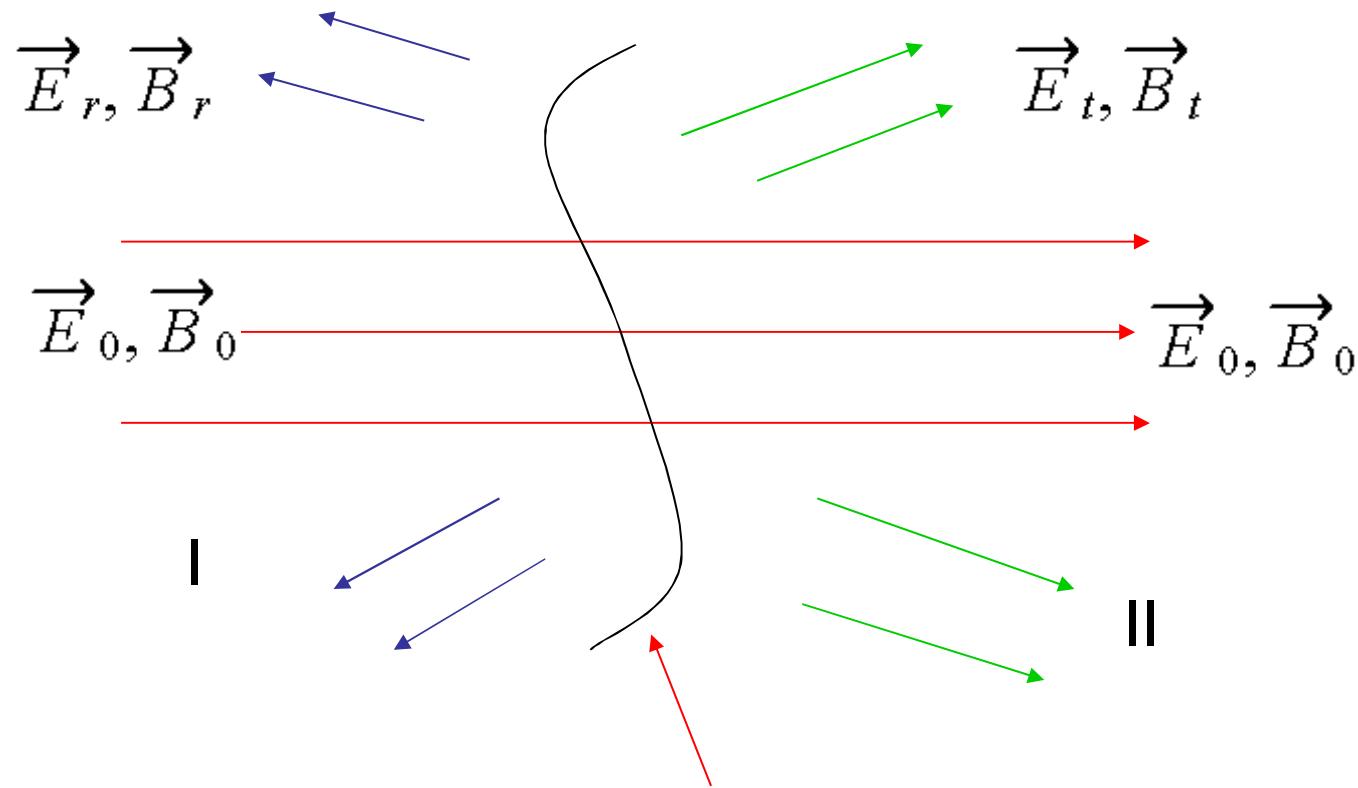


Allgemeine Bemerkungen zur Beschreibung von Beugungsphänomenen



Oberflächen mit Aperturen

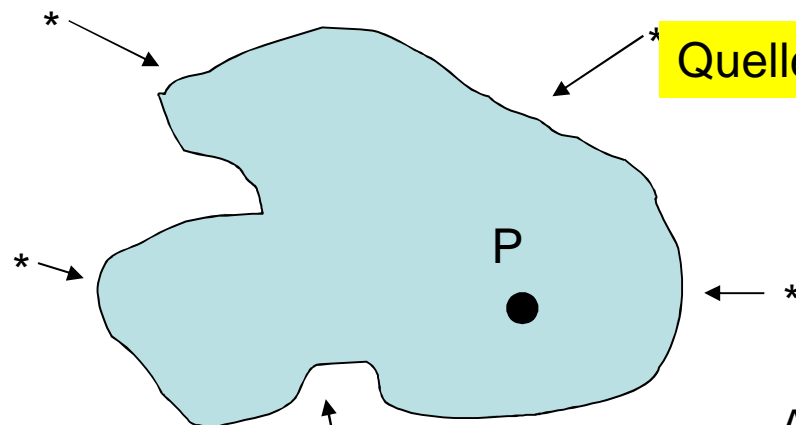
führen zu reflektierten und durchgreifenden Feldern in den Regionen I und II, zusätzlich zu den Feldern die schon da waren ohne Oberfläche

Die Berechnung wird skizziert



Skalare Beugungstheorie

Huyghenssches Prinzip in eine mathematische Formulierung

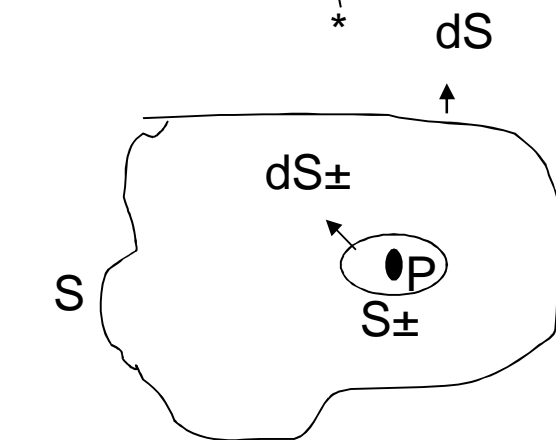


Quellen Q

Felder erfüllen Wellengleichung

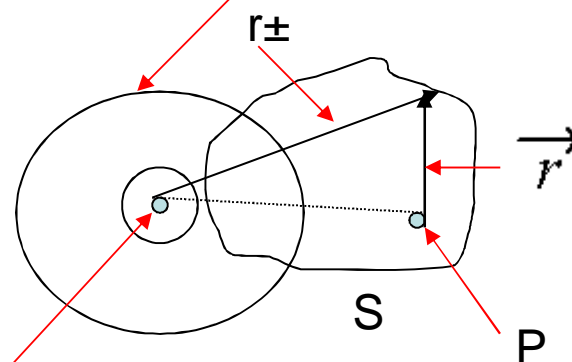
Totales Lichtfeld in P

$$E(\vec{r}, t) = U(\vec{r})e^{-i\omega t}$$



Quellen auf Fläche S (Huygens)
Wirkung auf S± um P

Aus Q : Kugelwellen $U = U_Q \cdot \frac{e^{ikr_0}}{r}$



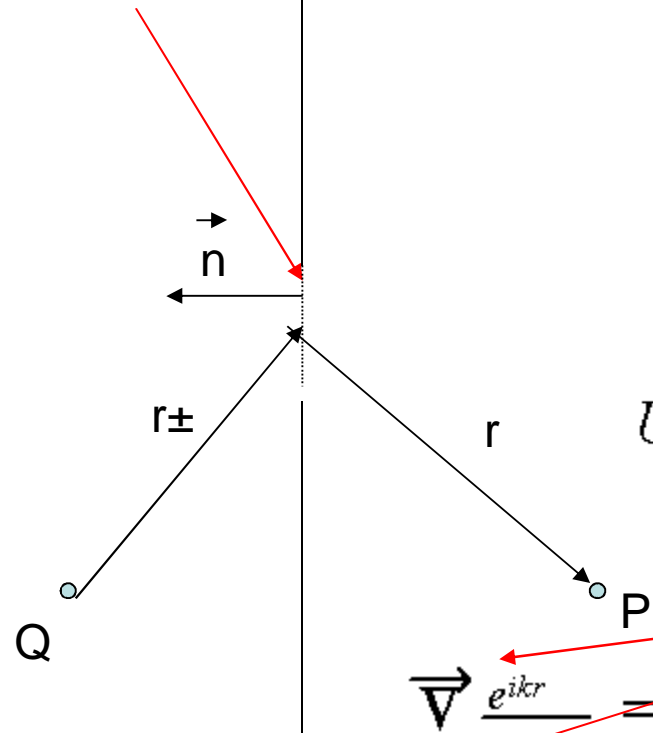
Kugel Wellen aus P

Kirchhoffsches Integraltheorem

$$U(r_p) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{e^{ikr}}{r} \vec{\nabla} U - U \vec{\nabla} \frac{e^{ikr}}{r} \right] dS$$

