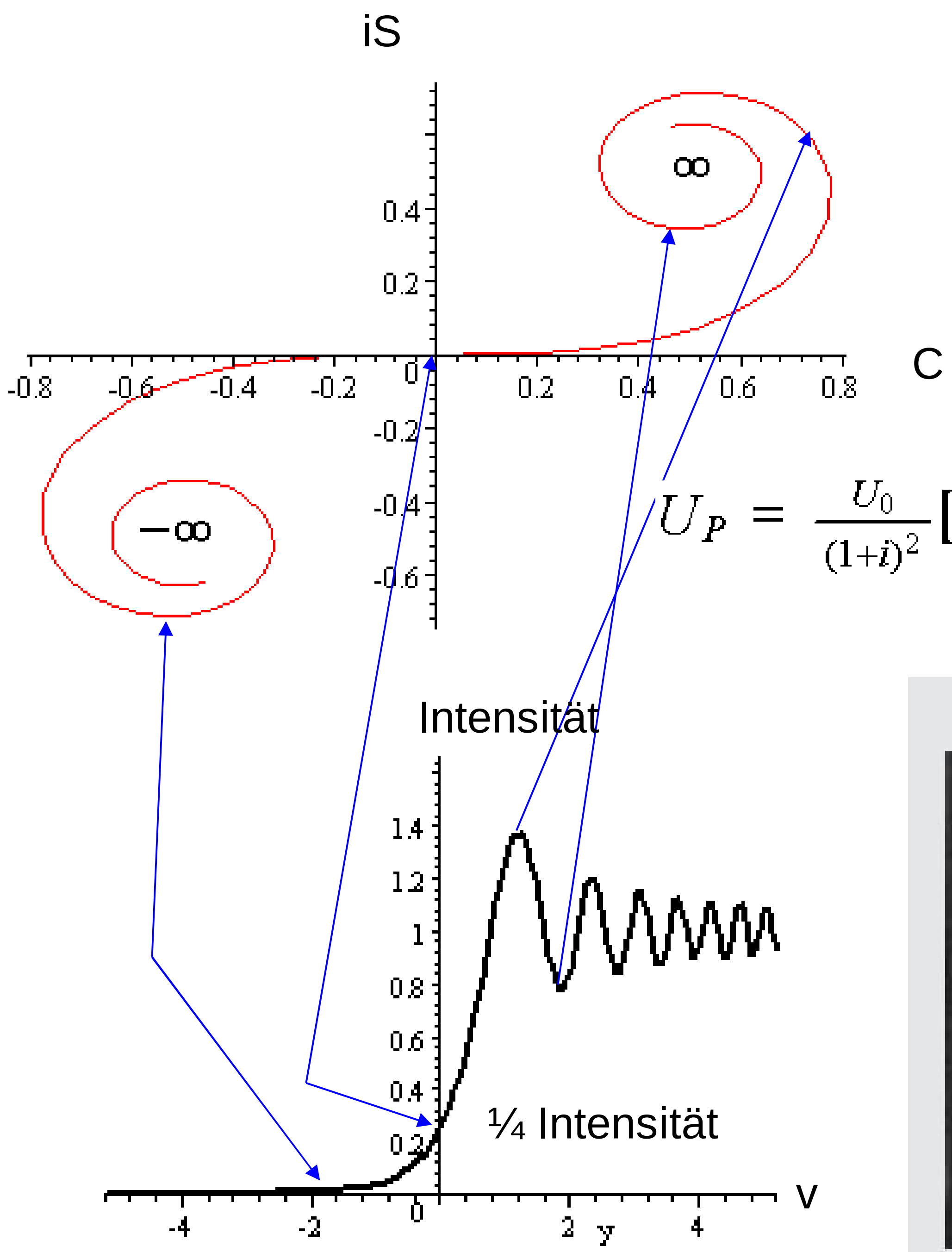
$$U_p = C\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} e^{\frac{ik(x^2+y^2)}{2L}}\,dx\,dy$$

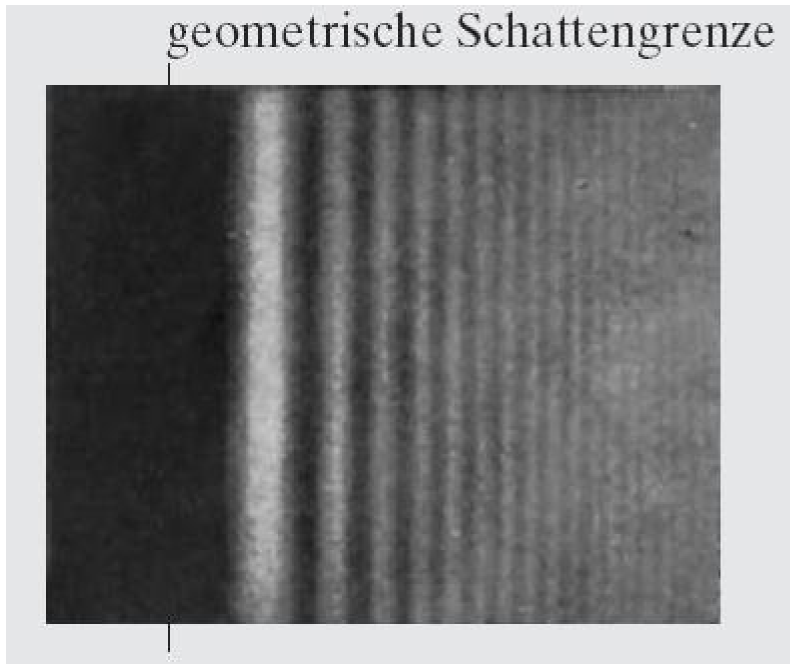
$$\int_0^s e^{i\pi\frac{w^2}{2}}\,dw = C(s) + iS(s)$$

$$C(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\pi w^2}{2}\right)dw$$

$$S(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{\pi w^2}{2}\right)dw$$

$$U_P = \frac{U_0}{(1+i)^2}\left[C(u) + iS(u)\right]_{u_1}^{u_2}\left[C(v) + iS(v)\right]_{v_1}^{v_2}$$



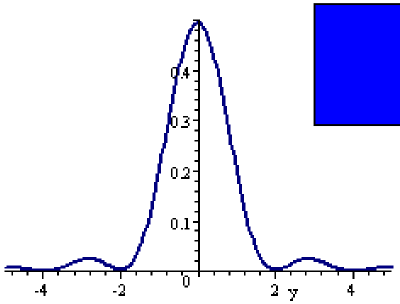


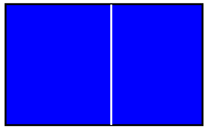
Weitere Beispiele:

Zur Erinnerung:

