0. Erinnerung an:

Vorlesung Elektrizität
und Magnetismus

$$div\,\vec{B} = 0$$

$$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Die Vorlesungen beginnen mit Wellenoptik
und damit der Fortsetzung von el.magn. Wellen

$$\boxed{rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

$$\boxed{rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

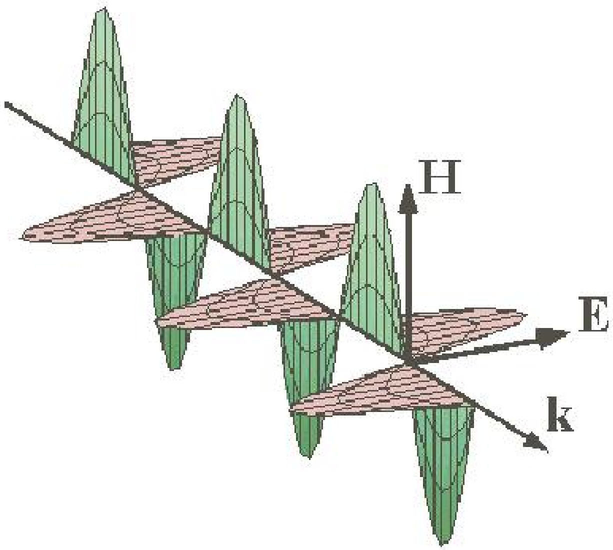
$$\boxed{m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})}$$

Grundgleichungen im Vakuum

$$div\,\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{\nabla}^2\vec{E}$$

$$\boxed{\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E}(\vec{r},t) = 0}$$

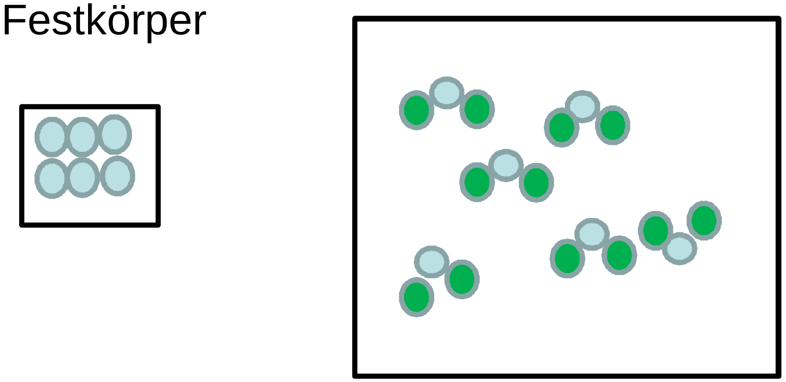


c=(1/(ã(ὺ$_0$·ε$_0$)))

Änderungen bei nicht magnetischen Materialien, den für die Optik wichtigsten Fall

Gas

Festkörper

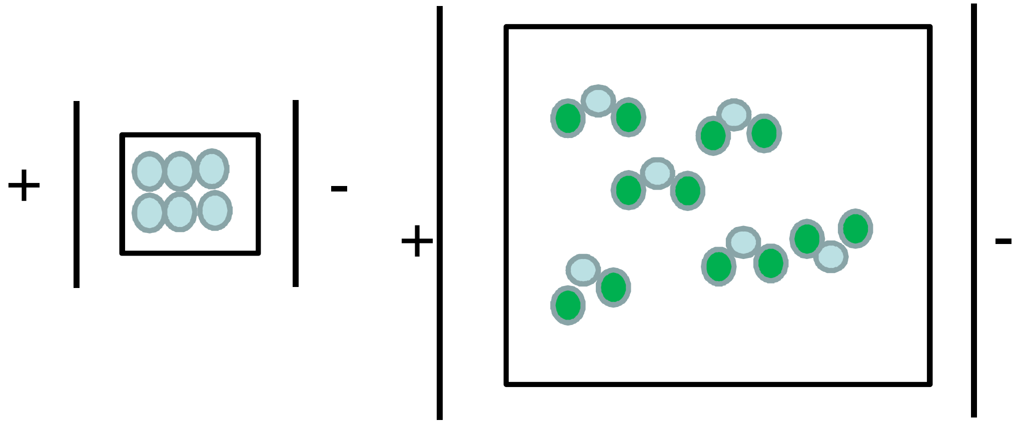


Siehe dazu Vorl. 28
Orientierungspolarisation
und Verschiebungspolarisation:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \chi \cdot \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \vec{E}$$

