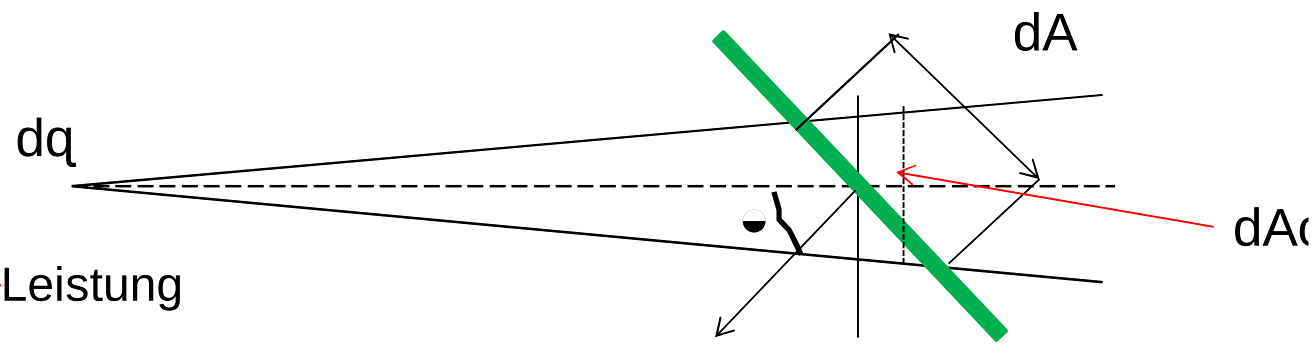
3. Thermische Strahlung und Lichtquanten

Strahlungsgrößen



$$J = \frac{dP}{d\Omega}$$

Leistung

Strahlungsstärke

Flächenstück: $dP = R\,dA \rightarrow R = \frac{dP}{dA}$

Spezifische Ausstrahlung

$$dP = \vec{D} \cdot d\vec{A} = D \cdot \cos\vartheta\, dA$$

Intensität

Beispiel: Sonne

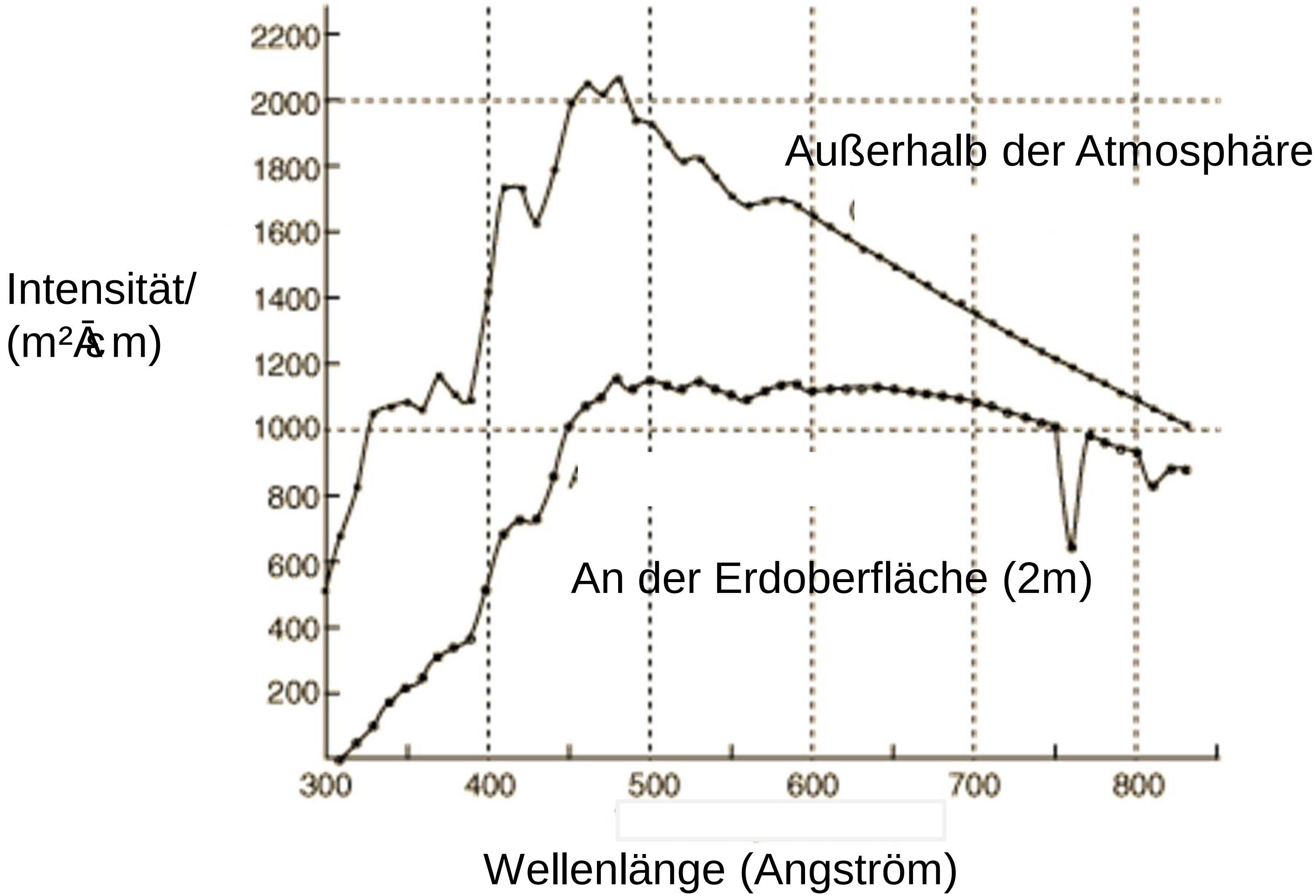
Intensität in Erdnähe: $D_E = 1.4 kW/m^2$

Am Sonnenrand: $D_S = \frac{D_E r_{ES}^2}{R_S^2} = 7 \cdot 10^4 kW/m^2$

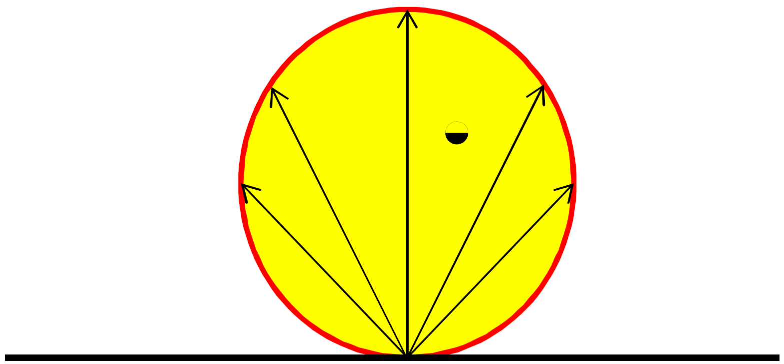
Strahlungsfluss $\Phi = D_E 4\pi r_{ES}^2 = 2.8 \cdot 10^{23} kW$

Radius Sonne

Abstand : Erdoberfläche-Sonne



Außerhalb der Atmosphäre
An der Erdoberfläche (2m)
Intensität/
(m^{2}Ās m)
2200
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
300
400
500
600
700
800
Wellenlänge (Angström)



Leuchtende Fläche

Lambertsches Gesetz:

$$\boxed{J = J_0 \cos \vartheta}$$

→ Richtungsunabhängige Strahlungsdichte

Photometrische Größen:

Lichtstärke $J = \frac{dP}{d\Omega}$

J * dq =ū

Lumen = lm

Lichtintensität:E= J/m**2

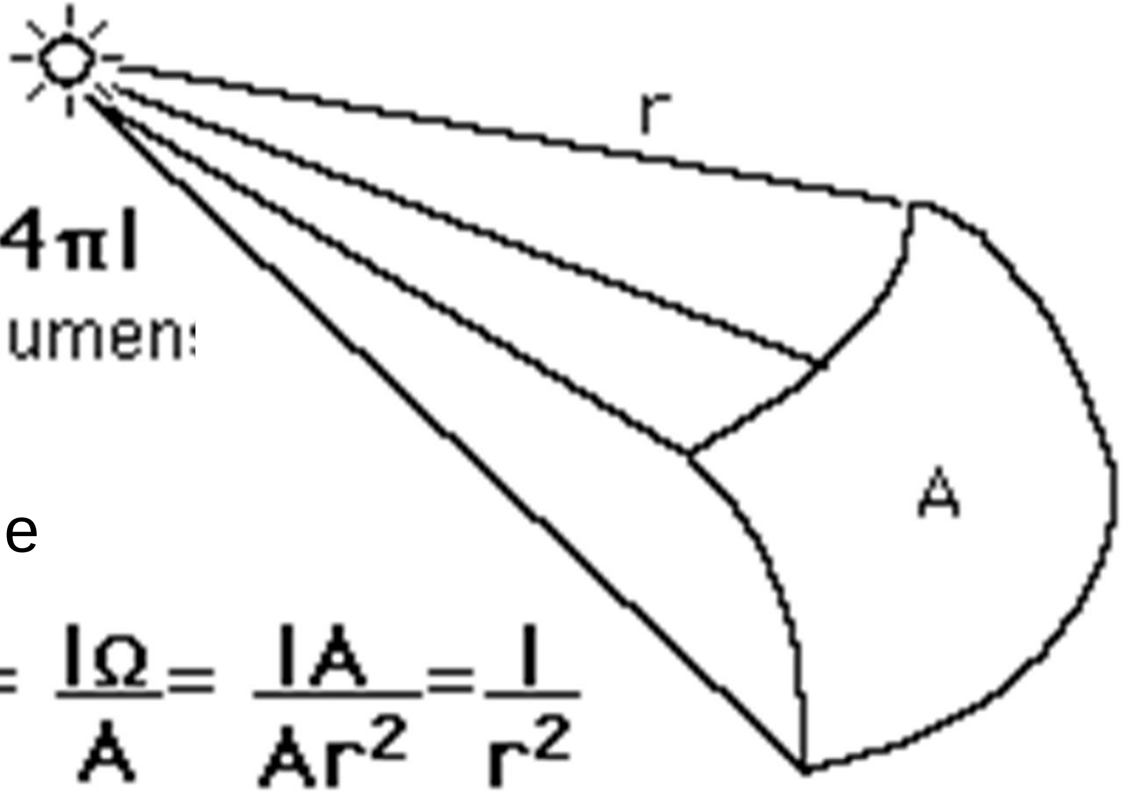
Lux=lumen/m**2

Einheit: Candela

Hier J=I

Bei з=$540*10^{12}$ Hertz
1 cd : 1/683 Watt pro sr

Eine isotrope Punktquelle mit I cd strahlt 1 lm



$$\Phi = 4\pi I$$

lumens

Für Punktquelle

$$E = \frac{\Phi}{A} = \frac{I\Omega}{A} = \frac{IA}{Ar^2} = \frac{I}{r^2}$$

$\boxed{E \text{ Lumen } /m^2 \text{ (lux)}}$

Raumwinkel $\Omega = \frac{A}{r^2}$

Typische Werte für Lichtintensitäten in Candela	
Lichtdiode (LED)	0.005
Kerze	1
100 Wattbirne	150
Aufblendlicht (Auto)	100 000.

Beispiele für Lux:

Sonnenlicht (maximum):102000
Himmelslicht allein: 16000
Trüber Tag:1000
Helligkeit zum Lesen: 500
Mondlicht:0.4

Schwarzkörperstrahlung

$$\boxed{H = b \cdot I}$$

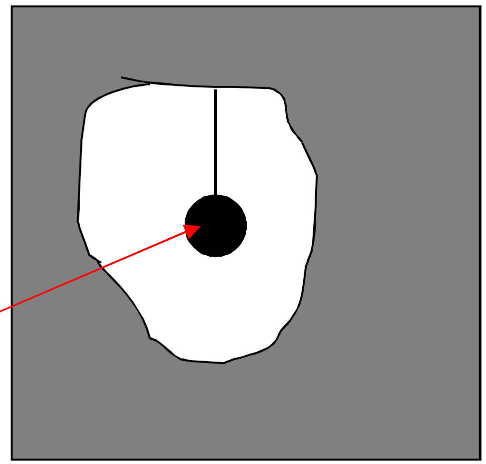
Im Gleich-gewicht

Strahlung im Hohlraum

Absorptions-koeff.

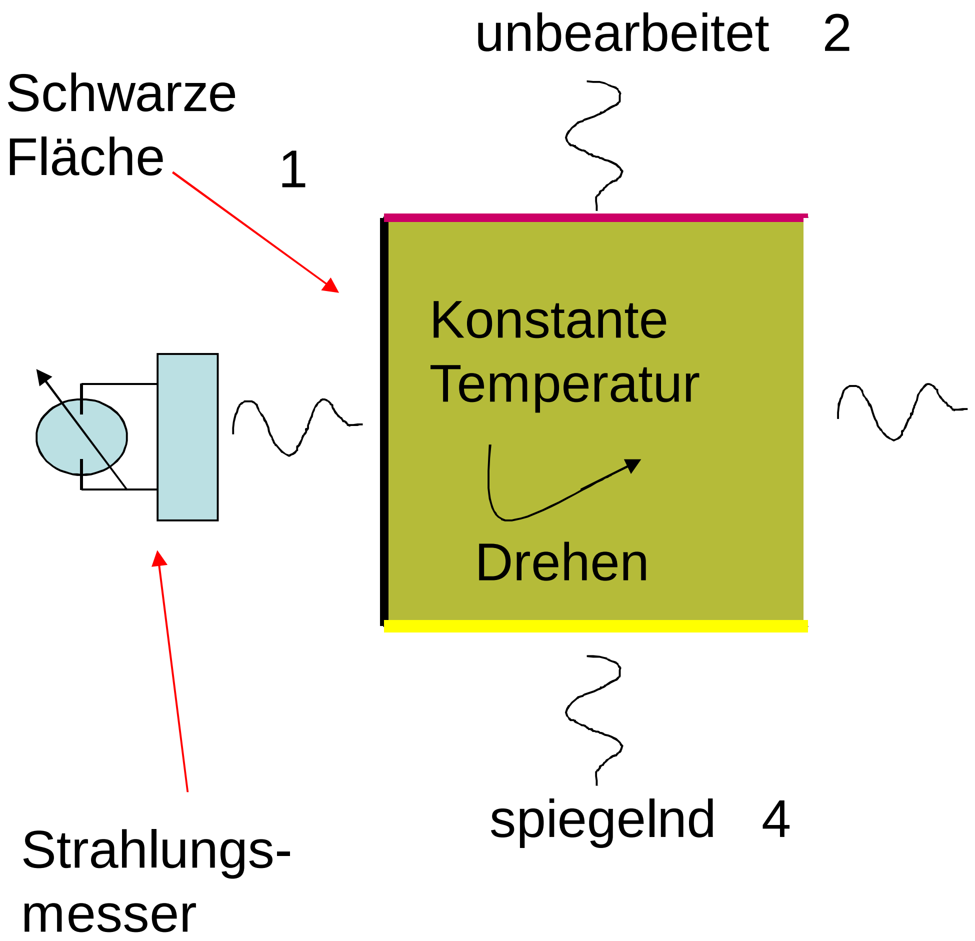
Abstrahlung

Körper im Hohlraum



Hohlraum

Versuch: Lesliescher Würfel



Erbebnis:

1: 7.9 Skalenteile

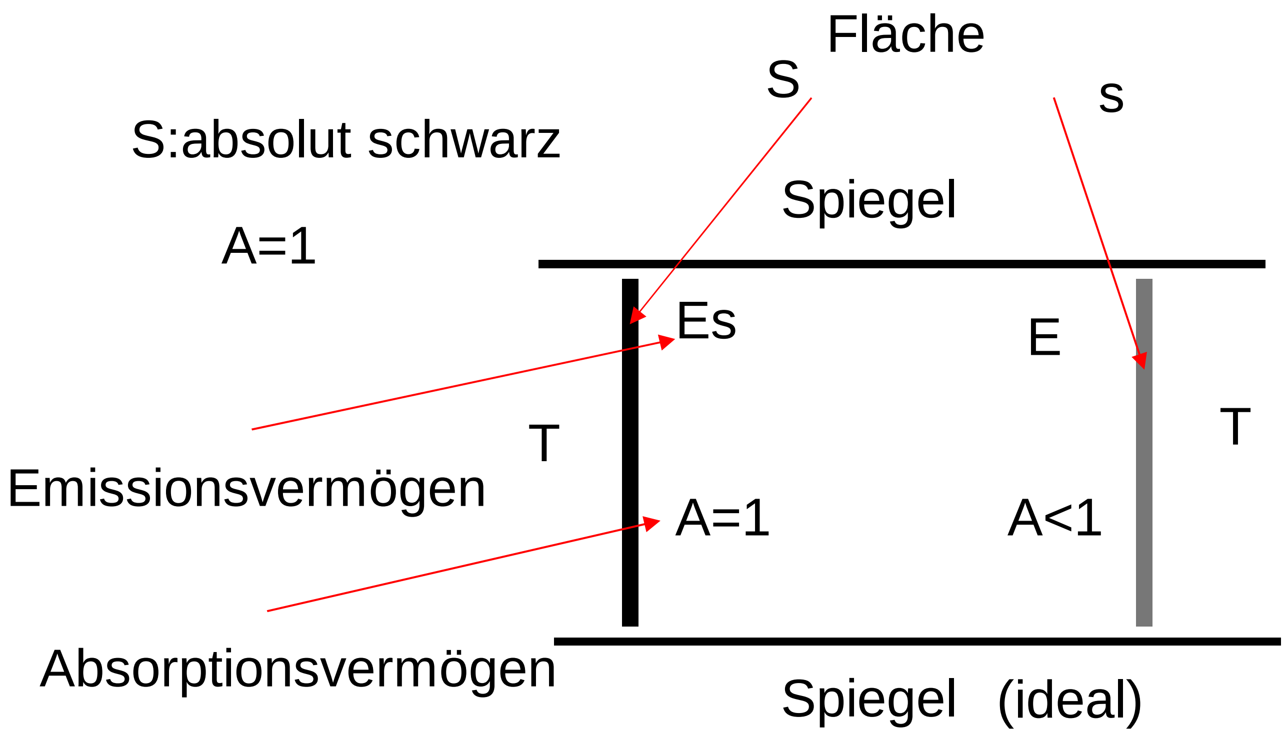
4: 1.2

3: 8.0

2: 2.7

Anwendung:
z.B. Thermosflasche

Kirchhoffsche Strahlungsgesetz:



Fläche	Ausgestrahlt	Absorbiert
S	Es	E+Es(1-A)
s	E	A*Es

Im Gleichgewicht: Ausstrahlung = absorbierte Energie

$E=A*Es$ $Es=E+Es-A*Es$

→ $E/A=Es$

Kichhoffsche Gesetz:

Für alle Körper ist bei gegebener Temperatur das Verhältnis von Emissionsvermögen und Absorptionsvermögen konstant und dem Betrage nach gleich dem Emissionsvermögen des schwarzen Körpers bei dieser Temperatur

Dabei: E/A=f(ə,T)

Bei mehreren Körpern: Gleichgewicht

$$H_1 = b_1 \cdot I, H_2 = b_2 \cdot I, etc$$

$$\longrightarrow I = \frac{H_1}{b_1} = \frac{H_2}{b_2} \ldots$$

Die emittierte Leistung ist gleich der absorbierten Leistung, bei vorgegebener Temperatur

$b = 1$ Wird schwarzer Körper genannt $\longrightarrow$ $H_{max} = I$

Der schwarze Körper ist der effektivste Emitter von Strahlung

Hohlraumstrahlung! Hohlraum mit kleinem Loch, Wände auf konstanter Temperatur: Schwarzkörperstrahlung

Energiedichte

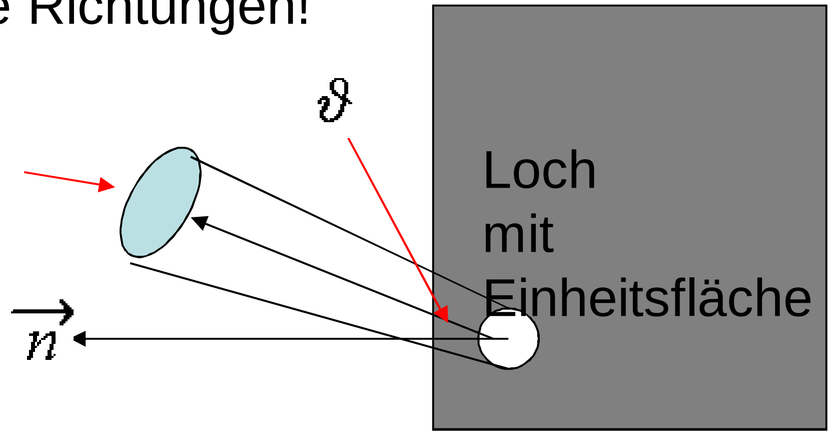
$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu$$

Energiedichte/Frequenz

Ann.: Diese Strahlung mit c in alle Richtungen!

$$\frac{u \cdot c \cdot \cos\vartheta \, d\Omega}{4\pi}$$

$$d\Omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\Phi$$



Strahlung in eine Hemisphäre

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} u \bullet c \bullet \cos\vartheta \sin\vartheta \frac{d\vartheta d\Phi}{4\pi} = I$$

Total emittierte Strahlung pro Einheitsfläche und Zeit

$$I = \frac{u \cdot c}{4} \quad \text{oder} \quad I_\nu = \frac{u_\nu \cdot c}{4}$$

Intensität: $\Im = \frac{u \cdot c}{4\pi} = \frac{I}{\pi}$ oder $\Im_\nu = \frac{u_\nu \cdot c}{4\pi} = \frac{I_\nu}{\pi}$

Leistung/Raumwinkel*Fläche

Moden von elektromagnetischer Strahlung im Hohlraumresonator

$$e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = e^{ik_x \cdot x} e^{ik_y \cdot y} e^{ik_z \cdot z} e^{-i\omega t}$$

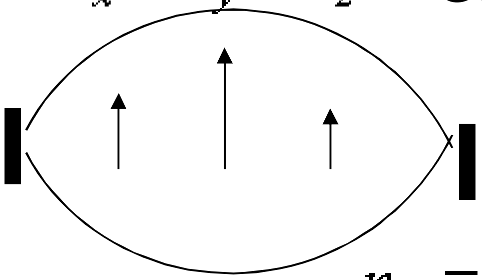
Betrachtet: Rechteckiger Resonator

A,B,C lineare Dimensionen i x,y, z-Richtung

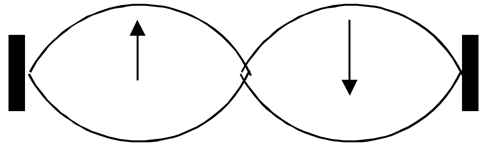
Es bilden sich stationäre Moden aus

Mit: $k_x A = \pi n_x \qquad k_y B = \pi n_y \qquad k_z C = \pi n_z$

$n_x \quad n_y \quad n_z$ Ganze Zahlen



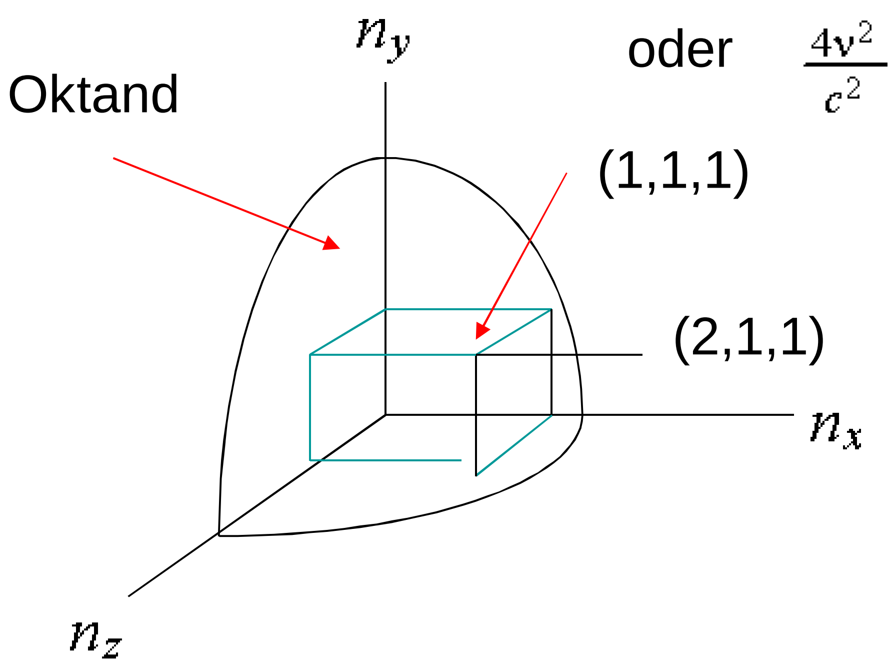
$n_x = 1$



$n_x = 2$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \longrightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \pi^2\left(\frac{n_x^2}{A^2} + \frac{n_y^2}{B^2} + \frac{n_z^2}{C^2}\right)$$