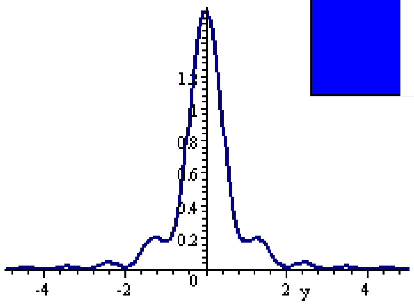
Bedingung für Fraunhofer- Beugung $\frac{x'^2}{2D} \ll \lambda$

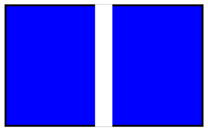
1. Spalt



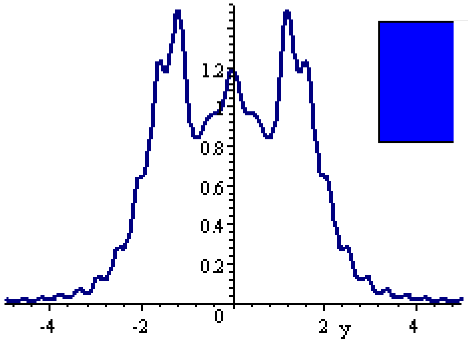


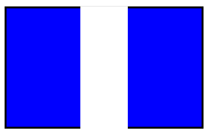
Kleine Spaltöffnung



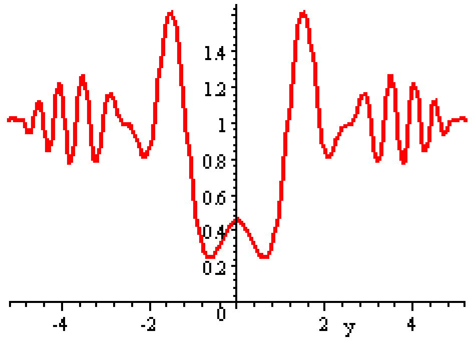


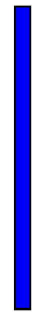
Übergang zu Fresnel

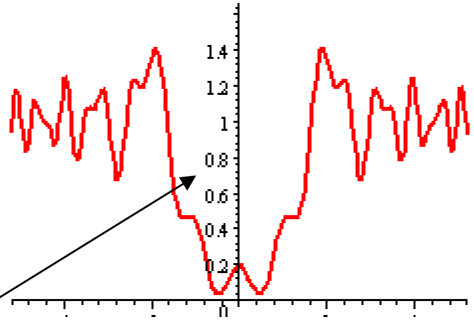


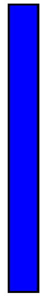


2. Balken

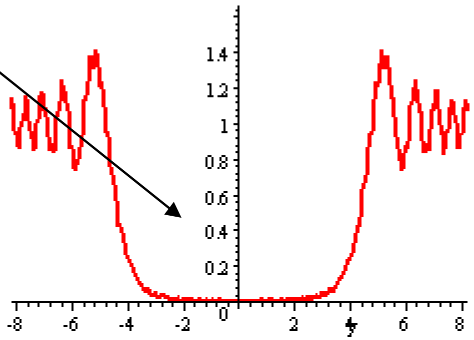


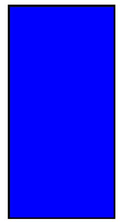




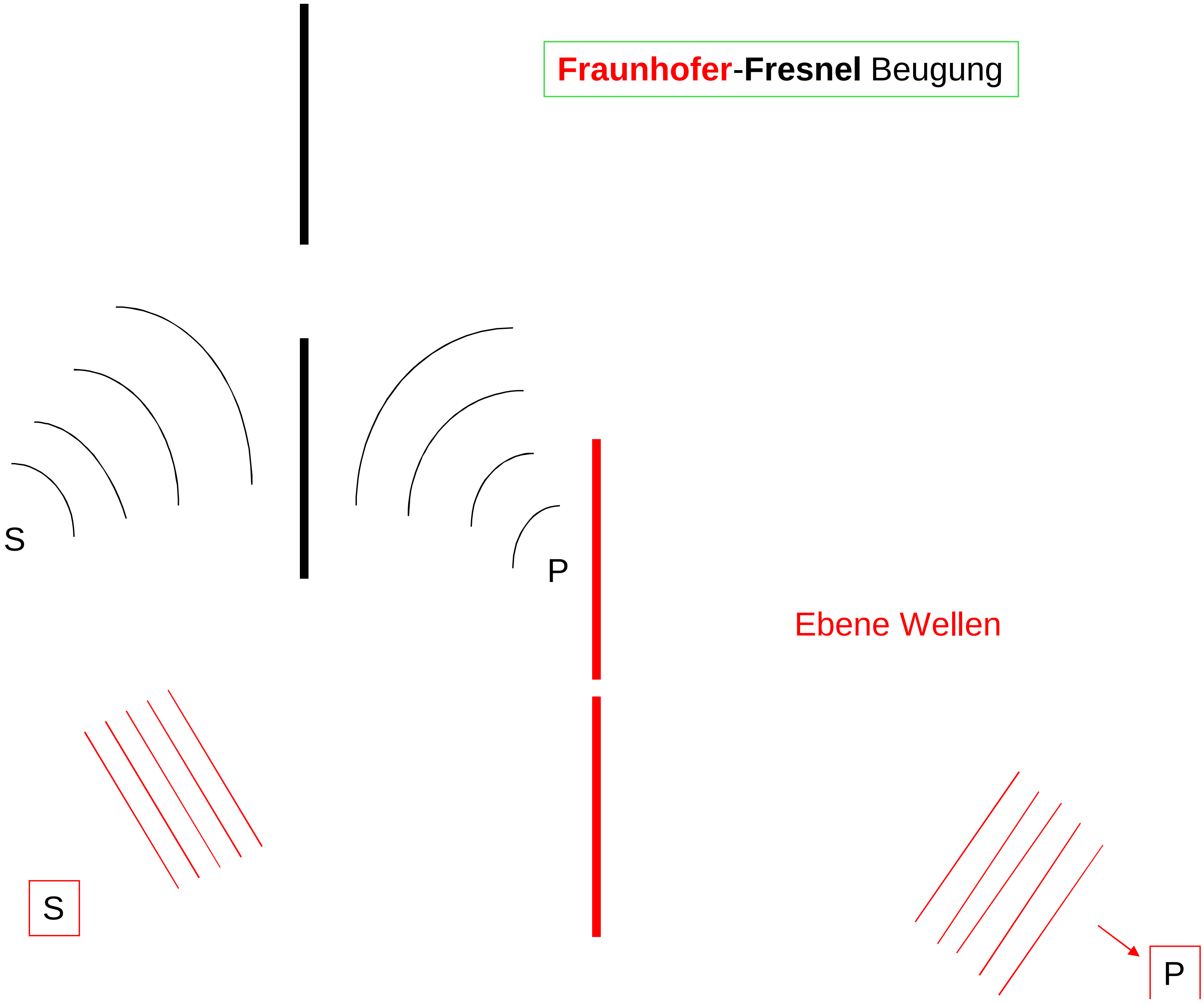


Schatten

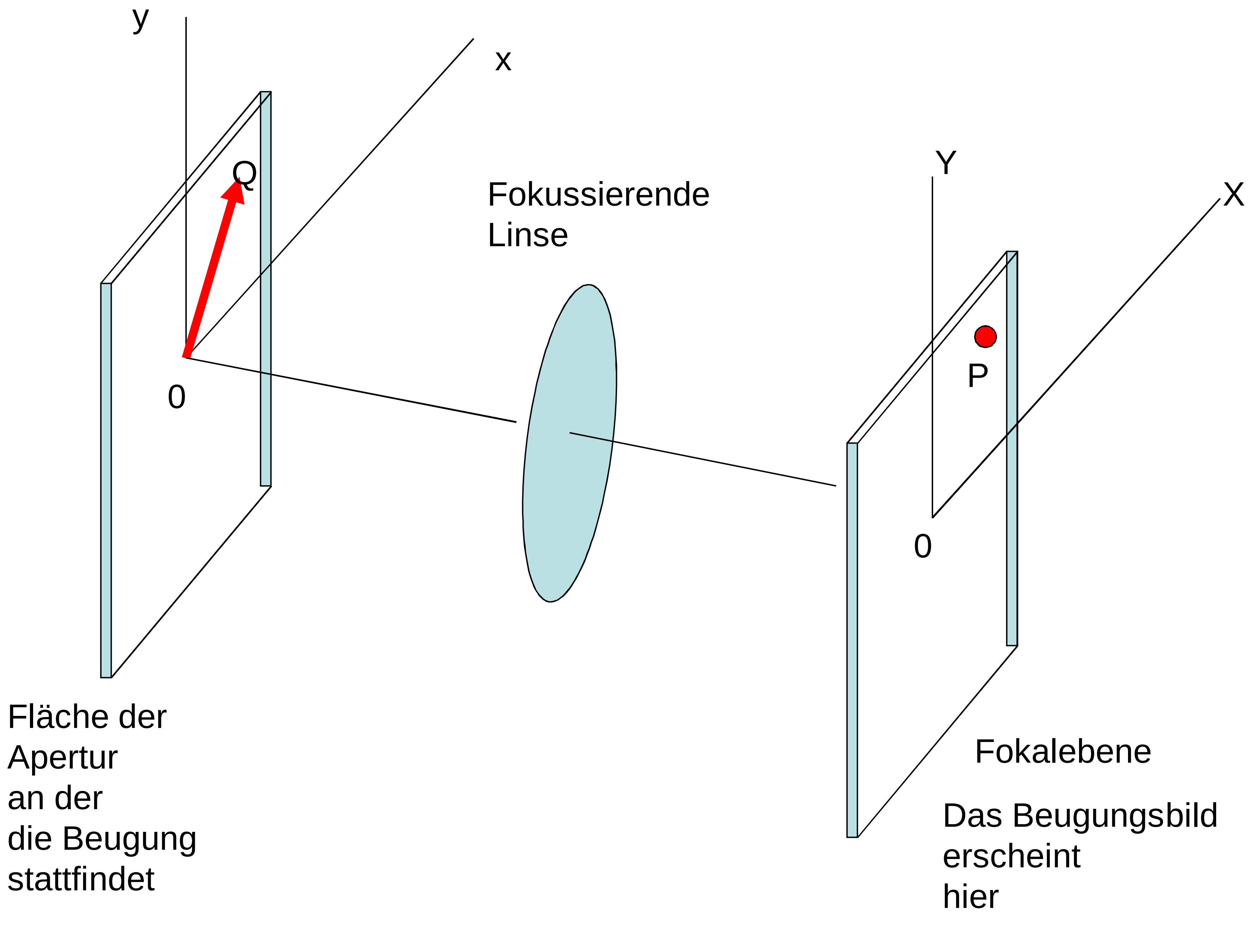


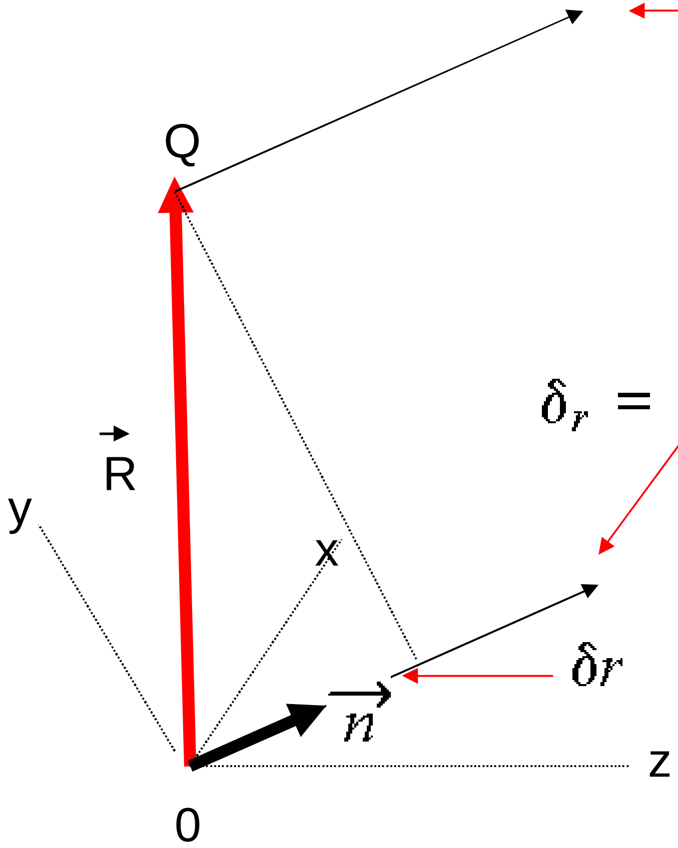


Fraunhofer-Fresnel Beugung



Fouriertransformation und Beugung





Paralle Strahlen werden
in P fokussiert

$$\vec{R} = \vec{e_x} \bullet x + \vec{e_y} \bullet y$$

$$\vec{n} = \vec{e_x} \bullet \alpha + \vec{e_y} \bullet \beta + \vec{e_z} \bullet \gamma$$

$$\delta_r = \vec{R} \bullet \vec{n} = x \bullet \alpha + y \bullet \beta = x\frac{X}{L} + y\frac{Y}{L}$$

Näherungen:

$\gamma \approx 1$ d.h. achsennah

$\alpha \approx \tan\alpha \rightarrow X \approx L \bullet \alpha$

$\beta \approx \tan\beta \rightarrow Y \approx L \bullet \beta$

Kirchhoff: C=1

$$U(X,Y) = \iint e^{ik\delta_r}\,dxdy = \iint e^{ik(x\frac{X}{L}+y\frac{Y}{L})}\,dxdy$$

Das ist für uniforme Apertur!