U=0



U>0

1. Wellenoptik

Hinweis auf e.m. Welle: $c_{Licht} = c_{Elektromagnetische\ Welle} = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$

a) Polarisation

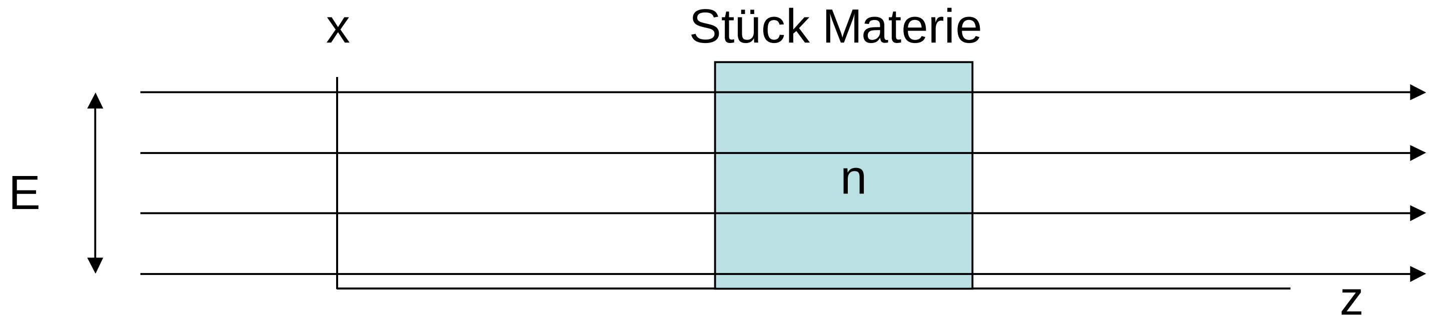
b) Interferenz

a)

1.1. Brechungsindex n

Was passiert mit der Geschwindigkeit?

$c'(n)=c/n$ $n=n(\lambda)$? $\Rightarrow$ $c'=c'(\lambda)$



E-Feld der Welle

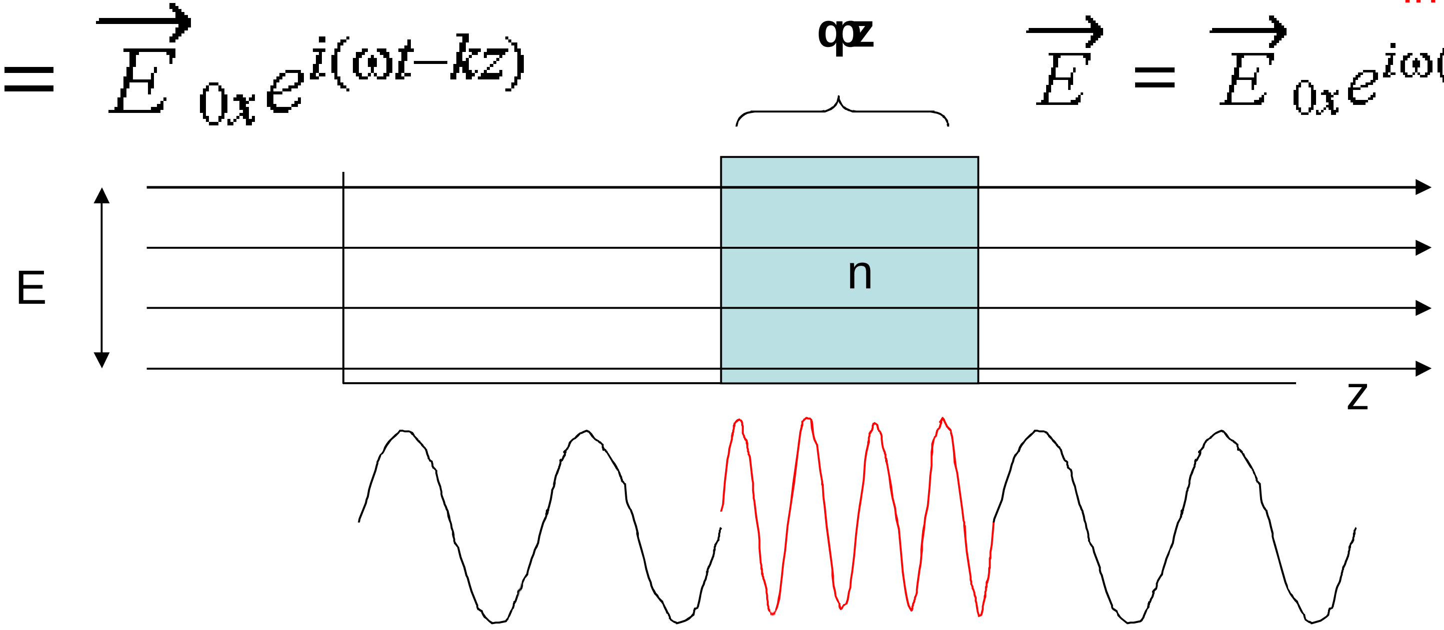
Einfallende Welle:

$$\vec{E} = \vec{E}_{0x} e^{i(\omega t - kz)}$$

Auslaufende Welle:

Verzögerung im Medium!?

$$\vec{E} = \vec{E}_{0x} e^{i\omega\left(t - \boxed{(n-1)\frac{\Delta z}{c}} - \frac{z}{c}\right)}$$



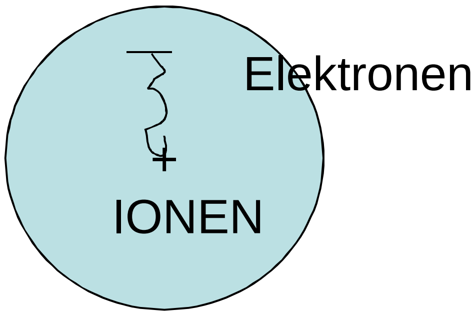
$$c = \frac{\omega}{k}$$

$$\nu \bullet \lambda_0 = c$$

$$\boxed{\nu \bullet \lambda = \frac{c}{n}}$$

$$\lambda_0 \qquad \lambda = \frac{\lambda_0}{n} \qquad \lambda_0$$

Mikroskopisches Modell



Atom: Beschrieben in einem mechanischem Oszillatormodell: Drude

Erzwungene Schwingung eines gedämpften harmonischen Oszillators

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + D \cdot x = -e \cdot E_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

e-Masse

Ansatz: $x = x_0 \cdot e^{i\omega t}$ Bei z=0

$$\gamma = \frac{b}{m} \qquad \omega_0^2 = D/m$$

$$x_0 = -\frac{e \cdot E_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i \cdot \gamma \cdot \omega} = -\frac{\frac{e \cdot E_0}{m}((\omega_0^2 - \omega^2) - i \cdot \gamma \cdot \omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \cdot \omega^2}$$

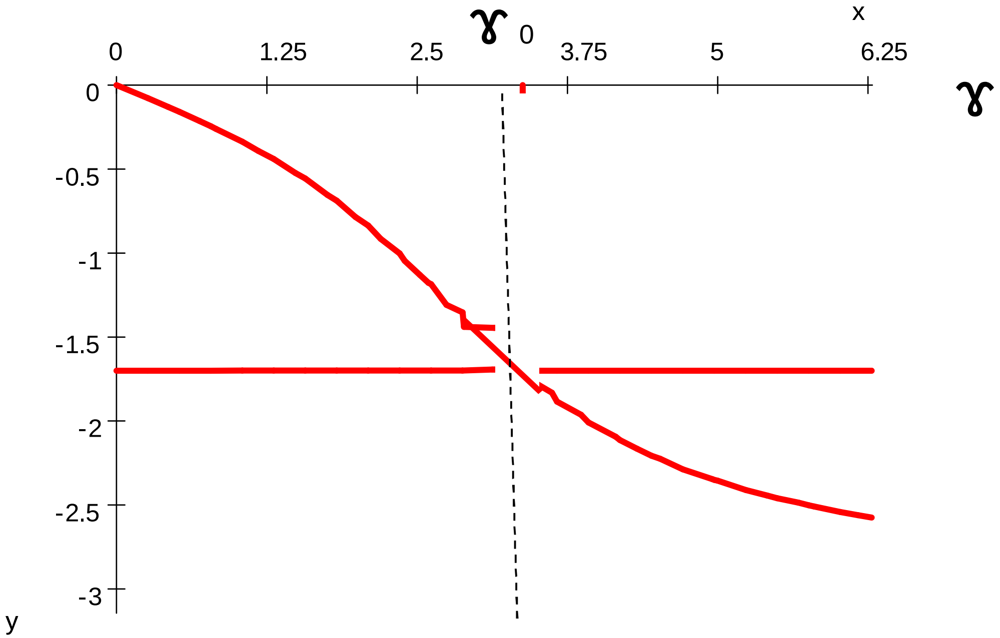
$$x = -\frac{e \cdot E_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \cdot \omega^2}} e^{i(\omega t + \varphi')} = \frac{e \cdot E_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \cdot \omega^2}} e^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$\varphi = \varphi' + \pi$$

$$tg\varphi = -\frac{\gamma \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Phase der erzwungenen Schwingung verzögert

$$tg\varphi = -\frac{\gamma \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

