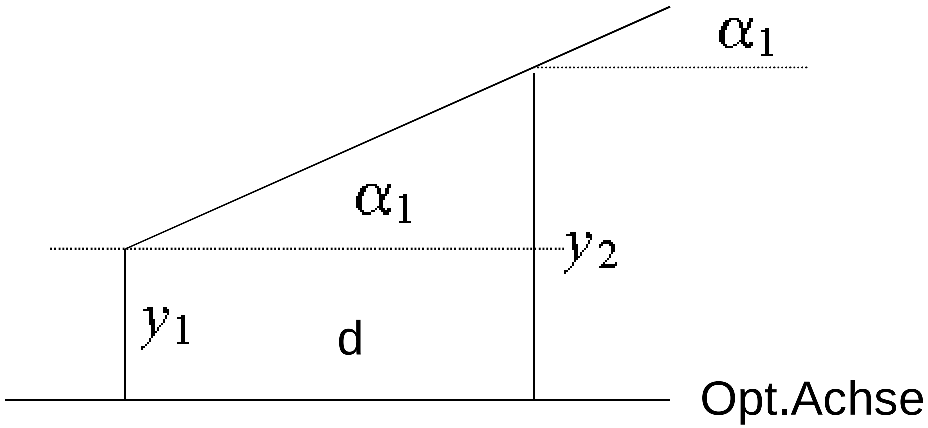
Translation

$$\alpha_1 = \alpha$$

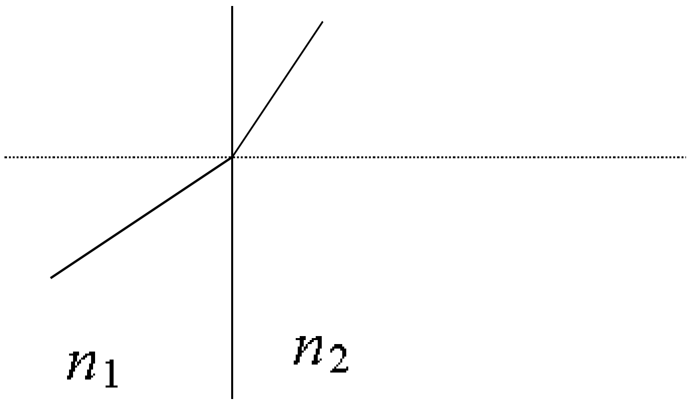
$$y_2 = y_1 + d \cdot \tan\alpha_1$$

$$\approx y_1 + d \cdot \alpha_1$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$



Brechung an einer ebenen Grenzfläche



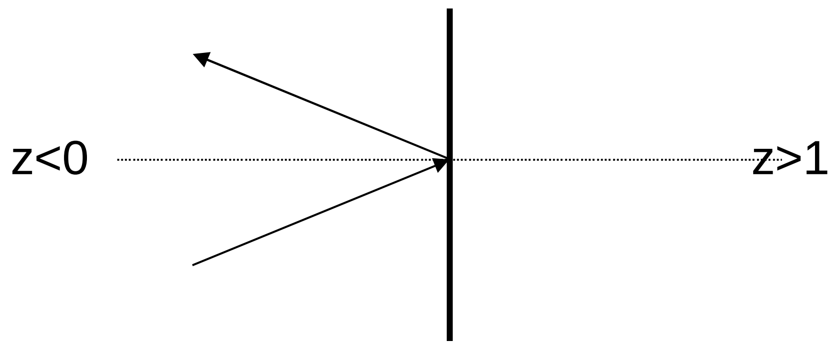
$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$$

$$n_1\alpha_1 = n_2\alpha_2$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$$