Für nicht uniforme Aperturen:

$$U(x,y) = \iint g(x,y)\,e^{ik(x\frac{X}{L}+y\frac{Y}{L})}\,dxdy$$

$g(x,y)dxdy$ Modulation im Flächenelement!

Führt man als Abkürzung ein:

$$\mu = \frac{kX}{L}$$

$$\nu = \frac{kY}{L}$$

Räumliche Frequenzen in x und y -Richtung

$$U(\varepsilon,з)=\iint g(x,y)\exp(ik(x\varepsilon+yз))dxdy$$

$\boxed{\text{2-dim. Fouriertransformation}}$

Wichtige Beziehungen zwischen Fourie r-Paaren f(x)<---> F(y)

Seien $F(y), G(y)$ die Fouriertransformierten von $f(x), g(x)$

$$(\Delta x)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x-x_0)^2 \,|f(x)|^2 \, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx}$$

$$(\Delta y)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (y-y_0)^2 \,|F(y)|^2 \, dy}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(y)|^2 \, dy}$$

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta y \geq \frac{1}{2}}$$

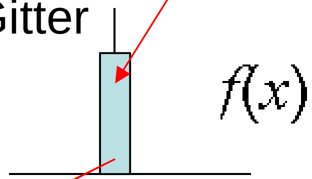
Unschärferelation

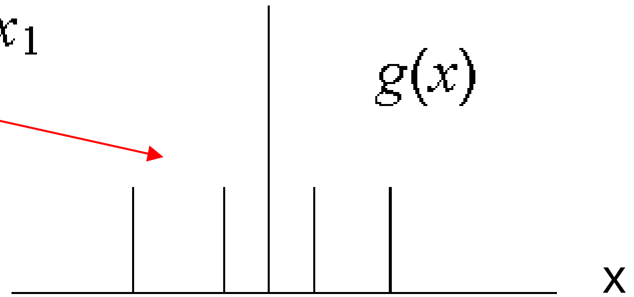
Faltungs- und Multiplikationstheorem

Faltung

$$\{\overbrace{f(x) \circledast g(x)}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)\, g(x - x_1)\, dx_1$$

z.B.: Gitter mit Spalt





$$\mathcal{F}((\text{Heaviside}(0.2 - x)\,\text{Heaviside}(0.2 + x))) = -1.0i\,\frac{-1.0\exp(-0.2iw)+\exp(0.2iw)}{w}$$

$$\mathcal{F}\left(\sum_{-2}^{1}\left(\text{Dirac}\left(x - \frac{1}{2} - n\right)\right)\right) = e^{\frac{3}{2}iw} + e^{\frac{1}{2}iw} + e^{-\frac{1}{2}iw} + e^{-\frac{3}{2}iw}$$

Weiter gilt: Multiplikationstheorem

w=y

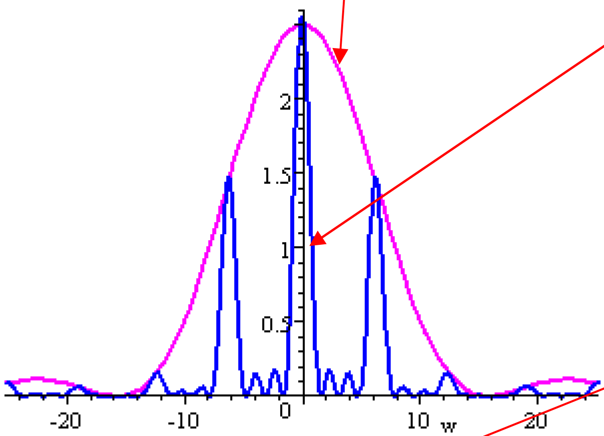
$$\{f(x) \circledast g(x)\} \Leftrightarrow F(y)G(y)$$

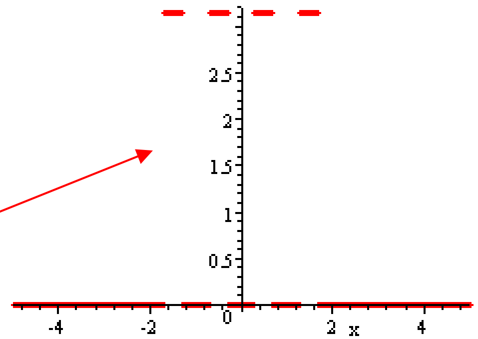
Rücktransformation

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\left(-1.0i\,\frac{-1.0\exp(-0.2iw)+\exp(0.2iw)}{w}\right)\left(e^{\frac{3}{2}iw} + e^{\frac{1}{2}iw} + e^{-\frac{1}{2}iw} + e^{-\frac{3}{2}iw}\right)\right)$$

$$\left(\left(-1.0i\,\frac{-1.0\exp(-0.2iw)+\exp(0.2iw)}{w}\right)\left(e^{\frac{3}{2}iw}+e^{\frac{1}{2}iw}+e^{-\frac{1}{2}iw}+e^{-\frac{3}{2}iw}\right)\right.$$