Ausgangspunkt für die weiteren Rechnungen

Appertur



Ann.: U und der grad von U vernachlässigbar
ausser in der Appertur

U und grad U gleich wie ohne Schirm!

$$U = U_0 \frac{e^{i(kr' - \omega t)}}{r'}$$

Kirchhoff:

$$U_P = \frac{U_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \int_S \left(\frac{e^{ikr}}{r} \underbrace{\vec{\nabla} \frac{e^{ikr'}}{r'}}_{\text{red arrow}} - \frac{e^{ikr'}}{r'} \underbrace{\vec{\nabla} \frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{red arrow}} \right) dS$$

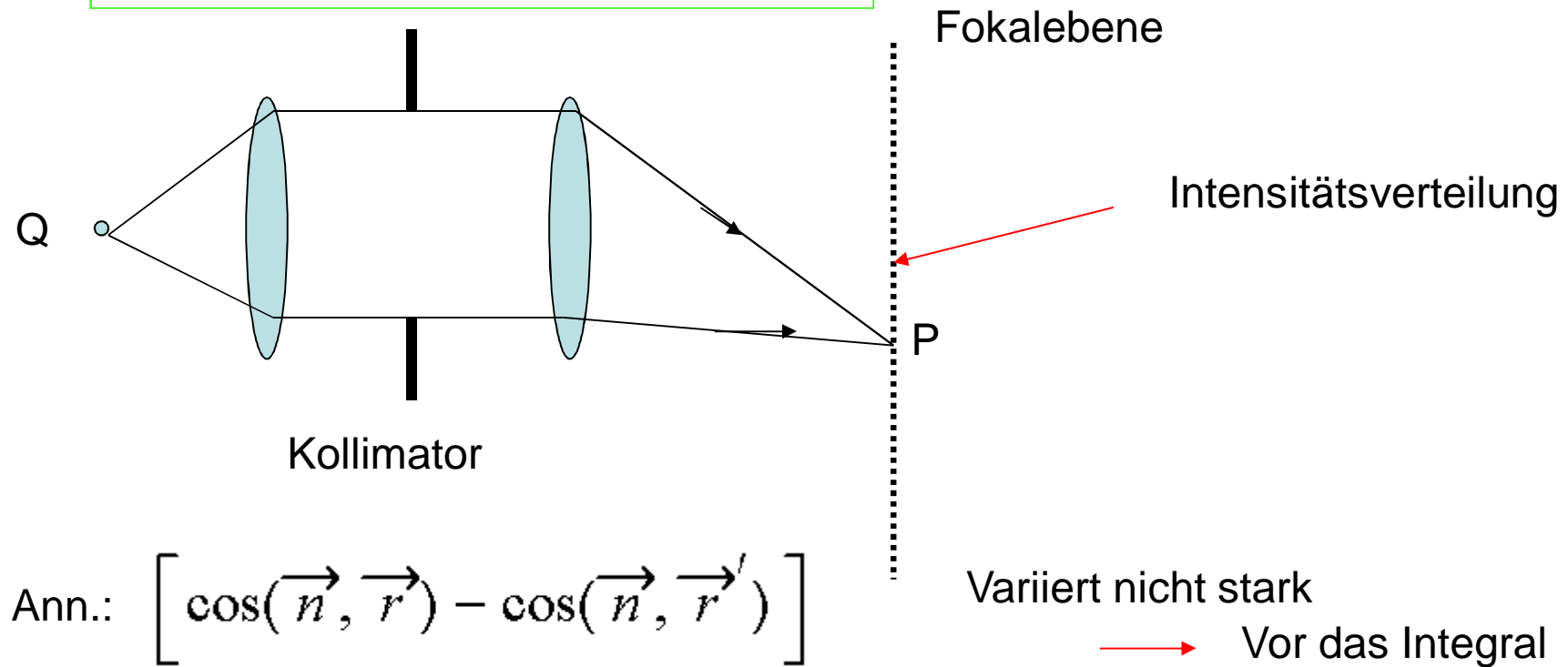
$$\vec{\nabla} \frac{e^{ikr}}{r} = \cos(\vec{n}, \vec{r}) \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} = \cos(\vec{n}, \vec{r}) \left(\frac{ik \cdot e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right)$$

$$\vec{\nabla} \frac{e^{ikr'}}{r'} = \cos(\vec{n}, \vec{r}') \frac{\partial}{\partial r'} \frac{e^{ikr'}}{r'} = \cos(\vec{n}, \vec{r}') \left(\frac{ik \cdot e^{ikr'}}{r'} - \frac{e^{ikr'}}{r'^2} \right)$$

$$\rightarrow U_P = -\frac{ikU_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \int_S \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} \left[\cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{r}') \right] dS$$

Fresnel-Kirchhoffsches Integral

Fraunhofersche Beugungsphänomene



$$\frac{e^{ikr'}}{r'}$$

konstant → Vor das Integral

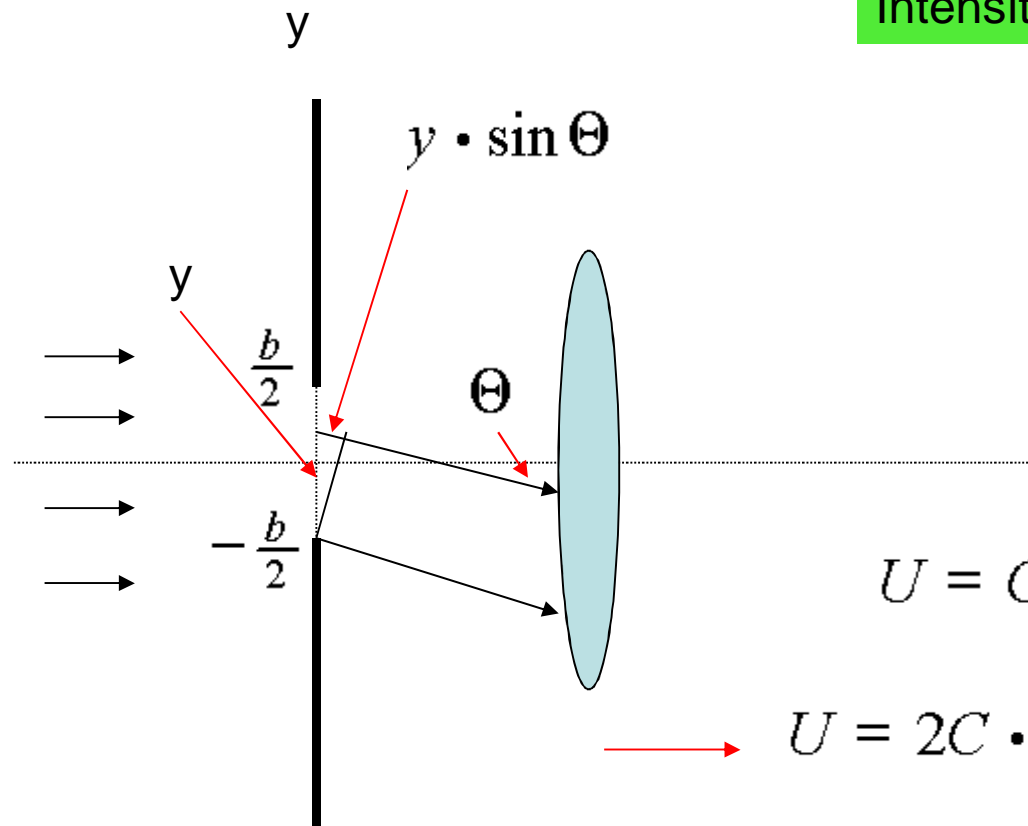
$$\frac{e^{ikr}}{r}$$

Keine Variation über der Appertur

$$U_P = C \int_S e^{ikr} dS$$

Flächenintegral!!