Reflexion am Planspiegel:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

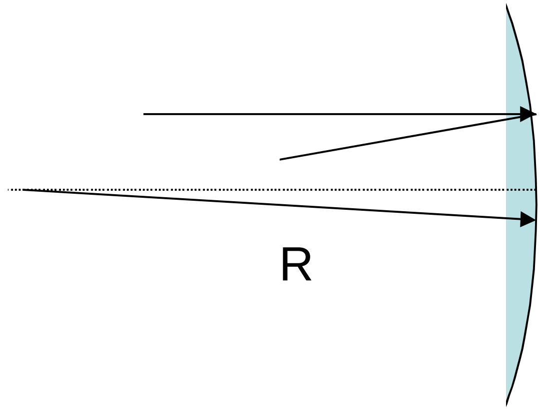


Reflexion am sphärischen Spiegel

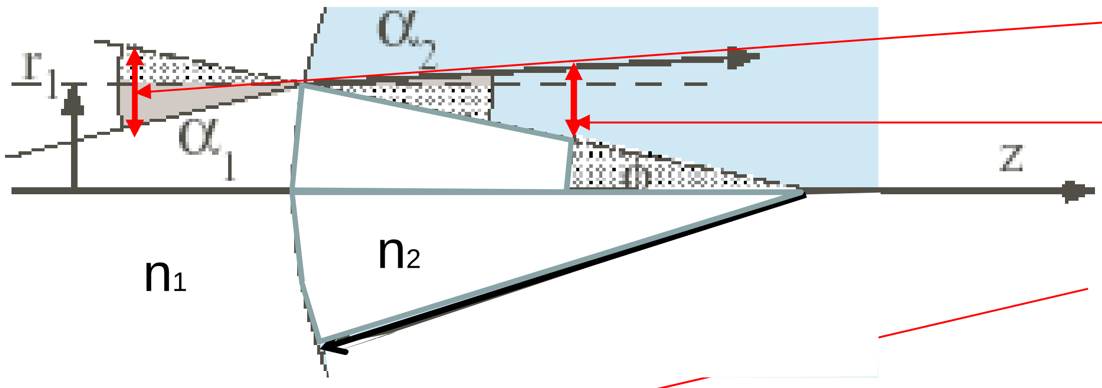
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2/R & 1 \end{bmatrix}$$

R>0:konvex

R<0:konkav



Brechung an spährischer Grenzfläche



$$\theta_1 = \alpha_1 + \Phi$$

$$\theta_2 = \alpha_2 + \Phi$$

$$n_1 \bullet \theta_1 \approx n_2 \bullet \theta_2$$

$$\Phi \approx \frac{r_1}{R}$$

$$n_1(\alpha_1 + \frac{r_1}{R}) = n_2(\alpha_2 + \frac{r_2}{R})n_1$$

$$\begin{bmatrix} r_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 \cdot R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$

Konvex: R>0 Konkav: R<0

Transmission durch dünne Linse

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -D & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \frac{1}{f}$$

Allgemein: Linse

Translation im Glas

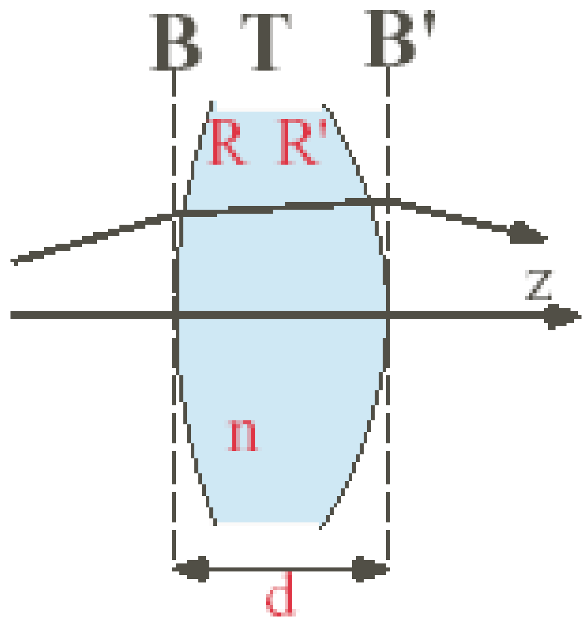
$$\begin{bmatrix} r_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = B'TB \begin{bmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$

Brechung an der zweiten Grenzfläche

Brechung an der ersten Grenzfläche

$$L = \begin{bmatrix} 1 - \frac{n-1}{n}\frac{d}{R} & \frac{d}{n} \\ (n-1)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} - \frac{d(n-1)^2}{RR'n}\right. & 1 + \frac{n-1}{n}\frac{d}{R'} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 - \frac{n-1}{n}\frac{d}{R} & \frac{d}{n} \\ (n-1)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} - \frac{d(n-1)^2}{RR'n}\right. & 1 + \frac{n-1}{n}\frac{d}{R'} \end{bmatrix}$$



Damit können auch dicke Linsen beschrieben werden.

Dünne Linsen: $\frac{d}{R}, \frac{d}{R'} \ll 1 \longrightarrow L \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (n-1)\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}$

$D = -(n-1)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)$ Brechkraft der Linse

Vorzeichen so, dass Sammellinse eine positive Brechkraft hat

Oder auch:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -D & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

$D = \frac{1}{f}$

Dioptrie:

$1\,dpt = 1\,m^{-1}$

Für Linsensysteme: Zwei dünne Linsen im Abstand d

Linse 2

$$M = L_2 T L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{bmatrix}$$

Abstand

Linse 1

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & d \\ \underbrace{\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1} - \frac{d}{f_1 f_2}} & 1 - \frac{d}{f_2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

Zwei Fälle:

a) $d \ll f_{1,2}$

Ohne Zwischenraum hintereinander:

$$M \approx L_2 L_1$$

mit $D = D_1 + D_2$

b) $d = f_1 + f_2$ Brennpunkte fallen aufeinander → Teleskop

z.B.: Paralleles Strahlbüschel wird aufgeweitet bzw kollimiert zum neuen Durchmesser: $\frac{f_2}{f_1} r_1$ Mit D=0 → afokal