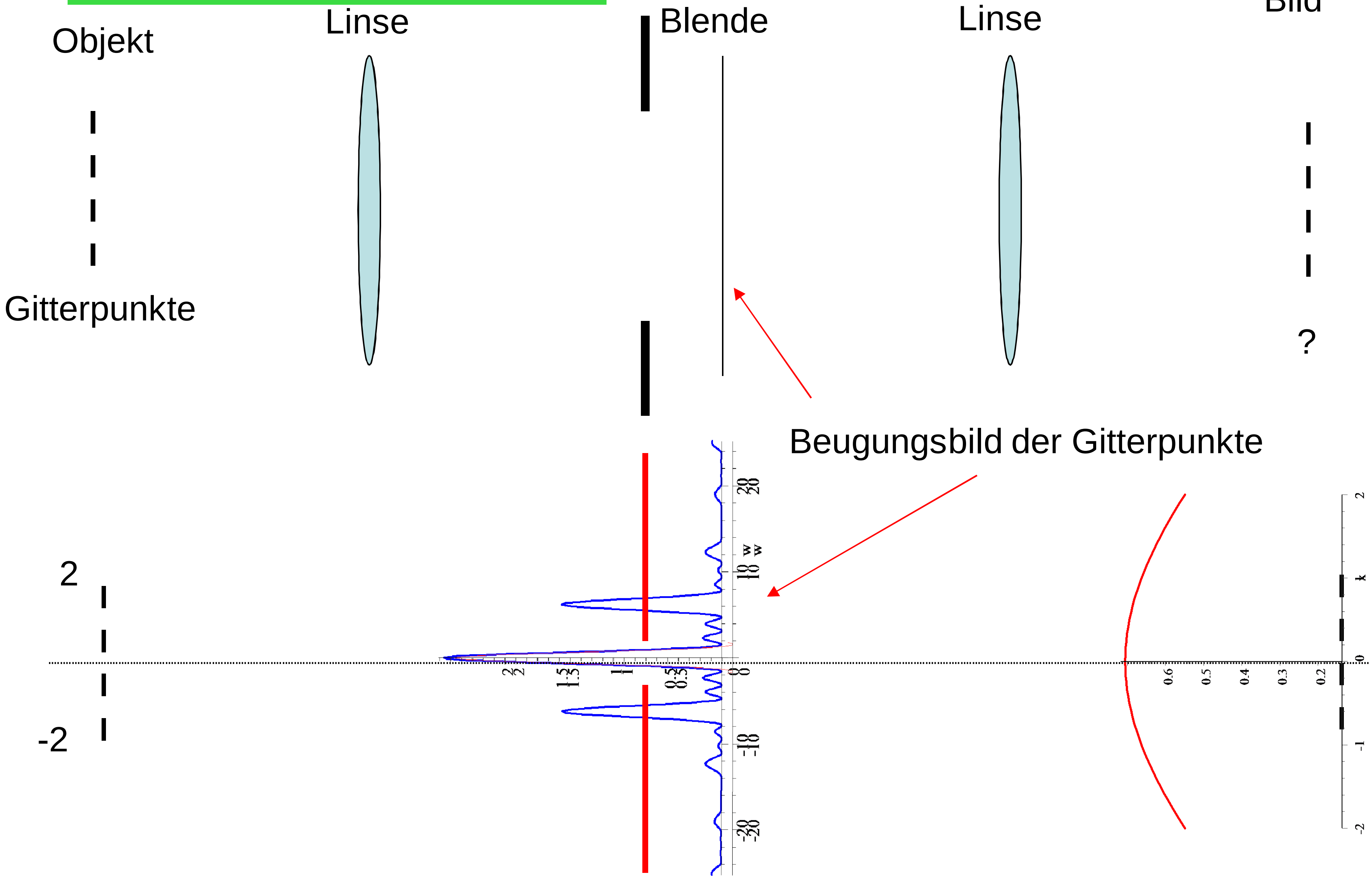
$$\left(\left(\frac{2\cdot\sin(0.2w)}{w}\right)\cdot 2\cdot\left(\cos\left(\frac{3}{2}w\right)+\cos\left(\frac{1}{2}w\right)\right)\right)^2$$





$$\mathcal{F}^{-1}\left(\left(-1.0i\,\frac{-1.0\exp(-0.2iw)+\exp(0.2iw)}{w}\right)\left(e^{\frac{3}{2}iw}+e^{\frac{1}{2}iw}+e^{-\frac{1}{2}iw}+e^{-\frac{3}{2}iw}\right)\right.$$

Abbesche Theorie der Abbildung



Fazit:

Die 0.te Ordnung erscheint in Richtung des durchgehenden Lichts . Sie enthält keine Information über den Gitterabstand.

$\rightarrow$ Es müssen höhere Ordnungen zugelassen werden.

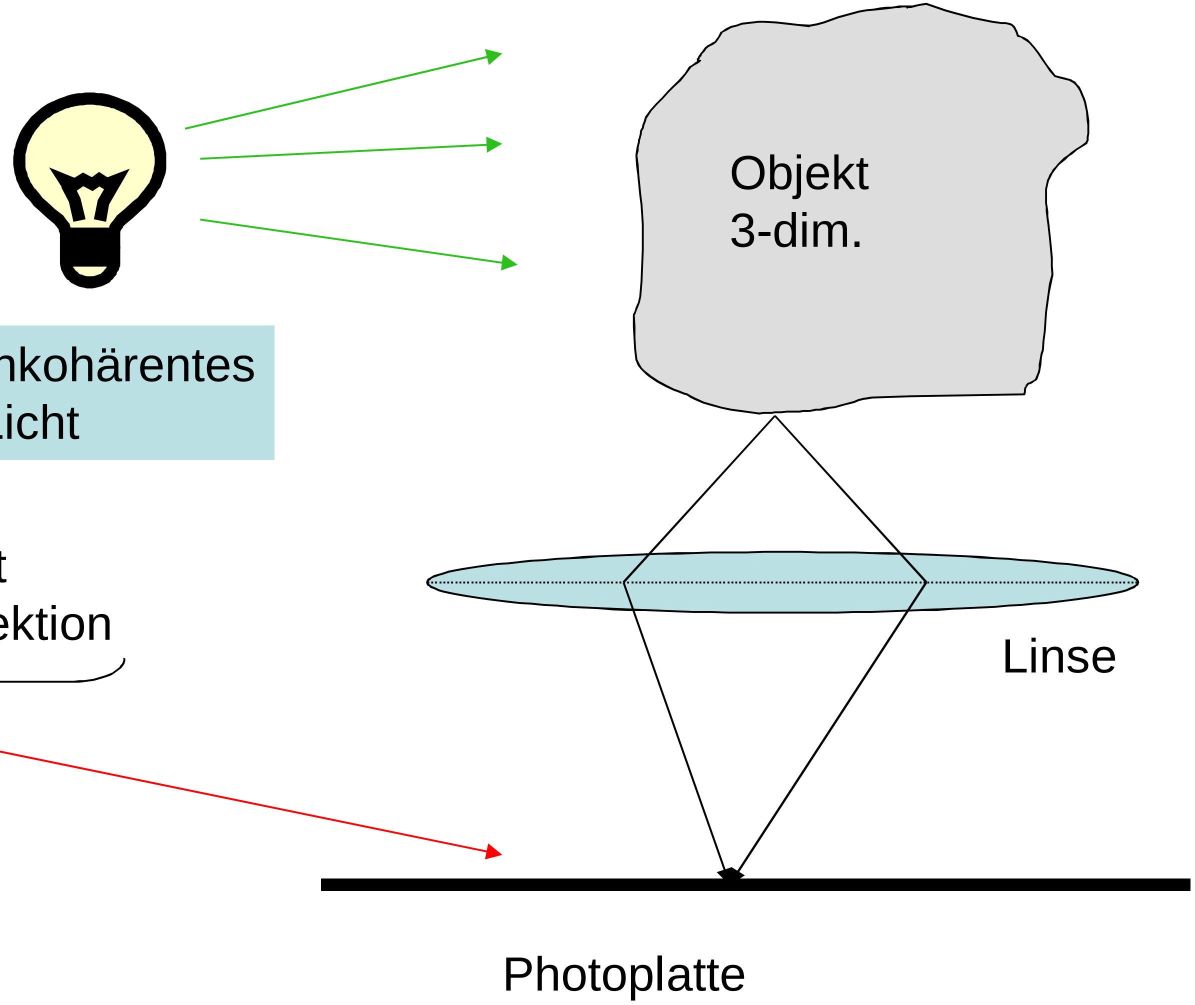
Mit $$n \cdot \lambda = h \cdot \sin\Theta$$

h: Gitterabstand

$\boxed{\text{Abbildung um so schärfer je mehr Beugungsordnungen!}}$

Abbildungen

ĂNormaleñAbbildungen:



Inkohärentes Licht

Dreidimensionales Objekt
→zweidimensionale Projektion

Holographie

Kohärentes Licht

Voraussetzung: Kohärentes Licht

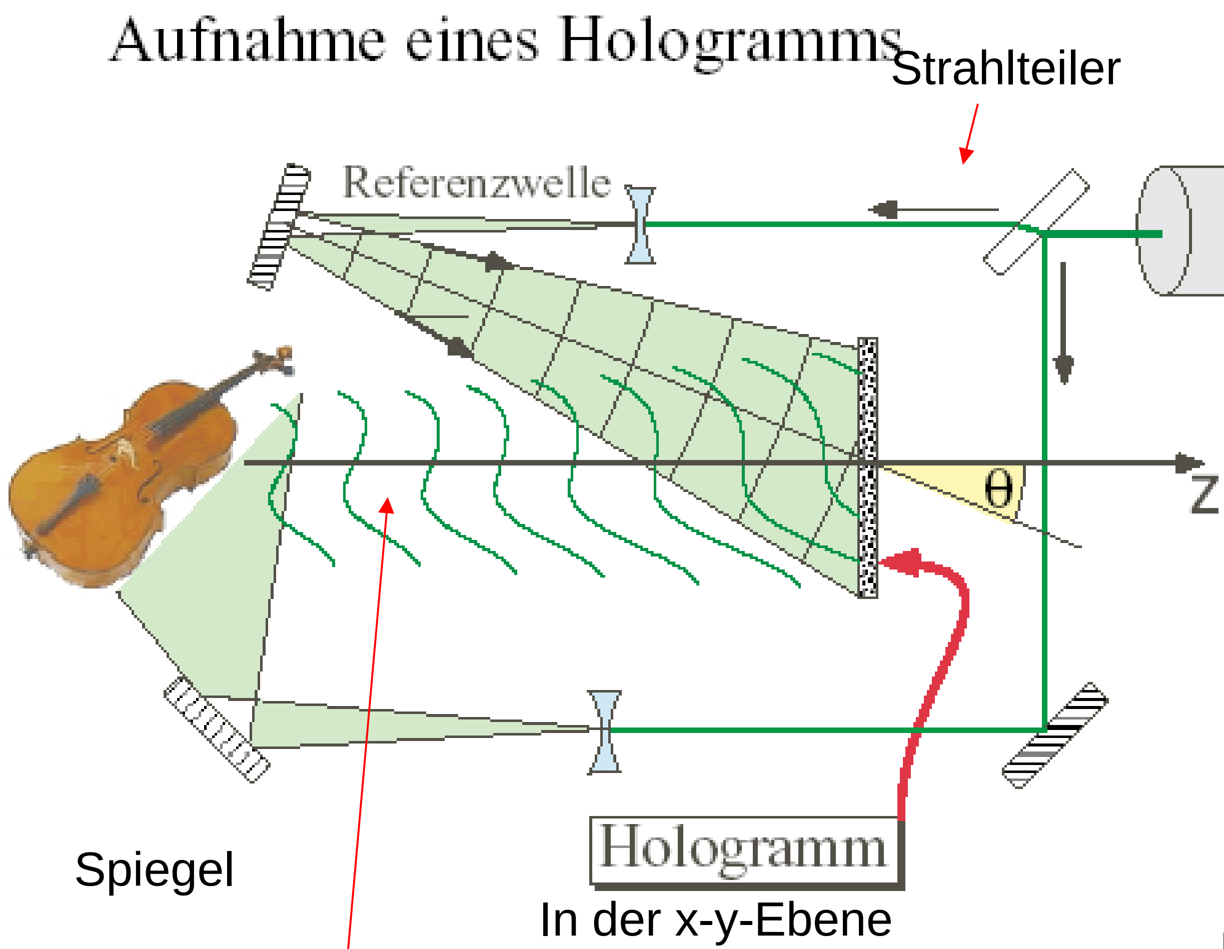


Bild aus:
Aus Meschede,
Optik, Licht und
LASER

Referenzwelle: $\vec{E}_0 = \vec{A}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r})}$ Streulicht: $\vec{E}_0 = \vec{A}_S \cdot e^{i(\omega t + \varphi_S(x,y))}$

Hängt von der Entfernung vom Objekt ab!

Gesamtintensität auf der Photoplatte:

bei $r_0 = \{x, y, 0\}$

$$I(x,y) = c \cdot \varepsilon_0 \ | \ E_s(x,y) + E_0(x,y) \ |^2$$

$$= c \cdot \varepsilon_0 \ | \ A_0^2 + A_S^2 + A_0^* \cdot A_S \cdot e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} + \varphi_S)} + A_0 \cdot A_S^* \cdot e^{-(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} + \varphi_S)} \ |$$

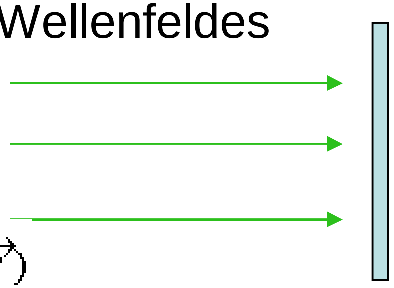
$$= c \cdot \varepsilon_0 \ | \ A_0^2 + A_S^2 + A_0 \cdot A_S \cdot \cos\underbrace{(\varphi_0 + \varphi_S)} \ |$$

Phase bestimmt durch opt. Wegdifferenzen zwischen Referenz- und Streuwelle $\rightarrow$ Informationen über 3 Dimensionen

Rekonstruktion des Wellenfeldes

Rekonstruktionswelle:

$$\vec{E}_r = \vec{A}_r \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}$$



Hologrammschwärzung ~ $I(x,y)$

Transmittierte Amplitude:

$$A_T = T(x,y) \cdot A_r$$

$$A_T = T(x,y) \cdot A_r$$

$$T(x,y) = T_0 - \gamma \cdot I(x,y)$$

Schwärzungskoeffizient
der Photoplatte

Transmission der entwickelten Platte:

$$A_T = A_r \cdot T_0 - \gamma \cdot A_r (A_0 + A_s)^2$$

$$\sim \underbrace{-\gamma \cdot A_r \cdot A_0^* \cdot A_S \cdot e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} + \varphi_S)} \quad \sim -\gamma \cdot A_r \cdot A_0 \cdot A_S^* \cdot e^{-i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} + \varphi_S)}}$$

Neue Wellen:

$$E_{T_1} = -\gamma \cdot A_r \cdot A_0^* \cdot A_S \cdot e^{i(\omega t - (\vec{k}_r - \vec{k}_0) \cdot \vec{r} + \varphi_S)}$$