Intensitätsverteilung hinter einem Spalt



Länge des Spaltes

$$dS = L \cdot dy$$

$$r = r_0 + y \sin \Theta$$

Wert für $y=0$

$$U = C \cdot e^{ikr_0} \int_{-b/2}^{b/2} e^{iky \sin \Theta} L \cdot dy$$

$$U = 2C \cdot e^{ikr_0} L \frac{\sin(\frac{1}{2} kb \sin \Theta)}{k \sin \Theta} = C' \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)$$

$$\beta = \frac{1}{2} kb \sin \Theta$$

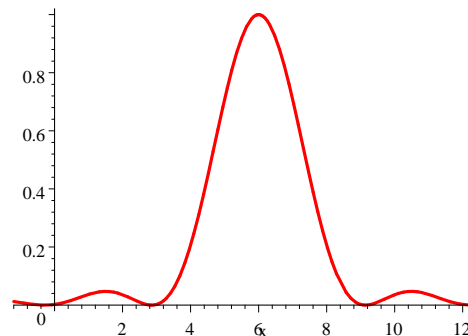
Intensitätsverteilung

$$I = |U|^2 = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

Max: $\beta = 0, \dots$

0: $\beta = \pm \pi, \dots$

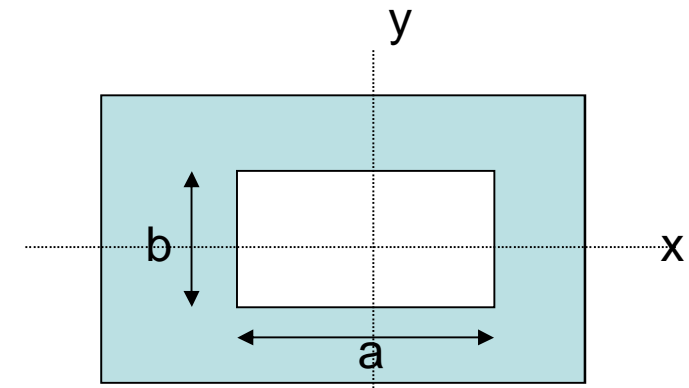
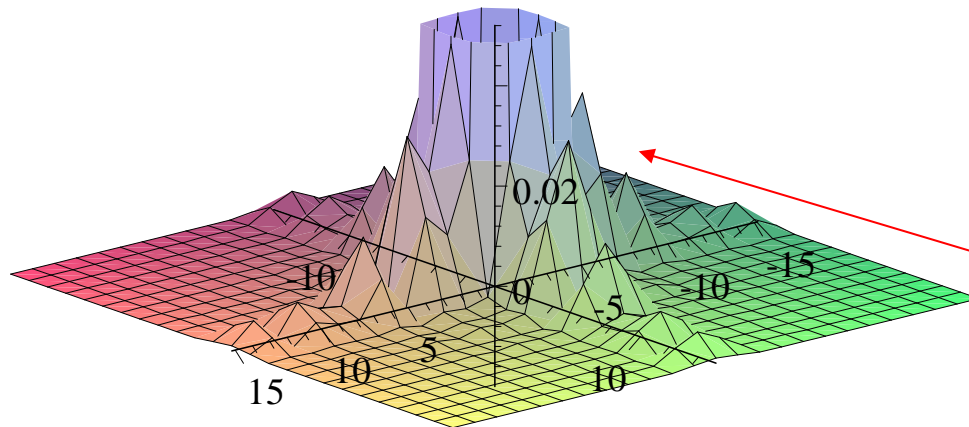
$$C' = 2C \cdot e^{ikr_0} L \cdot b$$



Spaltfunktion!

Für eine rechteckige Öffnung:

Wie beim Spalt, aber
2-dimensionale Integration:



$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

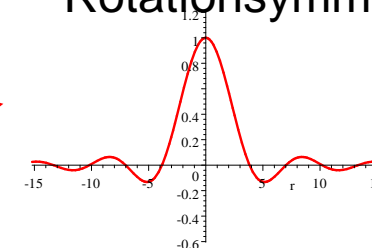
Für eine kreisförmige Öffnung:

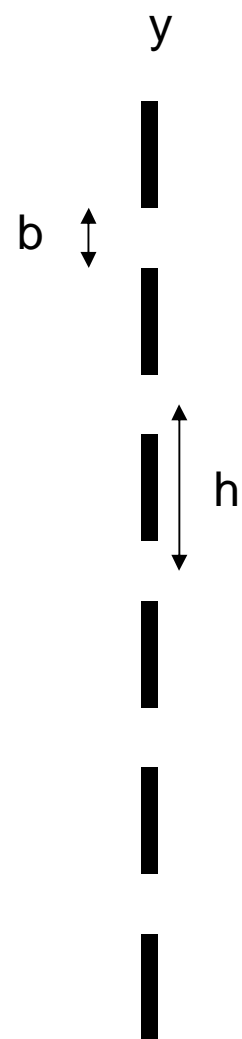
$$U = C e^{ikr_0} \int_{-R}^R e^{ik y \sin \Theta} \cdot 2 \sqrt{R^2 - y^2} dy$$

Rotationsymmetrisch

$$I = I_0 \left[\frac{2J_1(\rho)}{\rho} \right]^2 \quad \rho = k \cdot R \sin \Theta$$

J_1 Besselfunktion





Mehrere Spalte:

$$\begin{aligned}
 \int_a e^{iky \sin \Theta} dy &= \int_0^b + \int_h^{h+b} + \dots + \int_{(N-1)h}^{(N-1)h+b} e^{iky \sin \Theta} dy \\
 &= \frac{e^{ikb \sin \Theta} - 1}{ik \sin \Theta} \left[1 + e^{ikh \sin \Theta} + e^{ik(N-1)h \sin \Theta} \right] \\
 &= \frac{e^{ikb \sin \Theta} - 1}{ik \sin \Theta} \frac{1 - e^{ik \cdot N \cdot h \cdot \sin \Theta}}{1 - e^{ik \cdot h \cdot \sin \Theta}} \\
 &= b \cdot e^{i\beta} e^{i(N-1)\gamma} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \left(\frac{\sin(N\gamma)}{\sin \gamma} \right)
 \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{1}{2} k \cdot b \cdot \sin \Theta \quad \gamma = \frac{1}{2} k \cdot h \cdot \sin \Theta$$

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin(N\gamma)}{N \sin \gamma} \right)^2$$