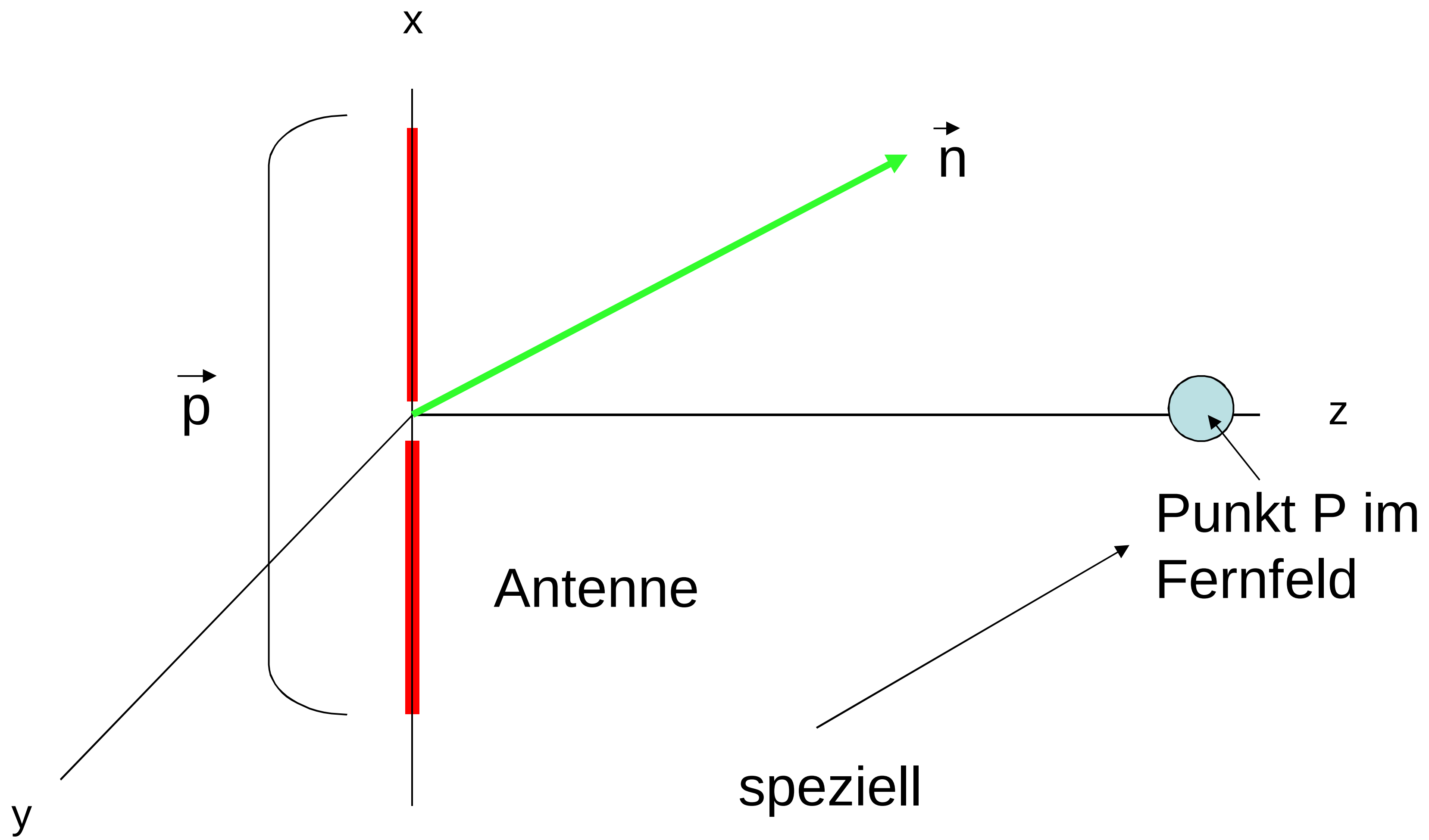


Phase

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k^2 (\vec{n} \times \vec{p}) \times \vec{n} \, \frac{e^{ikr}}{r} \; .$$