oder $$\frac{4\nu^2}{c^2} = \left(\frac{n_x^2}{A^2} + \frac{n_y^2}{B^2} + \frac{n_z^2}{C^2}\right)$$



Für eine gegebene Frequenz sind nur gewisse Werte von

$n_x \quad n_y \quad n_z$ erlaubt

$$\frac{4\nu^2}{c^2} = \left(\frac{n_x^2}{A^2} + \frac{n_y^2}{B^2} + \frac{n_z^2}{C^2}\right)$$

Ellipsoid mit Halbachsen

$$\frac{2\nu A}{c} \quad \frac{2\nu B}{c}$$

Volumen des Oktanden:

$$\frac{1}{8}\,\frac{4\pi}{3}\,\frac{2\nu A}{c}\,\frac{2\nu B}{c}\,\frac{2\nu C}{c} = \frac{4\pi\nu^3 ABC}{3c^3} = \frac{4\pi\nu^3 V}{3c^3}$$

$$V = ABC$$

Volumen des Hohlraumresonators

Ein Würfel repräsentiert eine Mode

=Anzahl der Moden für alle Frequenzen bis з

Wegen Polarisation

$$g = \frac{8\pi}{3c^3}\nu^3$$

Anzahl der Moden/Volumen

Pos.und neg.ns =gleiche Mode

$$dg = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 d\nu$$

Anzahl der Moden in dз oder

$$g_\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2$$

Klassische Theorie der Schwarzkörperstrahlung

Rayleigh-Jeans Formel

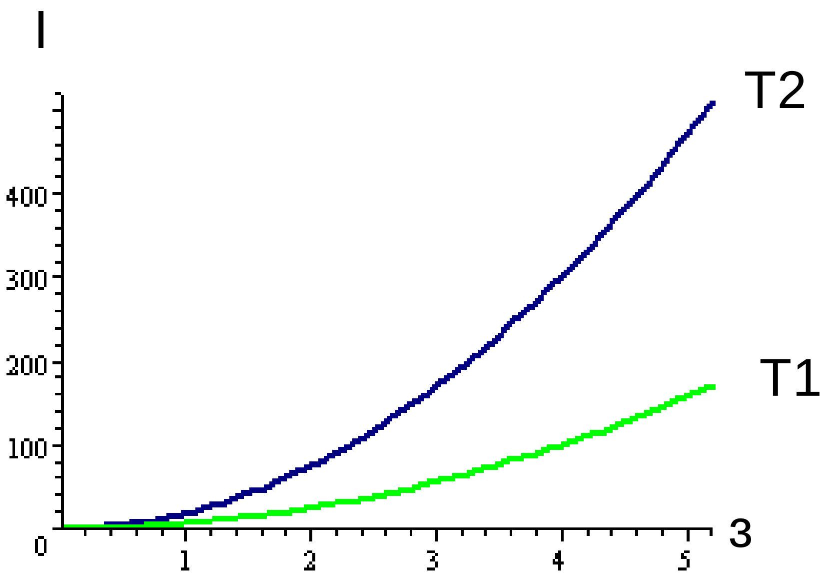
Gleichverteilung der Energie:
Per Mode 1kT(für E+B-Feld)

$$\longrightarrow g_\nu \cdot kT$$

s.o.

$$\boxed{u_\nu = g_\nu kT = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3}}$$

$$I_\nu = \frac{2\pi\nu^2 kT}{c^2}$$



Führt zu einer Ultraviolettkatastrophe

Quantisierung der Hohlraumstrahlung

Plancks Hypothese: 0,h3,2h3,..
Die Moden sind besetzt mit Photonen

Mittlere Zahl: $\langle n_\nu \rangle$

$$u_\nu = g_\nu h\nu \langle n_\nu \rangle = \frac{8\pi h\nu^3}{c3} \langle n_\nu \rangle$$

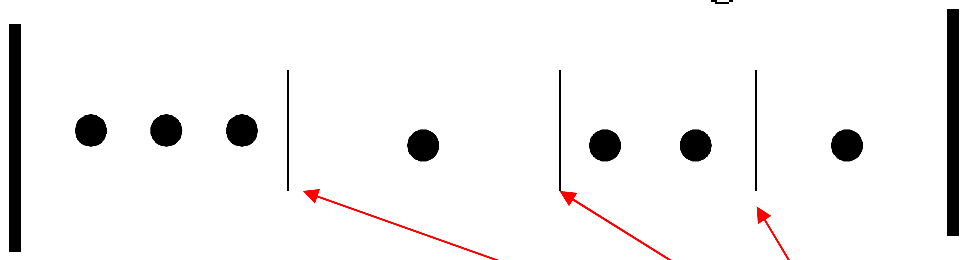
$$I_\nu = \frac{1}{4} c g_\nu h\nu \langle n_\nu \rangle$$

Beispiel:

Anzahl der Photonen $N_\nu = 7$

Anzahl der Moden $g_\nu = 4$

Photonstatistik



Gegeben Energie: Gibt es eine Verteilung die am wahrscheinlichsten bei der Aufteilung der Energie ist?

$g_\nu - 1$

W: Totale Anzahl der Möglichkeiten

Besetzungszahl: $\langle n_\nu \rangle = \left(\frac{N_\nu}{g_\nu} \right)_{\max}$

$N_\nu + g_\nu - 1$ permutieren

Totale Zahl der Permutationen: $(N_\nu + g_\nu - 1)!$

Maximiert W

Die Punkte: Identische Objekte : Division durch $N_\nu!$

Die Aufteilungen ebenso: Division durch $(g_\nu - 1)!$

$$\longrightarrow \quad W_\nu = \frac{(N_\nu + g_\nu - 1)!}{N_\nu!\,(g_\nu - 1)!}$$

Zahl der verschiedenen Verteilungsmöglichkeiten pro Frequenzintervall!

Totale Zahl: $$W = \prod_{\nu} W_{\nu} = \prod_{\nu} \frac{(N_\nu + g_\nu - 1)!}{N_\nu!(g_\nu - 1)!}$$

Schlecht zu handhaben!