Spalt
b

Gitter
h

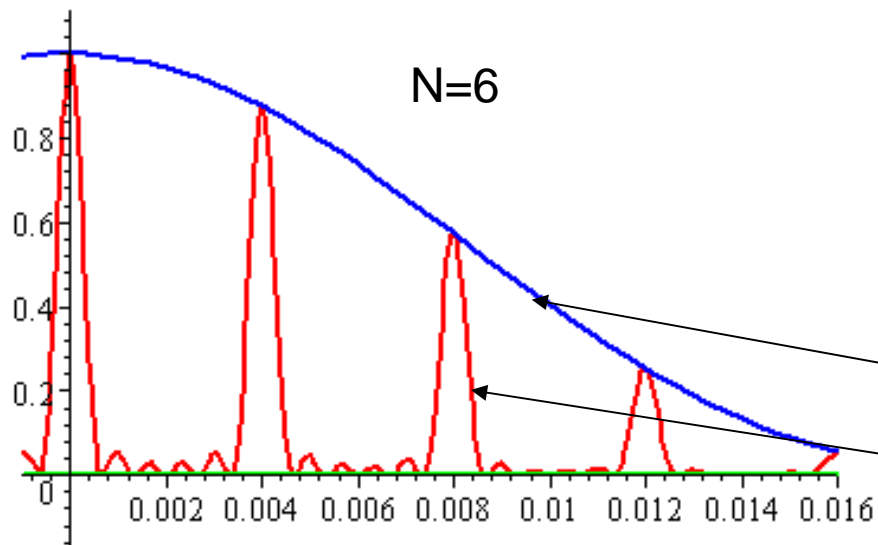
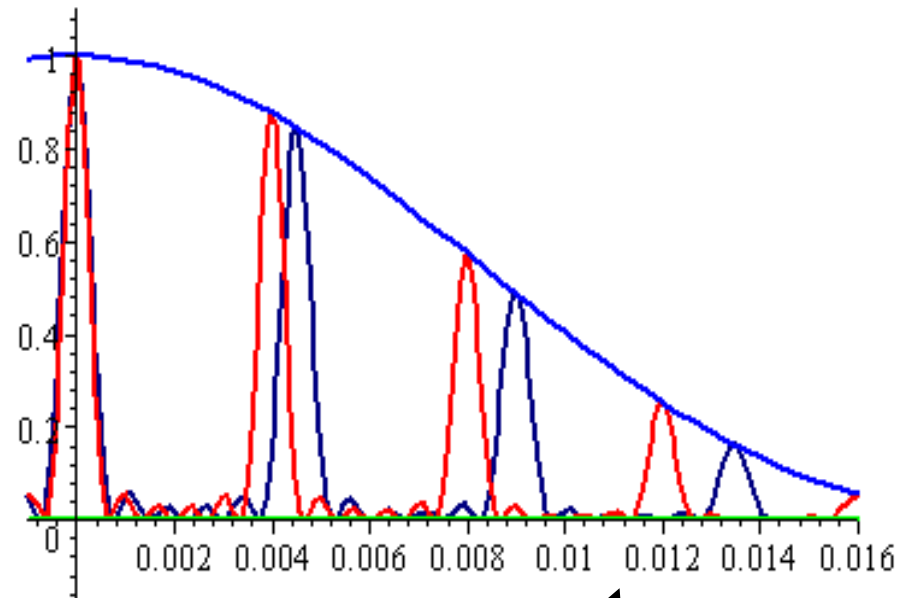
$$n \cdot \lambda = h \cdot \sin \Theta \quad I = I_0 \text{ für } \Theta = 0 \quad \text{Durch das Einfügen von}$$

Hauptmaxima: $\gamma = n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$

N=6

Auflösung
zweier
Spektrallinien

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin(N \cdot \gamma)}{N \cdot \sin \gamma} \right)^2$$



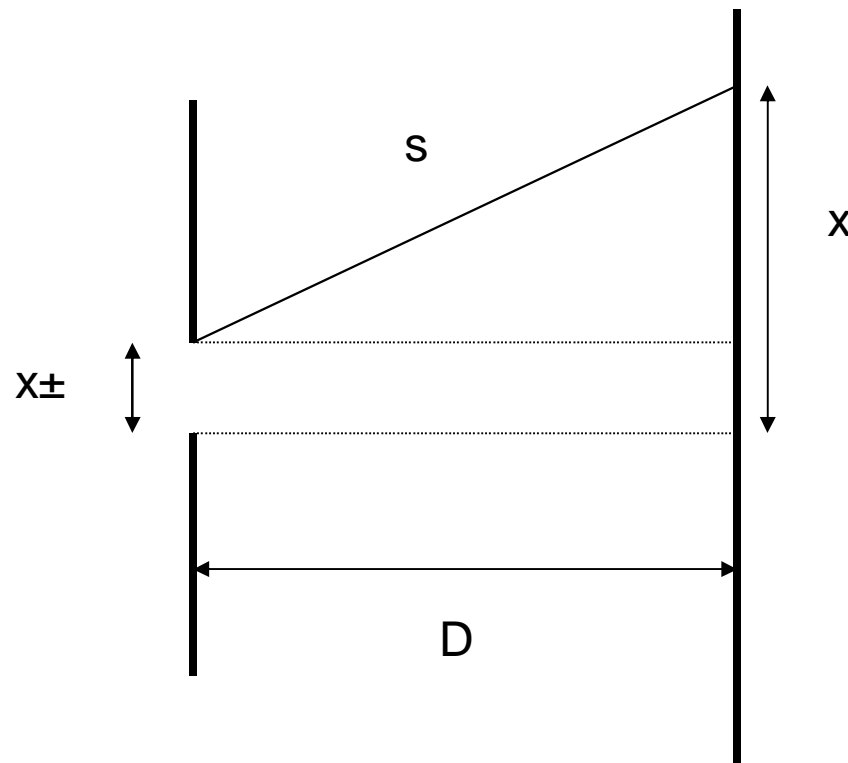
N=6

Auflösung wird besser
mit wachsendem m

Einzelspalt

Gitter N=6

Übergang Fraunhofer auf Fresnel-Beugung



$$s = \sqrt{D^2 + (x - x')^2}$$

Fraunhofer Beugung

$$x - x' \ll D$$

$$s \approx D + \frac{x^2}{2D} - \frac{x \cdot x'}{D}$$



Lichtwege und Phase
linear in x_{\pm}

Bedingung für Fraunhofer
Beugung

$$\frac{x'^2}{2D} \ll \lambda$$



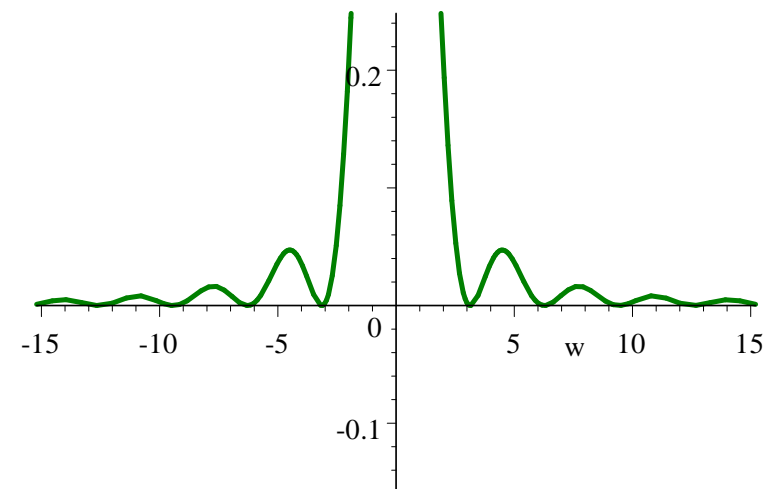
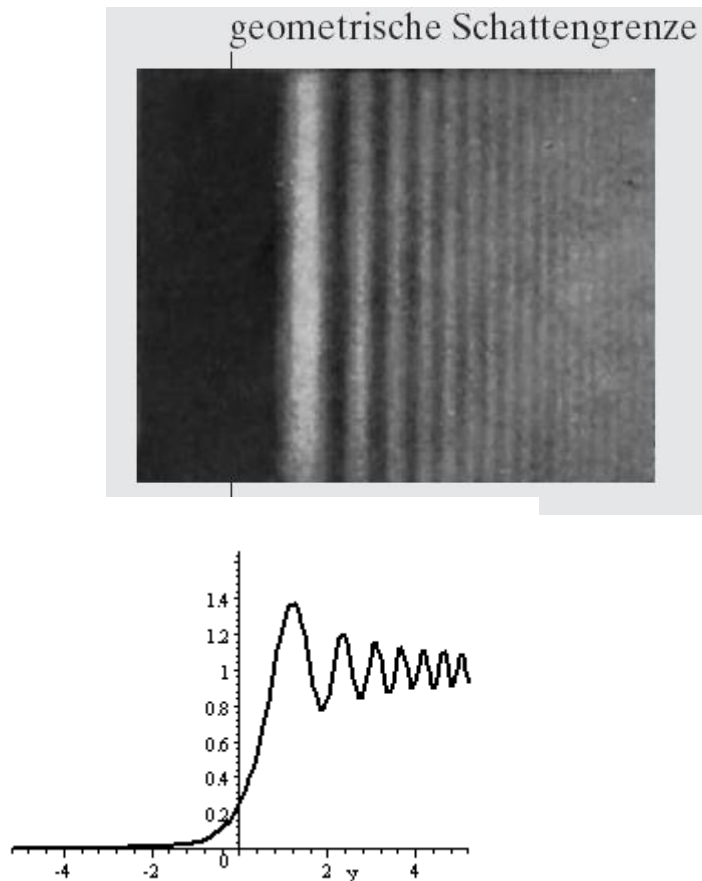
$$U_P = C \int_S e^{ikr} dS$$