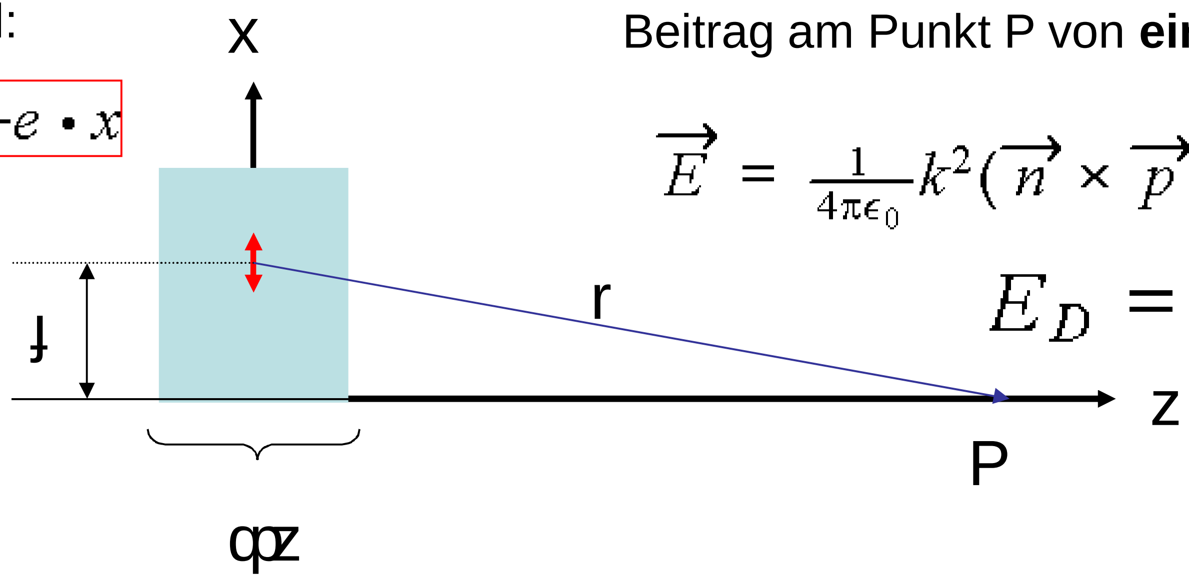
Fernfeldanteil

Allgemein



Dipol:

$$\boxed{p = -e \cdot x}$$



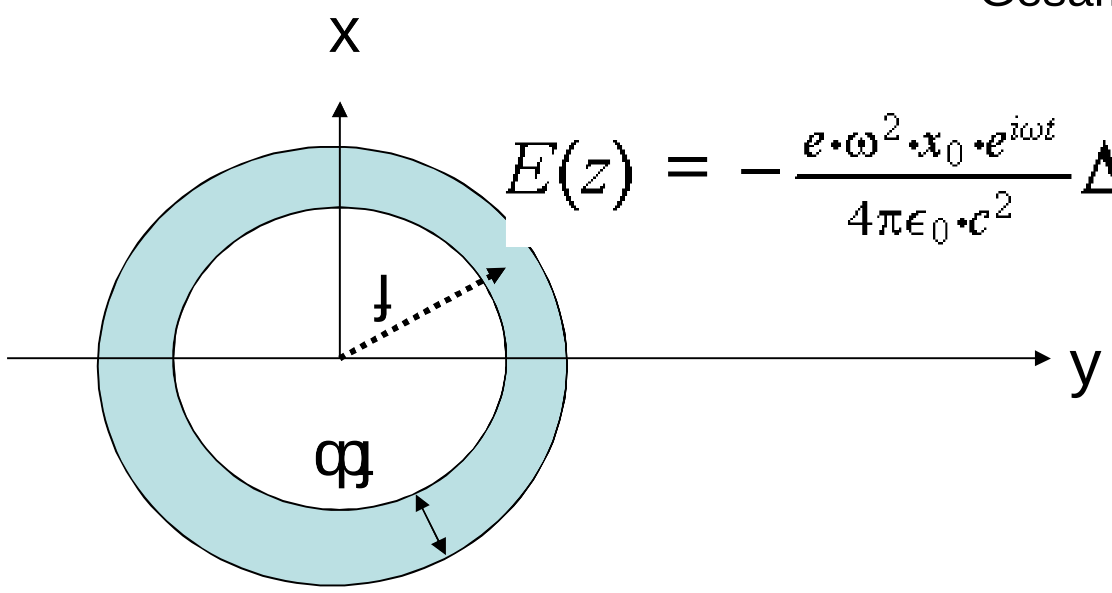
Beitrag am Punkt P von **einem** strahlenden Dipol:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k^2 (\vec{n} \times \vec{p}) \times \vec{n} \, \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$E_D = -\frac{e \cdot \omega^2 \cdot x_0 \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{4\pi\epsilon_0 \cdot c^2 \cdot r}$$

r >>ɟ

Beitrag von allen Punkten: Integration



Gesamte E(z):