$\longrightarrow$ Stirlingsche Formel $\ln x! = x \ln x - x$ Gut für großes x

$$\ln W = \sum_\nu [(N_\nu + g_\nu - 1)\ln(N_\nu + g_\nu - 1) - N_\nu \ln N_\nu - (g_\nu - 1)\ln(g_\nu - 1)]$$

W soll Maximum sein:→lnW auch Maximum $\delta(\ln W) = 0$

$$\delta(\ln W) = \sum_\nu [\ln(N_\nu + g_\nu) - \ln N_\nu]\delta N_\iota = 0$$

1 vernachlässigt gegen $N_\nu + g_\nu$

Totale Photonenenergie bleibt konstant:

$$E = \sum h\nu N_\nu$$

$$\longrightarrow \delta E = \sum_\nu h\nu \delta N_\nu = 0$$

Lagrange Methode der unbestimmten Multiplikatoren hier $-\beta$

$$\delta(\ln W) - \beta\delta E = 0 \longrightarrow$$

$$\sum_\nu [\ln(N_\nu + g_\nu) - \ln N_\nu - \beta h\nu]\delta N_\nu = 0$$

β So, dass jeder Klammerinhalt bei der Summation verschwindet

$$\ln(N_\nu + g_\nu) - \ln N_\nu - \beta h\nu = 0$$

Auflösen nach $\frac{N_\nu}{g_\nu}$ $\longrightarrow$ $\underbrace{\langle n_\nu \rangle = \left(\frac{N_\nu}{g_\nu}\right)_{\max} = \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1}}$

Bose-Einstein-Verteilung für Photonen

$$\longrightarrow \underbrace{I_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1}}$$

$$I_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{1}{\beta} \longleftarrow$$

Identisch mit der Rayleigh-Jeans Formel

Für $\beta h\nu \ll 1$

Wir identifizieren dabei

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

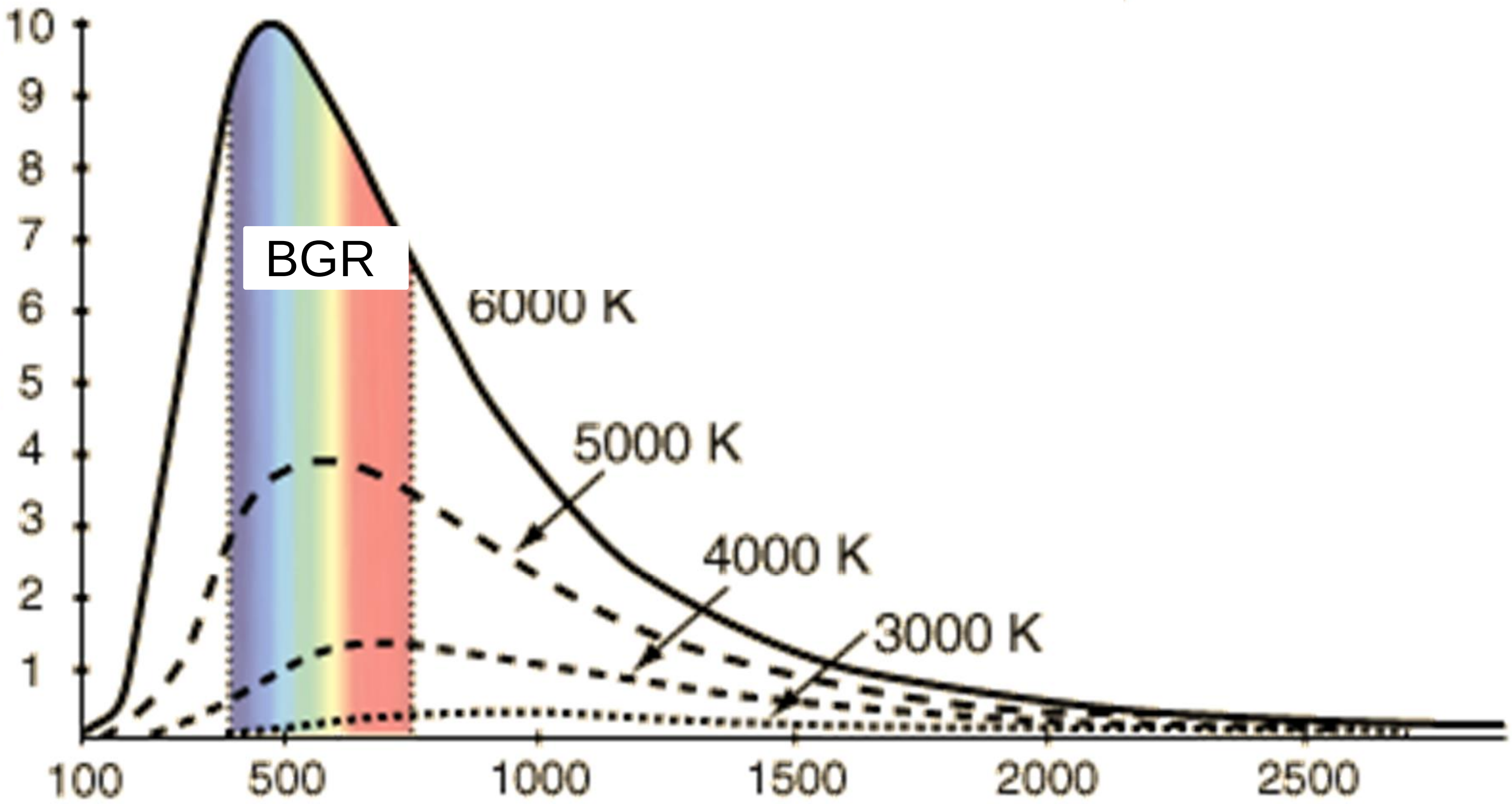
→ Formel für Schwarzkörperstrahlung

$$\boxed{I_\nu = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}}$$

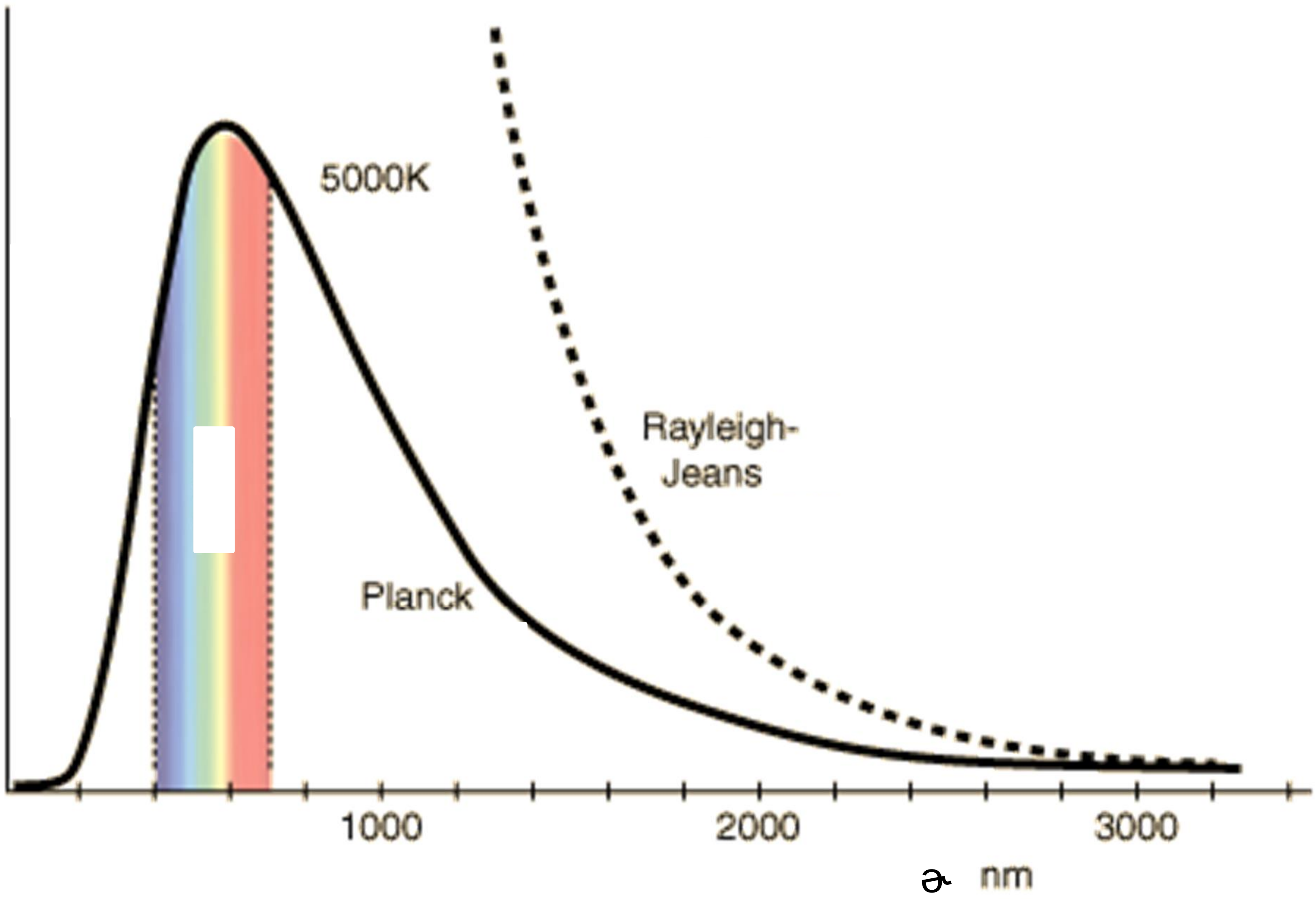
Planck

In Übereinstimmung mit den Daten

Intensitäts-
dichte 10^{13} Watt/m³



Wellenlänge (nm)