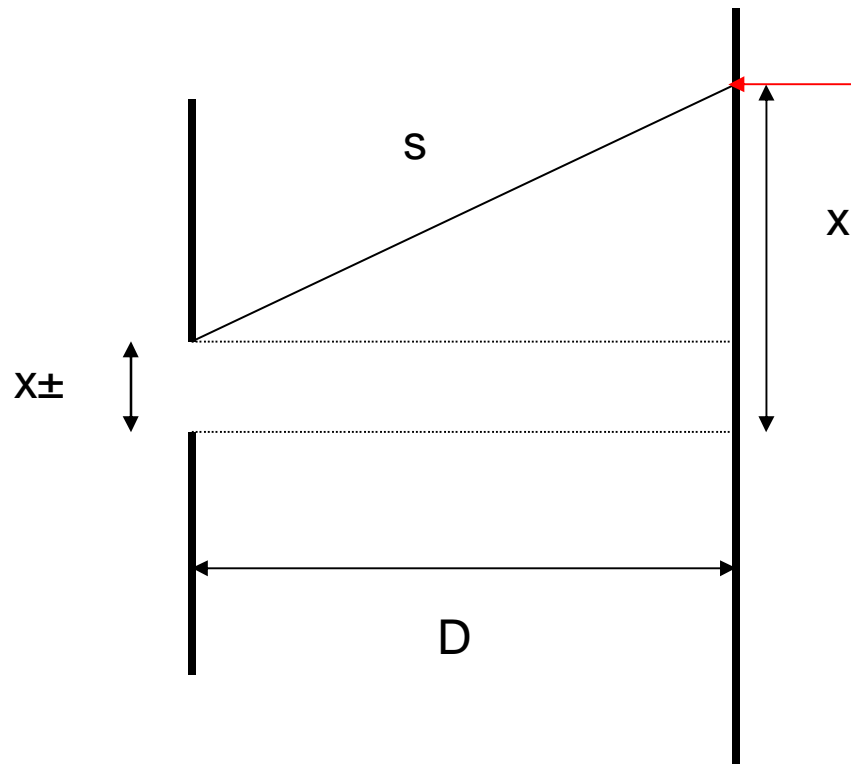
Fouriertransformation

Schirmkoordinate x nicht wichtig für Beugung!

Aus Experiment: Unterschiede Beugung an der Kante $\leftarrow \rightarrow$ Spalt

1. Beugungsmuster unsymm. zur Kante, Streifen auf der Lichtseite
2. Streifen nicht äquidistant
3. In den Minima nie vollständig dunkel
4. Intensität der Maxima nimmt langsamer ab als Nebenmaxima des Spalts





Welle ist phasenverschoben:

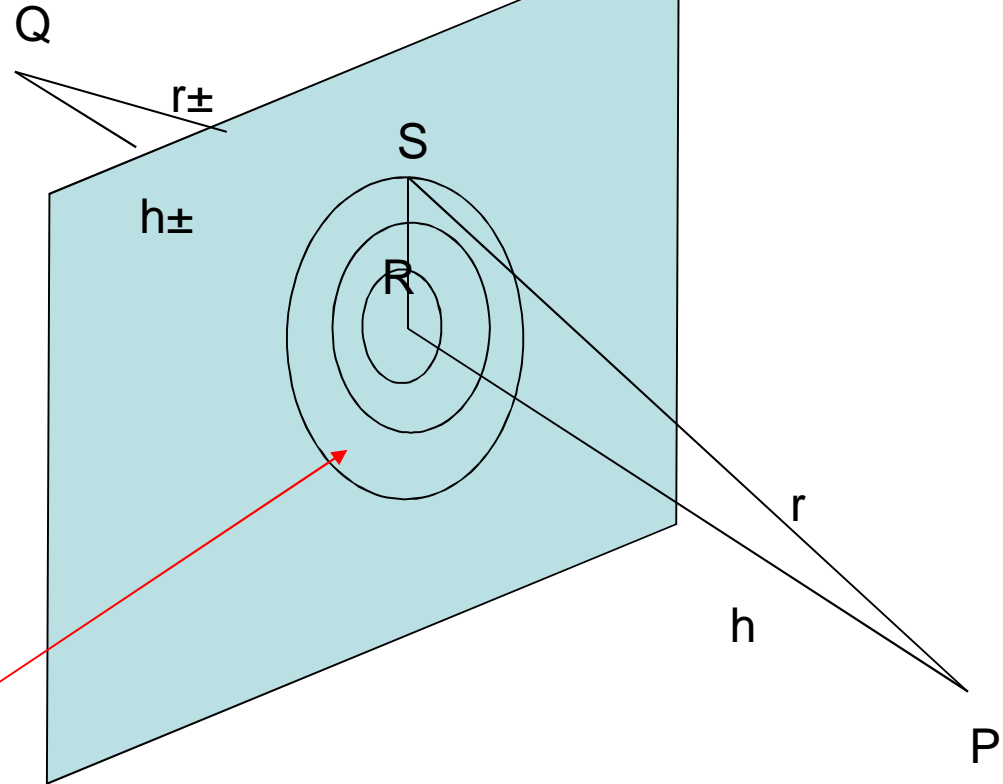
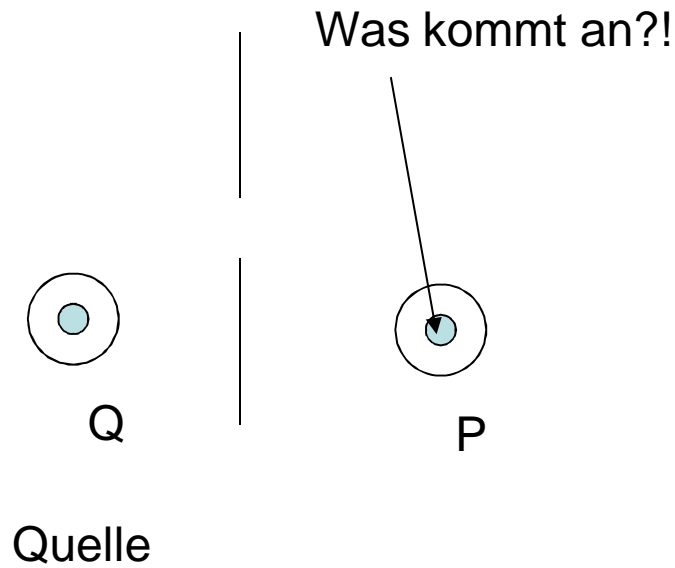
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (s - D)$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} \frac{(x - x')^2}{2D}$$

Hängt bei nicht Fraunhoferscher
Näherung quadratisch
von x_{\pm} ab!

Fresnelsche Beugung

Beispiel:



Festlegung von R_i so,
dass $r+r_{\pm}$ um $\frac{\lambda}{2}$
ändert!