Dichte der Dipole

$$E(z) = -\frac{e \cdot \omega^2 \cdot x_0 \cdot e^{i\omega t}}{4\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \Delta z \int_0^\infty \frac{N \cdot e^{-\frac{i\omega r}{c}}}{r} 2\pi\rho \cdot d\rho$$

Da $r^2 = z^2 + \rho^2$

in der Ebene $z = z_0 = 0$

$$\longrightarrow \quad r \cdot dr = \rho \cdot d\rho$$

$$\int_{r=z}^{\infty} N \cdot e^{-\frac{i\omega r}{c}} dr = -\frac{c}{i\omega}\left[N \cdot e^{-\frac{i\omega r}{c}}\right]_z^\infty = \frac{c}{i\omega} N \cdot e^{-\frac{i\omega z}{c}}$$

$$\int_{r=z}^{\infty} N \bullet e^{-\frac{i\omega r}{c}} dr = -\frac{c}{i\omega}\left[N \bullet e^{-\frac{i\omega r}{c}}\right]_z^{\infty} = \frac{c}{i\omega} N \bullet e^{-\frac{i\omega z}{c}}$$

$$N(\rho = \infty) = 0 \longrightarrow \boxed{E(z) = \frac{i\omega \cdot e \cdot x_0 \cdot N}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot c} e^{i\omega(t - \frac{z}{c})} \Delta z}$$

X_0 eingesetzt, s.o.

$$\longrightarrow \boxed{E(z) = -i\omega \frac{\Delta z}{c} \frac{N \cdot e^2}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot m\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega \cdot \gamma\right]} \bullet E_0 e^{i\omega(t - \frac{z}{c})}}$$

Makroskopische Betrachtung:

Vakuum: $\varphi t = \frac{\Delta z}{c}$

Medium: zusätzliche Zeit:

$$\Delta t = (n-1)\frac{\Delta z}{c}$$

Gesamtwellenfeld:

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_e + \sum_k \overrightarrow{E}_k$$

Primär-

Sekundärwellen
verzögert

Nach Durchlaufen eines Mediums:

$$E(z) = E_0 e^{i\omega(t-(n-1)\frac{\Delta z}{c} - \frac{z}{c})} = E_0 e^{i\omega(t - \frac{z}{c})} \bullet e^{\underbrace{-i\omega(n-1)\frac{\Delta z}{c}}_{\text{ű}}}$$

Hier: ű <<1 $\longrightarrow$ $e^{-i\varphi} = 1 - i\varphi$

$$\vec{E}_z = \vec{E}_0 \bullet e^{i\omega(t-\frac{z}{c})} - i\omega(n-1)\frac{\Delta z}{c}\vec{E}_0 \bullet e^{i\omega(t-\frac{z}{c})}$$

$$= \vec{E}_e + \sum_k \vec{E}_k \qquad\qquad = \vec{E}_0 \bullet e^{i\omega(t-\frac{z}{c})}\left[1 - i\omega(n-1)\frac{\Delta z}{c}\right]$$

Vergleich mit mikroskopischer Herleitung:

$$\boxed{E(z) = -i\omega\frac{\Delta z}{c}\frac{N\bullet e^2}{2\bullet\epsilon_0\bullet m\left[(\omega_0^2-\omega^2)+i\omega\bullet\gamma\right]}\bullet E_0 e^{i\omega(t-\frac{z}{c})}}$$

$$\longrightarrow \quad n = 1 + \frac{N\bullet e^2}{2\bullet\epsilon_{0\bullet}\left[(\omega_0^2-\omega^2)+i\omega\bullet\gamma\right]}$$ Ām

1.2. Absorption und Dispersion

$$n = 1 + \frac{N\bullet e^2(\omega_0^2-\omega^2)-i\gamma\omega}{2\bullet\epsilon_0\bullet m\bullet(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\bullet\gamma^2} = n' - i\kappa$$

$$\mathrm{n} = n' - i\kappa \qquad k_0 = \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_0 \underbrace{e^{-\omega \cdot \kappa \cdot \frac{\Delta z}{c}}}_{\text{Absorption}} \cdot \underbrace{e^{-i\omega(n'-1)\frac{\Delta z}{c}}}_{\text{Phasenverzögerung}} \cdot e^{i(\omega t - k_0 z)}$$