5000K
Rayleigh-
Jeans
Planck
1000
2000
3000
nm

Schon vorher beobachtet (Wien): $\nu_{\max} \sim T$

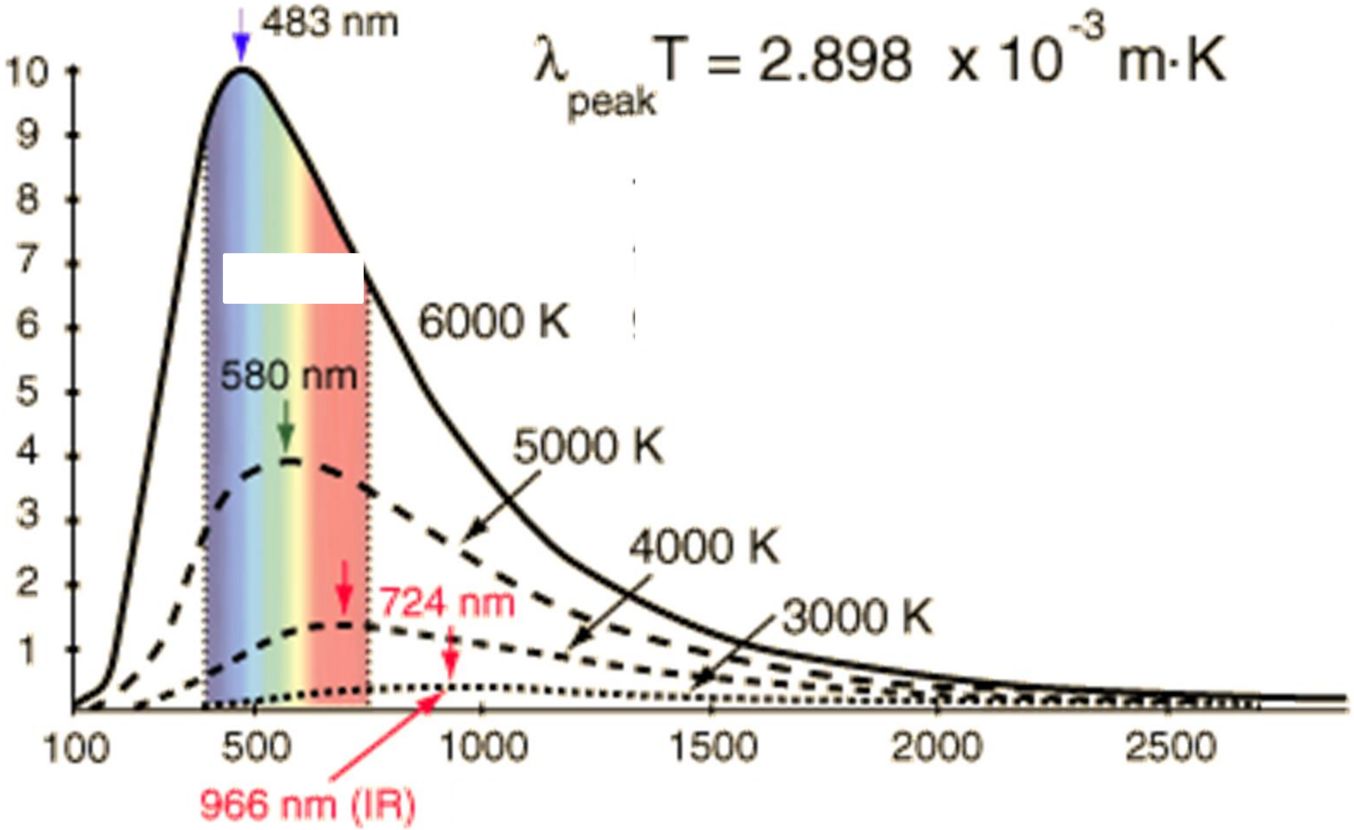
Wiensches Verschiebungsgesetz

Sei

$$x = \frac{h\nu}{kT} \qquad I_\nu = \frac{2\pi k^3 T^3}{c^2 h^2} \frac{x^3}{e^x - 1}$$

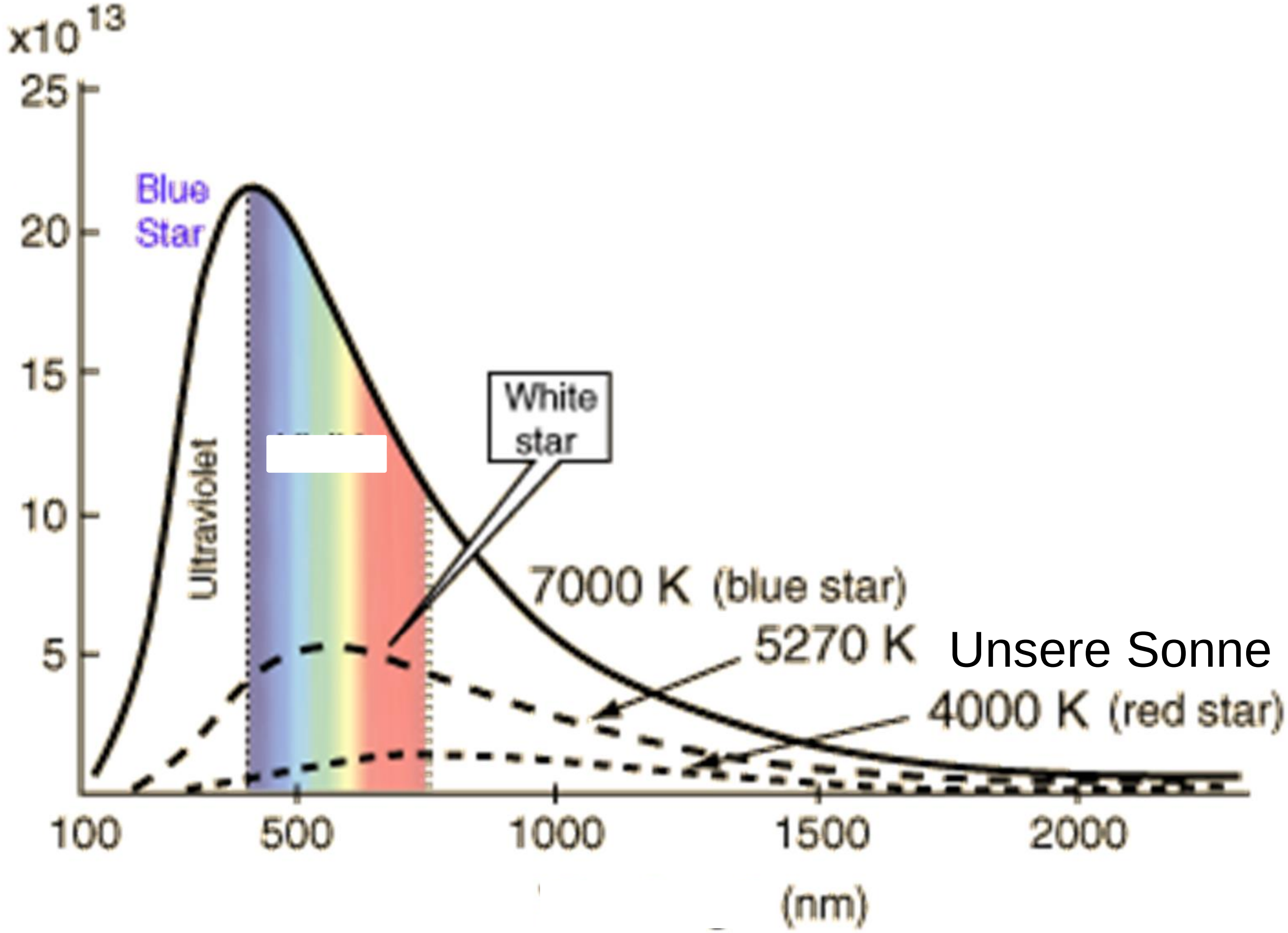
Differenzieren: $$\nu_{\max} = \frac{2.82kT}{h}$$

$$\lambda_{peak} T = 2.898 \times 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$$



Anwendung in der Astronomie:

Temperatur	Sternentyp
30-60 kK	Blauer Stern
7.5-10kK	Weißer Stern



Totale Strahlung über alle Frequenzen

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}}_{\frac{\pi^4}{15}}$$

$$\boxed{I = \sigma \cdot T^4}$$

Gesetz nach Stefan-Boltzmann

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{Watt}{m^2 \cdot grad}$$

$$\rightarrow 1000°K \quad 56.7 kW/m^2$$

Wie viel Leistung P strahlt eine Münze bei Zimmertemperatur ab?