→ Fresnelzonen:

$$R_1 = \sqrt{\lambda \cdot L}, R_2 = \sqrt{2\lambda L}, \dots, R_n = \sqrt{n\lambda L}$$

$$L = \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h'}\right)^{-1} \quad \pi R_{n+1}^2 - \pi R_n^2 = \pi R_1^2$$

Entfernung:

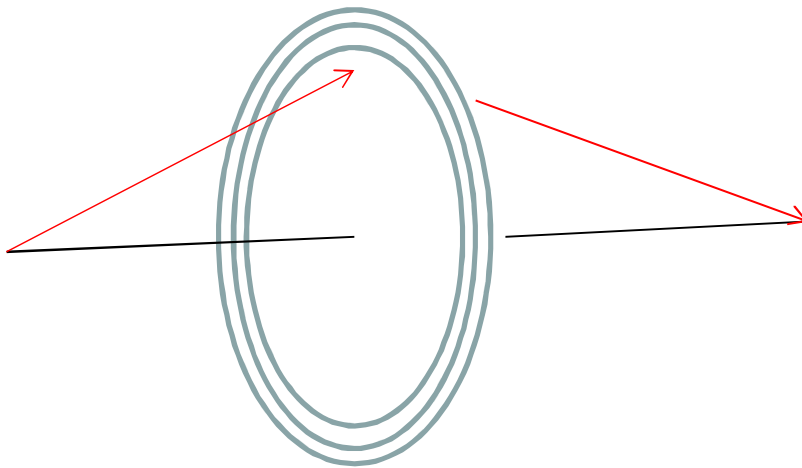
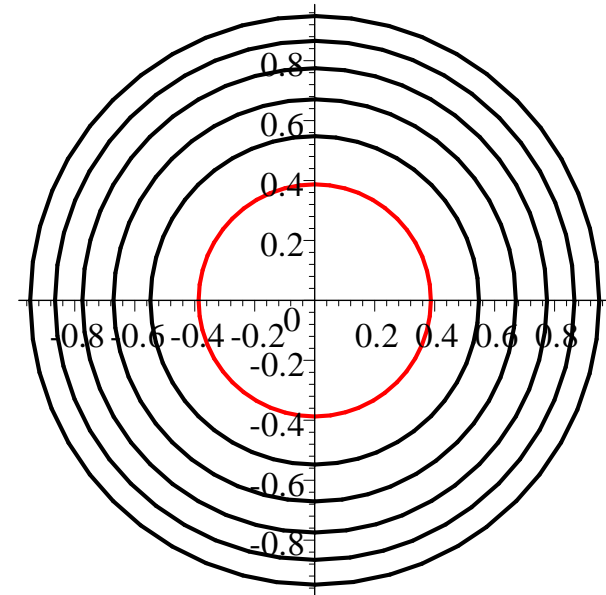
$$\begin{aligned} \overline{QSP} &= \sqrt{h^2 + R^2} + \sqrt{h'^2 + R^2} \\ &= h + h' + \frac{1}{2}R^2\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h'}\right) + \dots \end{aligned}$$

d.h.: unabhängig von n

→ Flächen der Zonen alle gleich

Beispiel: $h = h' = 50cm$ $\lambda = 600nm \rightarrow R_1 = (\lambda L)^{1/2} = 0.4mm$

Fresnelsche Zonenplatte:
Lichtwege durch benachbarte
Zonen: Unterschied



Amplitude bei P: $|U_P| = |U_1| - |U_2| + |U_3| - \dots$

$$\sum_{n=\text{gerade}} = 0 \quad \sum_{n=\text{ungerade}} = |U_1|$$

Zonenplatte: n so gewählt: n=gerade mit $|U_n| = 0 \longrightarrow$

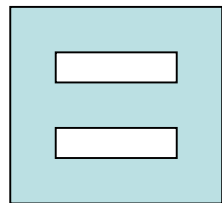
Wirkt wie eine Linse! $|U_P| = |U_1| + |U_3| + |U_5| + \dots$

Denn $|U_P|$
größer als ohne Platte!

Brennweite: $L = \frac{R_1^2}{\lambda} = \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} \right)^{-1}$

Wie Linsengleichung

Babinet'sche Prinzip:



Apertur 2



Apertur 1

1 komplementär zu 2

Gesamtamplitude

$$U_P = U_{1P} + U_{2P}$$

Amplitude hinter 1
am Punkt P

Amplitude hinter 2
am Punkt P

Ist $|U_P| = 0$

$$U_{1P} = -U_{2P}$$

Aber 180° außer Phase

Fresnelbeugung:
Weitere Geometrien

Hier Rechteck

$$r + r' = h + h' + \frac{1}{2L}(x^2 + y^2)$$

Mit derselben Näherung
wie bei der Zonenplatte

$$U_p = C \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} e^{\frac{ik(x^2+y^2)}{2L}} dx dy$$

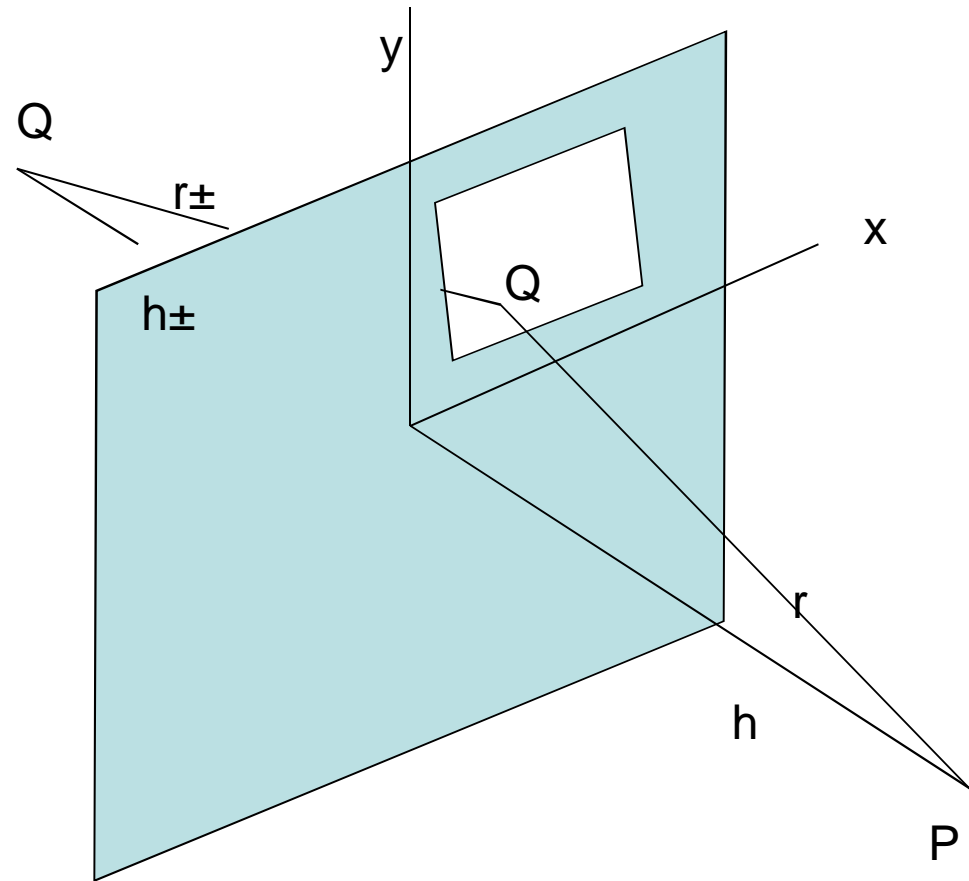
$$= C \int_{x_1}^{x_2} e^{\frac{ikx^2}{2L}} \int_{y_1}^{y_2} e^{\frac{iky^2}{2L}} dx dy$$

Enthält alle anderen Faktoren

$$u = x \sqrt{\frac{k}{\pi L}} \quad u = x \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$$

$$v = y \sqrt{\frac{k}{\pi L}} \quad v = y \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$$

oder



Umschreibung der Integrale:

$$U_p = U_1 \int_{u_1}^{u_2} e^{i\pi \frac{u^2}{2}} du \int_{v_1}^{v_2} e^{i\pi \frac{v^2}{2}} dv$$

$$\int_0^s e^{i\pi \frac{w^2}{2}} dw = C(s) + iS(s)$$

$$C(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\pi w^2}{2}\right) dw \quad S(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{\pi w^2}{2}\right) dw \quad C(\infty) = S(\infty) = 1/2$$

$$C(-\infty) = S(-\infty) = -1/2$$

Fresnel-Integrale

$$s_2 - s_1 = u_2 - u_1 = (x_2 - x_1) \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$$

$$s_2 - s_1 = v_2 - v_1 = (y_2 - y_1) \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$$