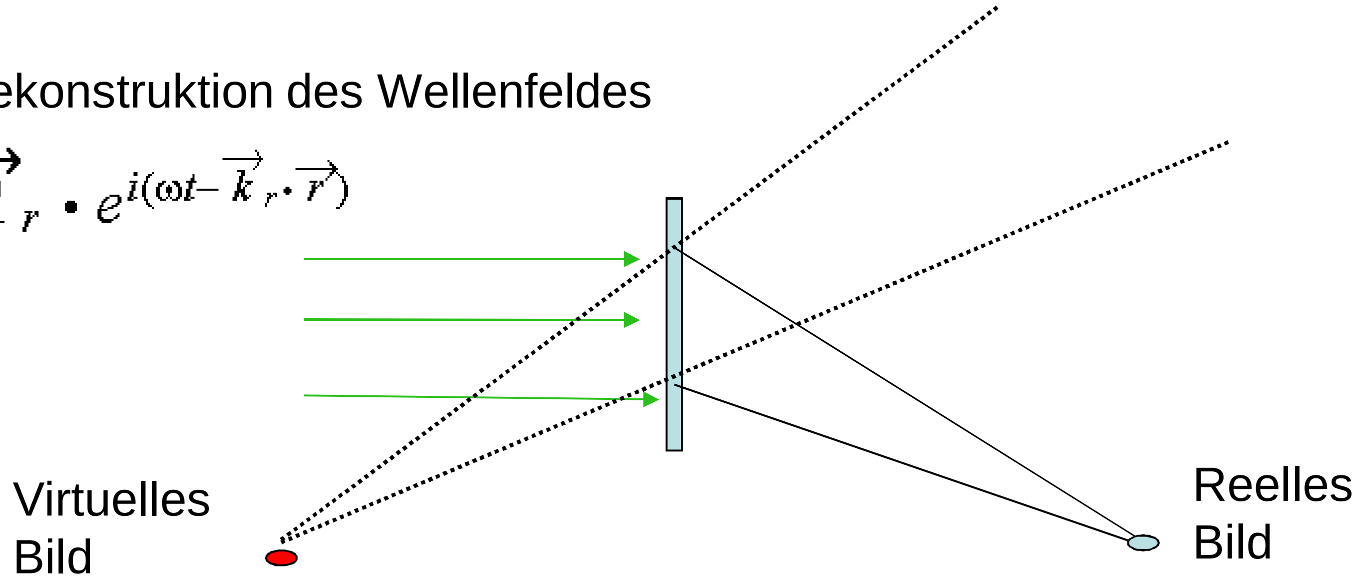
$$E_{T_2} = -\gamma \cdot A_r \cdot A_0^* \cdot A_S^* \cdot e^{i(\omega t - (\vec{k}_r + \vec{k}_0) \cdot \vec{r} - \varphi_S)}$$

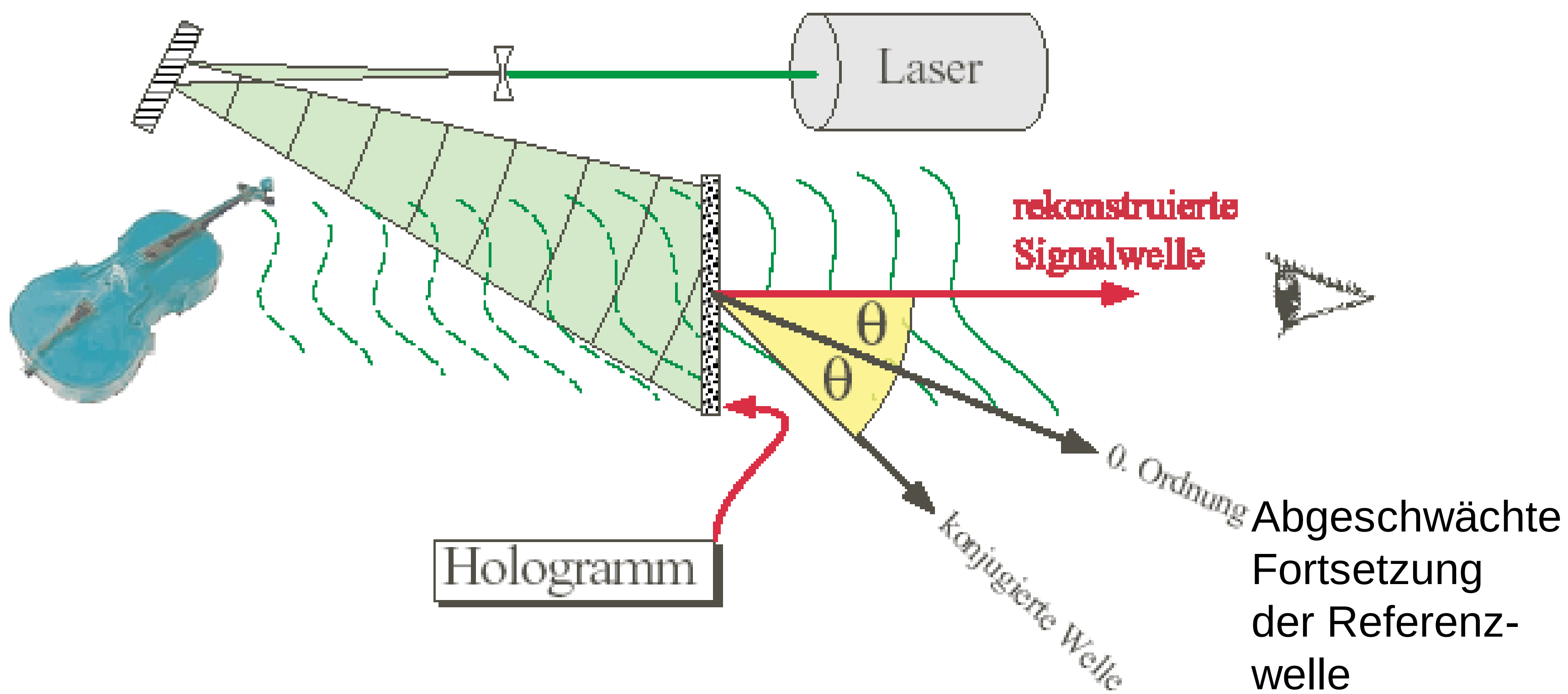
In Richtung: $\vec{k}_1 = \vec{k}_r - \vec{k}_0$ $\quad$ $\vec{k}_1 = \vec{k}_r + \vec{k}_0$

E_{T_1} und E_{T_2} tragen Information über A_S und φ_S

Rekonstruktion des Wellenfeldes

$$\vec{E}_r = \vec{A}_r \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}$$