22° =295K

$$P = \sigma \cdot A(Fläche) \cdot T^4$$
$$= (5.67 \cdot 10^{-8} W/m^2 K^4) \cdot 8.54 \cdot 10^{-4} m^2 \cdot 295^4 K^4$$
$$= 0.37 Watt$$

Wie viele Photonen verlassen pro Sekunde eine Münze?

Wellenlänge der Photonen nach Wien:

$$\boxed{N_\gamma = \frac{0.367 J}{0.126 eV \cdot 1.6 \cdot 10 \cdot^{-19} J/eV} = 1.82 \cdot 10^{19}}$$

Photonen

$$\lambda_{Max} = \frac{0.0029 m \cdot K}{295 K} = 9.83 \cdot 10^{-6} m = 9830 nm$$

$$E_\gamma = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda} = \frac{1240 eV/nm}{9830 nm} = 0.126 eV$$

Wiensches Strahlungsgestz

Temperatur von gebräuchlichen Lichtquellen: z.B. Wolframdraht in der Glühbirne å2400K,ə<0.8ε m →

$$e^{\frac{hc}{kT\lambda}} \gg 1 \qquad \frac{hc}{k} = 1.43\,Grad \cdot cm$$

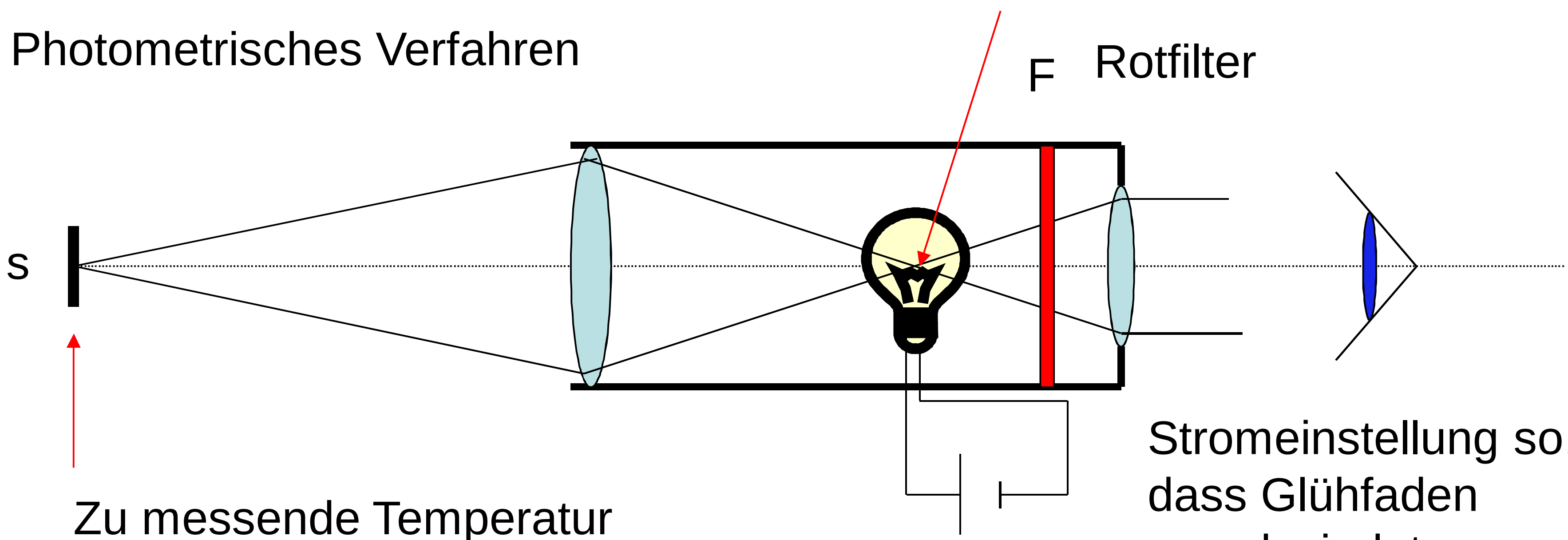
$$T \cdot \lambda = 2380 \cdot 6 \cdot 10^{-5}\,Grad \cdot cm = 1.43 \cdot 10^{-1}\,Grad \cdot cm$$

$$e^{\frac{hc}{kT\lambda}} = e^{10} = 2.2 \cdot 10^{4} \longrightarrow \boxed{I_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{kT\lambda}}}$$

Wiensche Strahlungsgesetz

Pyrometrie: Temperaturmessung

Photometrisches Verfahren



Zu messende Temperatur

Eichung:Schwarzer Körper

Stromeinstellung so, dass Glühfaden verschwindet

Schwarze Temperatur: Im Allgemeinen: s: A<1 →E<Es

Kirchhoff: $\frac{E}{A} = E_s$

→wahre Temperatur T höher als die vom Pyrometer angezeigte schwarze Temperatur S

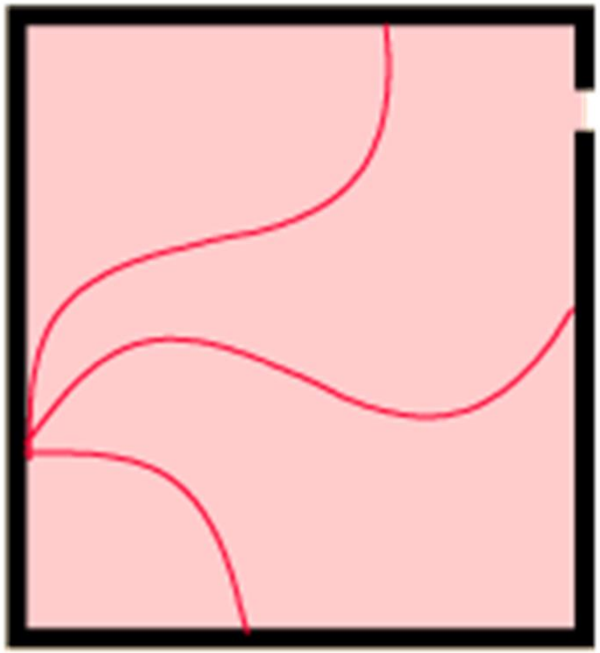
Wien:

$$\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{k\lambda S}} = A \cdot \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{kT\lambda}}$$

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{S} = \frac{k}{hc}\lambda \cdot \ln A$$