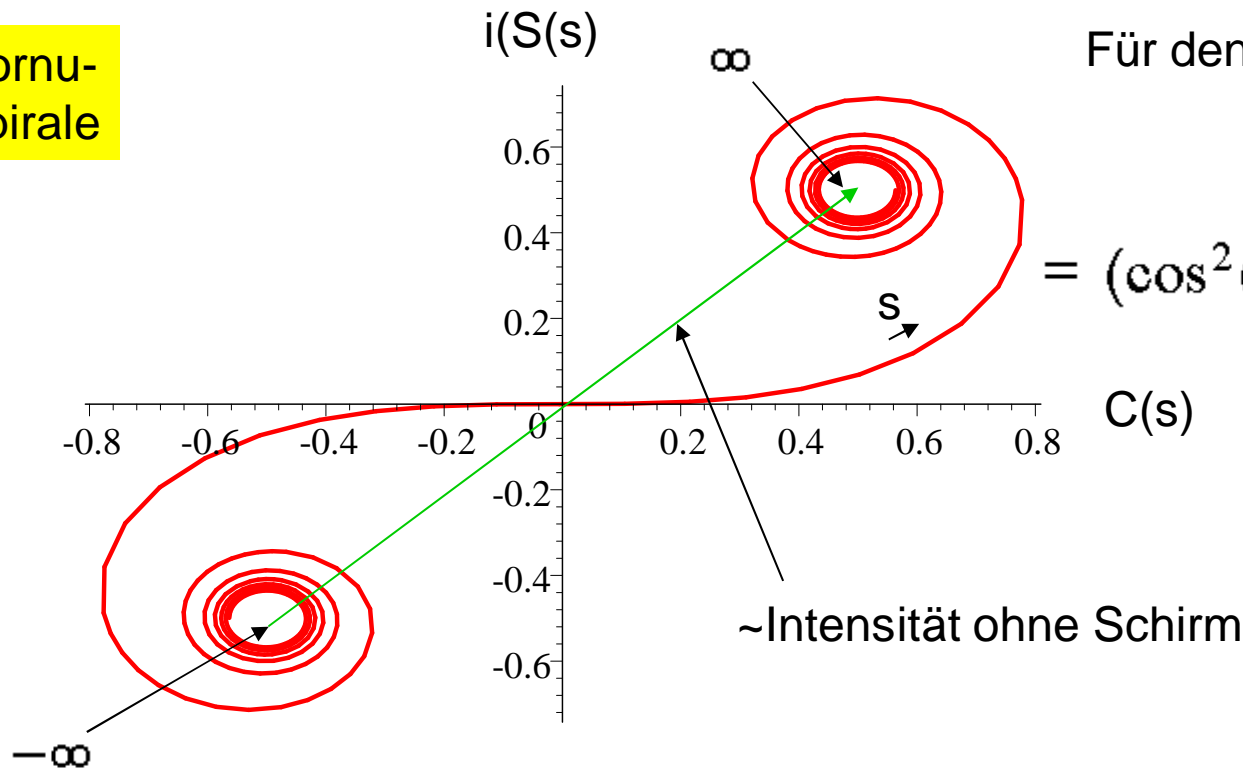
Für den jeweils 1-dim. Fall

$$ds^2 = dC^2 + dS^2$$

$$= \left(\cos^2\left(\frac{\pi w^2}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi w^2}{2}\right) \right) dw$$

$$ds = dw$$

Cornu-Spirale

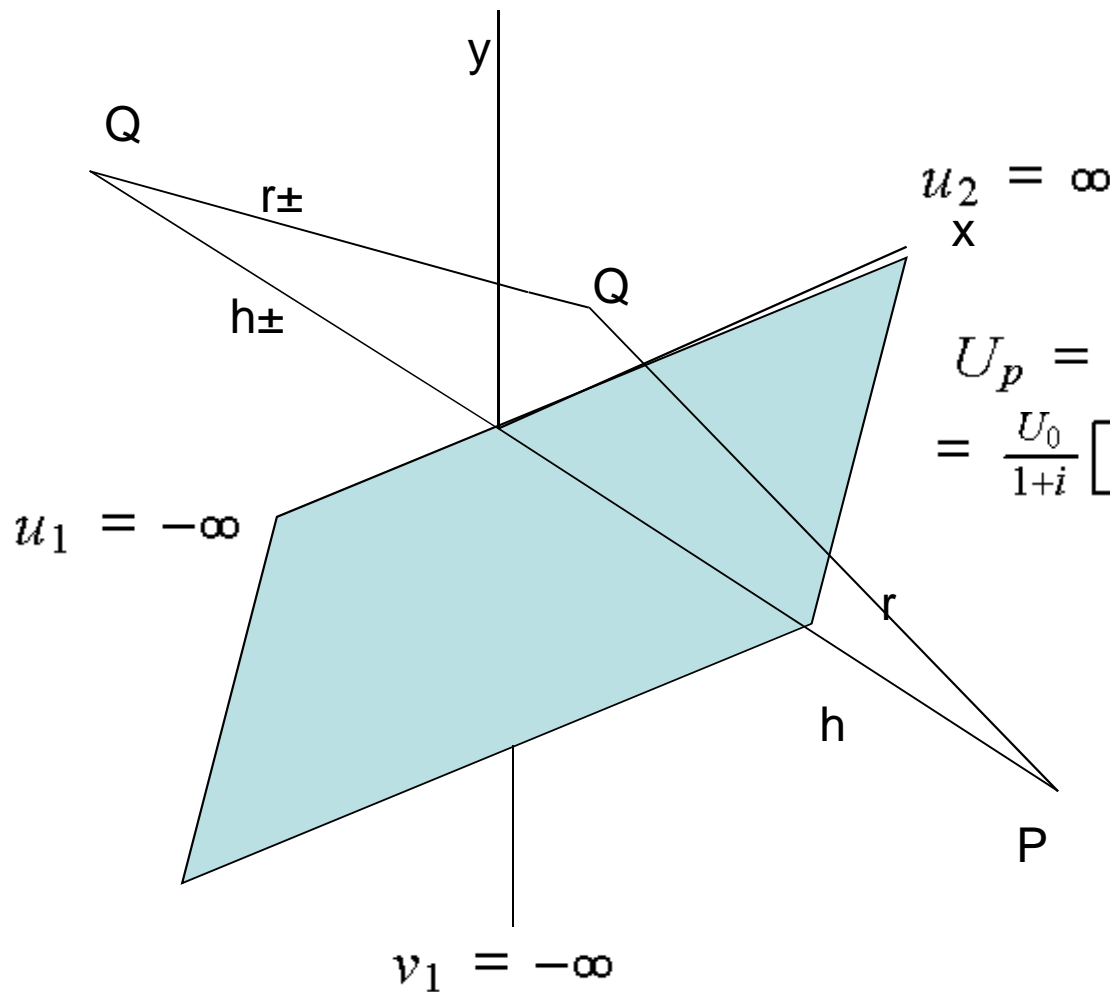


$$U_P = \frac{U_0}{(1+i)^2} [C(u) + iS(u)]_{u_1}^{u_2} [C(v) + iS(v)]_{v_1}^{v_2}$$