Zur Erinnerung: Poynting Vektor

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$= \epsilon_0 \cdot c^2 \vec{E} \times \vec{B}$$

mit $c = \dfrac{E}{B}$

Intensität:

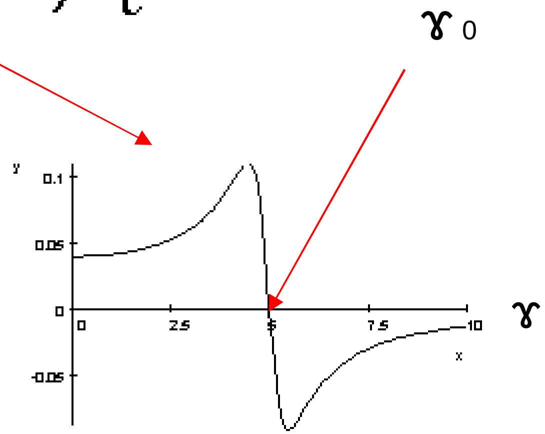
$$I = c \cdot \epsilon_0 \cdot E^2$$

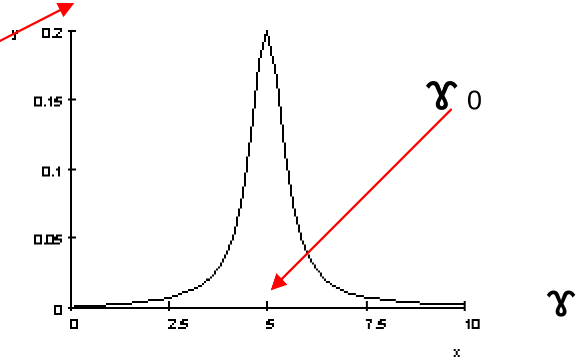
$$I = I_0 \cdot e^{-\alpha \cdot \Delta z}$$

Absorptions-koeffizient $\alpha = \dfrac{4\pi \cdot \kappa}{\lambda_0}$

$$\Delta\varphi = \omega(n' - 1)\frac{\Delta z}{c}$$

$$= 2\pi(n' - 1)\frac{\Delta z}{\lambda_l}$$





Phasengeschwindigkeit: $v_{ph} = \nu \bullet \lambda = \frac{c}{n'}$

Gruppengeschwindigkeit: $v_G = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(v_{ph} \bullet k) = v_{ph} + k\frac{dv_{ph}}{dk}$

$$= \frac{c}{n'} - \frac{k \bullet c}{n'^2}\frac{dn'}{dk}$$

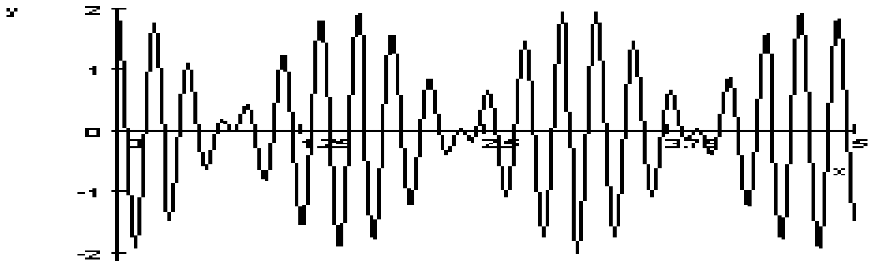
Gruppengeschwindigkeit immer kleiner als c

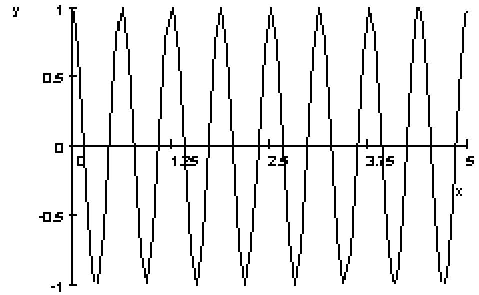
$\frac{dn'}{dk} \succ 0$ Normale Dispersion

Überlagerung:

$$\xi_1 = A \bullet \cos(\omega_1 t - k_1 z)$$

$$\xi_2 = A \bullet \cos(\omega_2 t - k_2 z)$$





$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \bullet \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right)$$
$$\cos(\omega_m t - k_m z)$$

$$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$k_m = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

$$\Delta k = k_1 - k_2$$

Nochmals:

Gruppengeschwindigkeit:

Mit dieser Geschwindigkeit wird die Energie transportiert!