Für A=1→T=S, A<1 lnA<0 →T>S

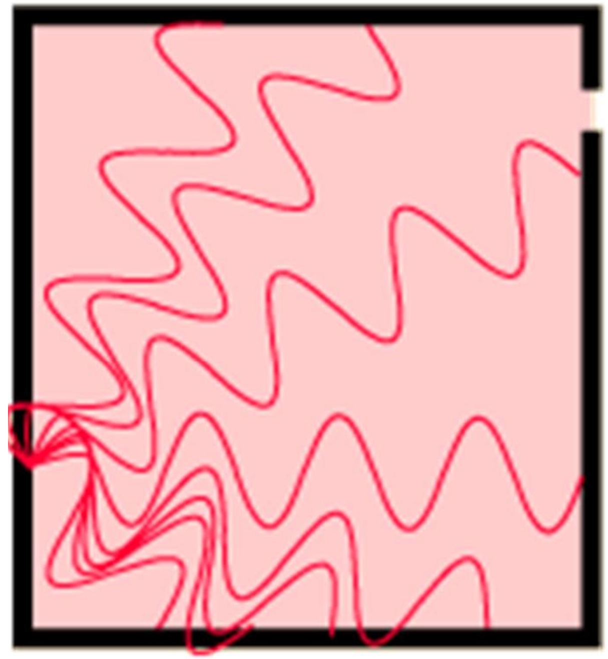
	# Moden pro Einheits-frequenz und volumen	Wahrscheinlichkeit der vor-handenen Moden	Mittlere Energie pro Mode
Klassisch	8´ ɜ^2/c^3	Gleich für alle	kT
Quanten	8´ ɜ^2/c^3	Braucht hɜ, um Höhere Moden zu erregen → Weniger wahrscheinlch	hɜ/(e$^{hɜ/kt}$-1)

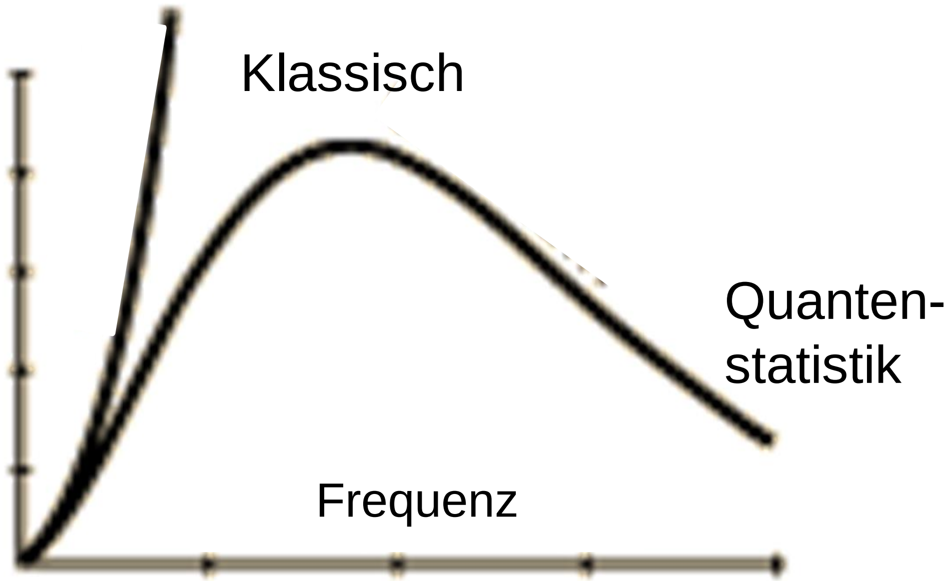


Anzahl der Moden
pro Frequenz
und Zeit

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

Höhere Frequenzen:
mehr Moden
Zweifache Frequenz
→4x mehr Moden





Verteilungen

Quantenstatistik

Maxwell-Boltzmann
klassisch

$$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/kT}}$$

Bose-Einstein

$$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/kT} - 1}$$

Fermi-Dirac

$$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/kT} + 1}$$

Identische
aber unterscheidbare
Teilchen

Ganzzahliger
Spin

Halbzahliger
Spin

Identische
aber ununterscheidbare
Teilchen

Keine Einschränkung
der Teilchenzahl
bei der Besetzung
Eines Zustands

Nur ein Teilchen
pro Zustand

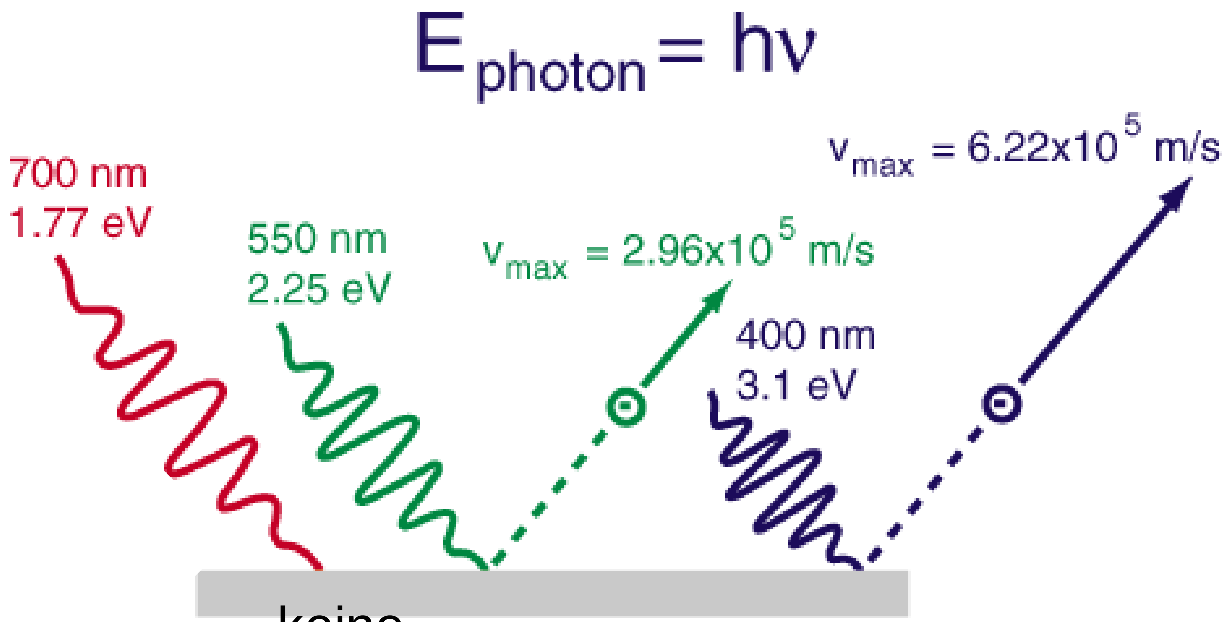
Photoelektrischer Effekt: (Hertz, Einstein)

Photonen auf z.B. Metall: Elektronen mit $E_{\max}$ werden emittiert

Es wird gefunden: $E_{\max} = h\nu - e\Phi$

Separationsenergie materialabhängig

Hängt nicht von der Intensität ab



keine Photoelektrischer Effekt

Impuls der Photnen: Klassisch I/c

Einstein $h\nu = m \cdot c^2$ $p = m \cdot c = \frac{h \cdot \nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

Druck auf eine Oberfläche: $P = \frac{N \cdot h \cdot \nu}{c}$

$I = N \cdot h \cdot \nu \rightarrow P = \frac{I}{c}$

Vergleich: Elektron und Photonimpuls

p=(6.63*10**-34 J*s)/(500*10**-9m)=1.33*10**-27kg/*m/s

→ Geschwindigkeit des Elektrons für diesen Impuls:

v=p/m= (1.33*10**-27kg/*m/s)/(9.11*10**-31kg)=1460m/s

→ Kin. Energie des Elektrons=mv**2/2

=1/2(9.11*10**-31kg)(1400m/s)**2=9.65*10**-25J→*1eV/1.6*10**-19J→

=6.06*10**-6eV Photonenergie: E=hc/ə=1240nm/500nm=2.48eV!!!!

Drehimpuls der Photonen

$$\underbrace{T = \frac{I}{2\pi\nu} = \frac{I}{\omega}}_{\text{klassisch}} = \frac{N \cdot h}{2\pi}$$

Bei zirkular pol Licht!

Wellenlänge von Teilchen

De Broglie $p = \frac{h}{\lambda}$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mu}$$

Geschwindigkeit des Teilchens

Elektronenreflexionen an Kristallen beobachtet mit:

$$n \cdot \lambda = d \cdot \sin\theta$$

Unschärferelationen (Heisenberg)

Konjugierte Variable

$$\Delta P \bullet \Delta Q \approx h$$

Impuls-Ort
Zeit-Energie
Winkel-Drehimpuls

$$\Delta \nu \bullet \Delta t \approx 1$$

$$\Delta (h\nu) \bullet \Delta t \approx h$$

$$\Delta E \bullet \Delta t \approx h$$