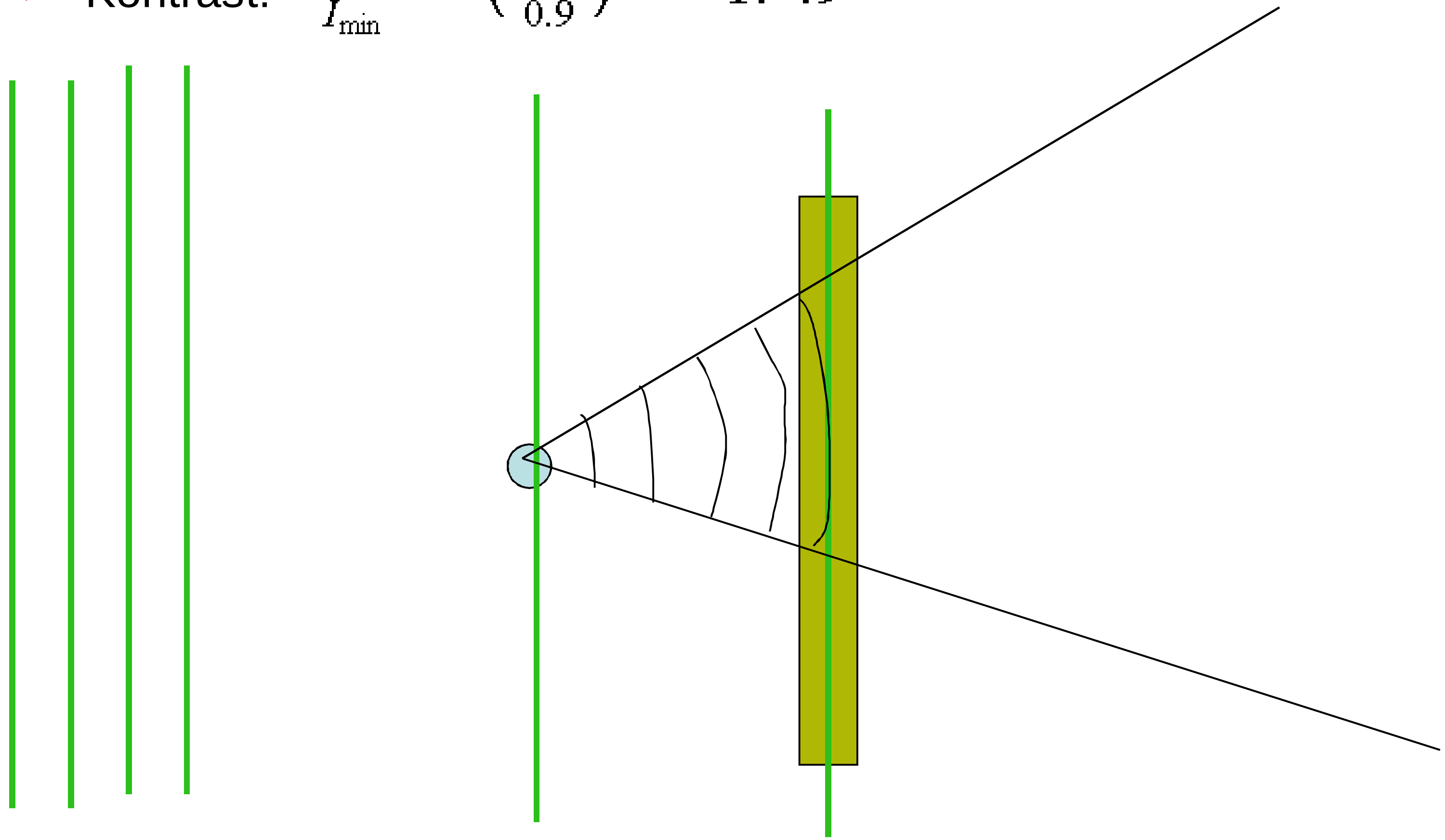


Kontrast:

Die Intensität der Wellen (ref. und streu) muss nicht gleich sein!

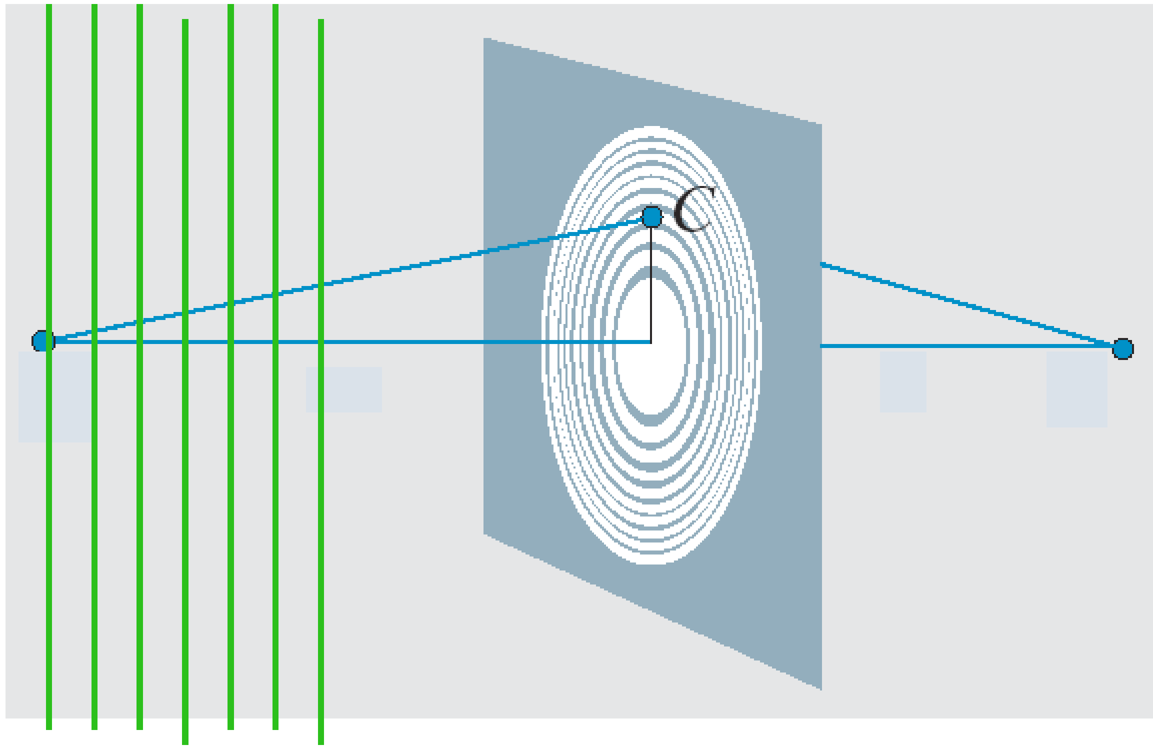
Ann.: Streuwelle $I_{Streu} = 1\% \cdot I_{\mathrm{Ref}} \longrightarrow \dfrac{E_{Streu}}{E_{\mathrm{Ref}}} = 0.1$

$\longrightarrow$ Kontrast: $\dfrac{I_{\max}}{I_{\min}} = \left(\dfrac{1.1}{0.9}\right)^2 = 1.49$



Ref. Welle

Platte geschwärzt wie Fresnel-Zonenplatte



Virtuelles Bild + Reelles Bild