Spezielle Lösung der Wellengleichung:

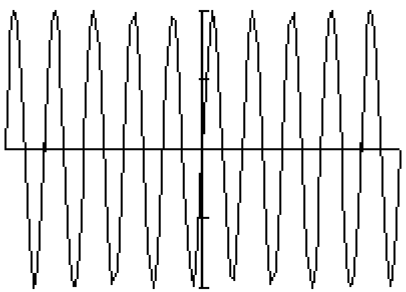
$$u(x,t) = Ae^{ikx-i\omega t} + Be^{-ikx-i\omega t}, k = \frac{2\pi}{\lambda}, \omega = \frac{2\pi}{T}$$

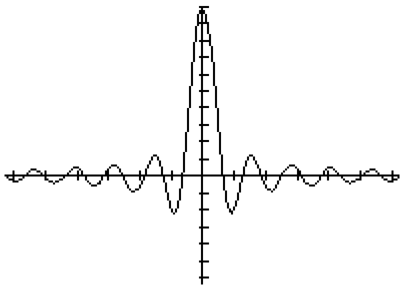
Lineare Überlagerung! $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx-i\omega(k)t} dk$

spezieller für t=0 $A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0) e^{-ikx} dx$

$$u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cdot e^{ikx} \cdot dk$$

Endlicher Wellenzug:

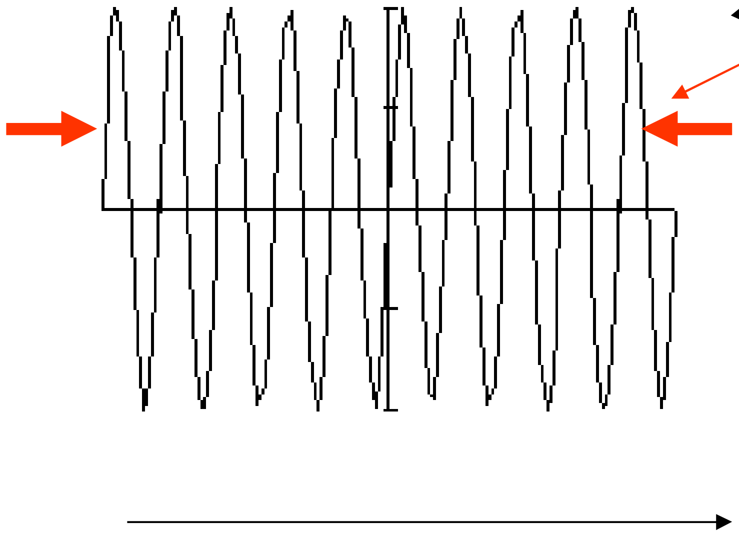


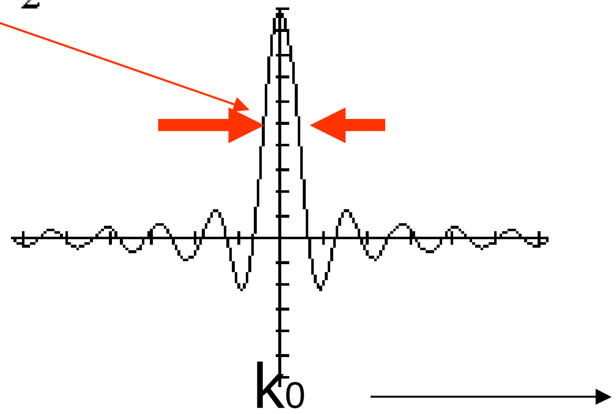


Es gilt

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2}$$

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2}$$





$\omega(k)!$ Ist A(k) relativ eng um k_0 konzentriert

$$\omega(k) = \omega_0 + \frac{d\omega}{dk}\Big|_0 (k - k_0) + \ldots..$$

$$u(k) \approx \frac{e^{i[k_0(d\omega/dk)|_0 - \omega_0]\cdot t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i[x-(d\omega/dk)|_0 \cdot t]k} dk$$

das ist aber u(x',0) mit

$$x' = x - (d\omega/dk)\Big|_0 \cdot t$$

Zum Vergleich:

$$0 \leq v_{Phase} \leq \infty$$

$$\rightarrow\rightarrow\rightarrow \; v_{Gruppe} = (d\omega/dk)\Big|_0 \; :$$

Gruppengeschwindigkeit

$v_{Gruppe} \leq c$ gilt immer!