Intensität bei P

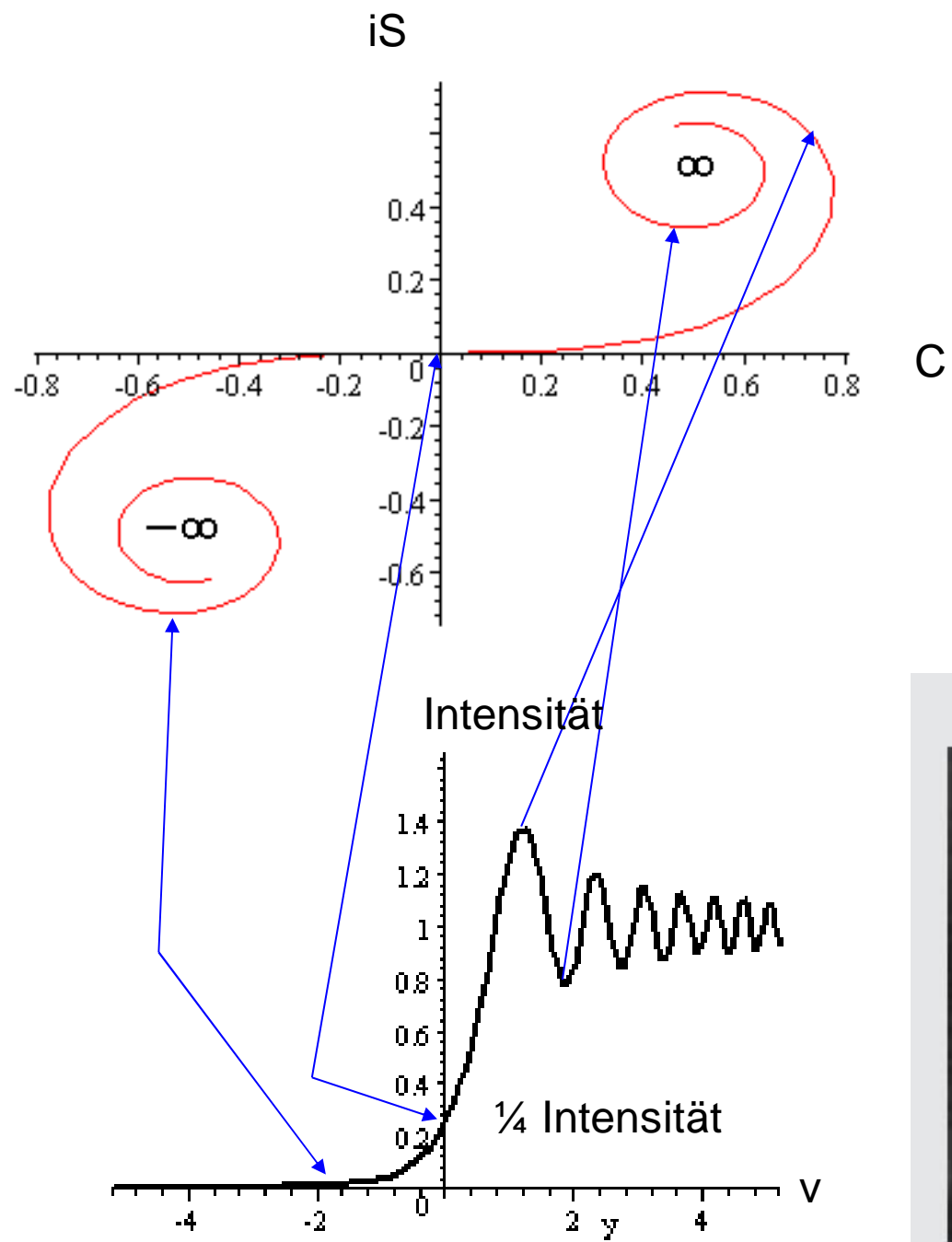
$$U_P = \frac{U_0}{(1+i)^2} [C(u) + iS(u)]_{u_1}^{u_2} [C(v) + iS(v)]_{v_1}^{v_2}$$

Beispiel für Kante:

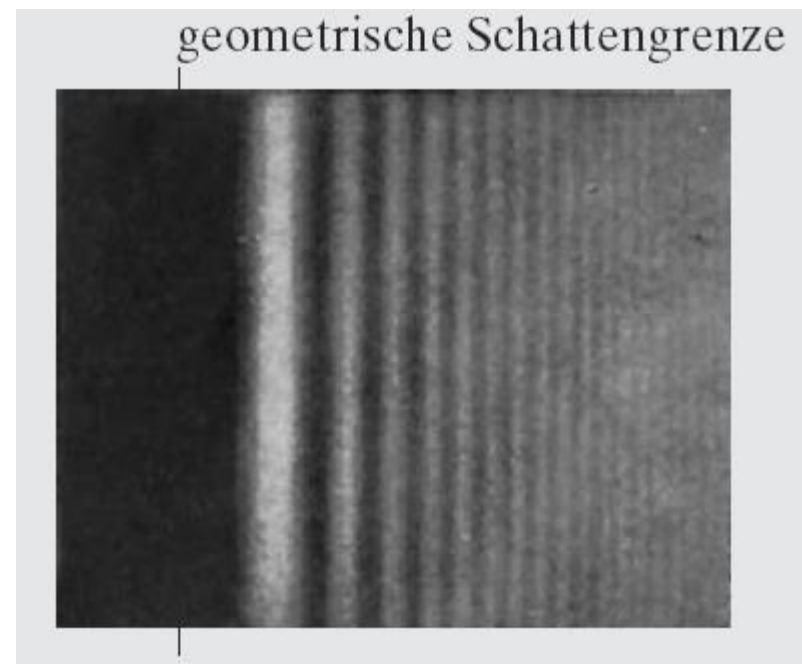


$$U_P = \frac{U_0}{1+i} [C(v) + iS(v)]_{v_2}^{\infty}$$

$$= \frac{U_0}{1+i} \left[-C(v_2) - iS(v_2) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right]$$



C

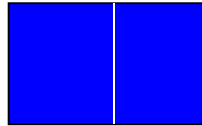
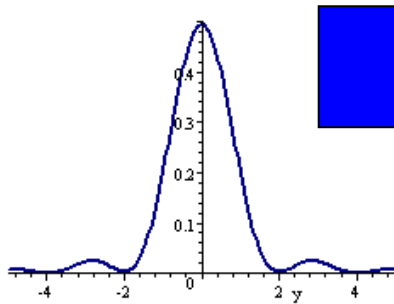


Weitere Beispiele:

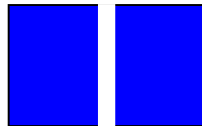
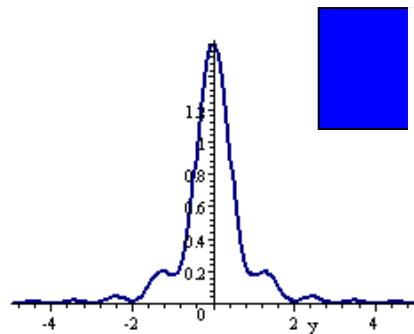
Bedingung für Fraunhofer- Beugung

$$\frac{x'^2}{2D} \ll \lambda$$

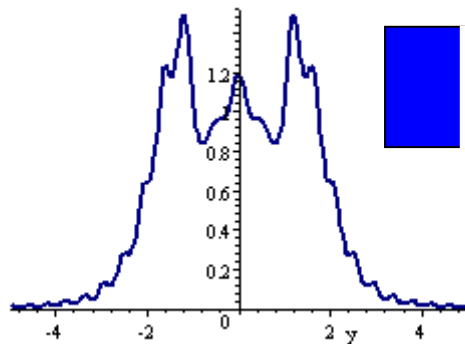
1. Spalt



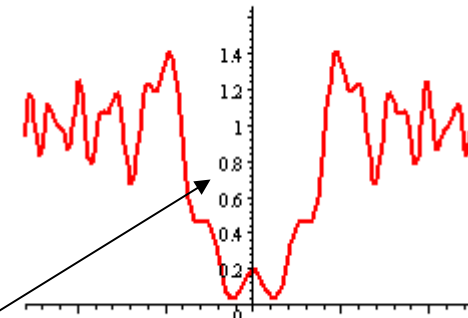
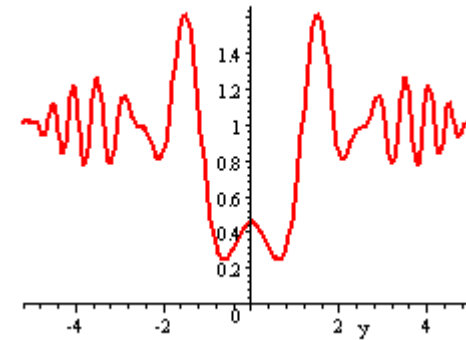
Kleine Spaltöffnung



Übergang zu Fresnel



2. Balken



Schatten

