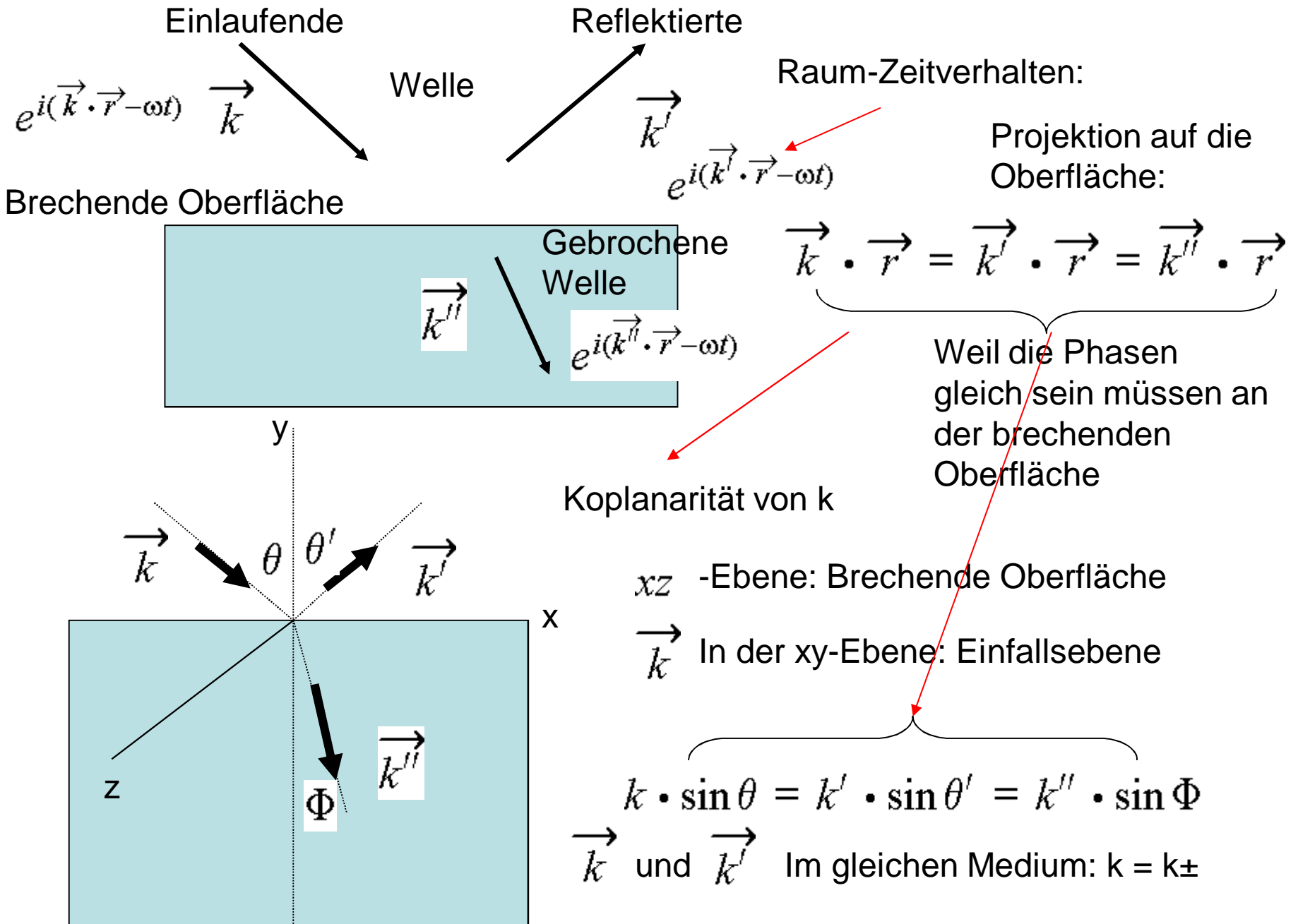


# 1.5 Reflexion und Brechung



$$k \cdot \sin \theta = k' \cdot \sin \theta' = k'' \cdot \sin \Phi$$

$$\frac{k''}{k} = \frac{\frac{\omega}{u''}}{\frac{\omega}{u}} = \frac{\frac{c}{u''}}{\frac{c}{u}} = \frac{n_2}{n_1} = n$$

$$k = k_{\pm} \rightarrow$$

Reflexionsgesetz:

$$\theta = \theta'$$

Relativer Brechungsindex mit  $u, u_{\pm}$ : Geschwindigkeiten

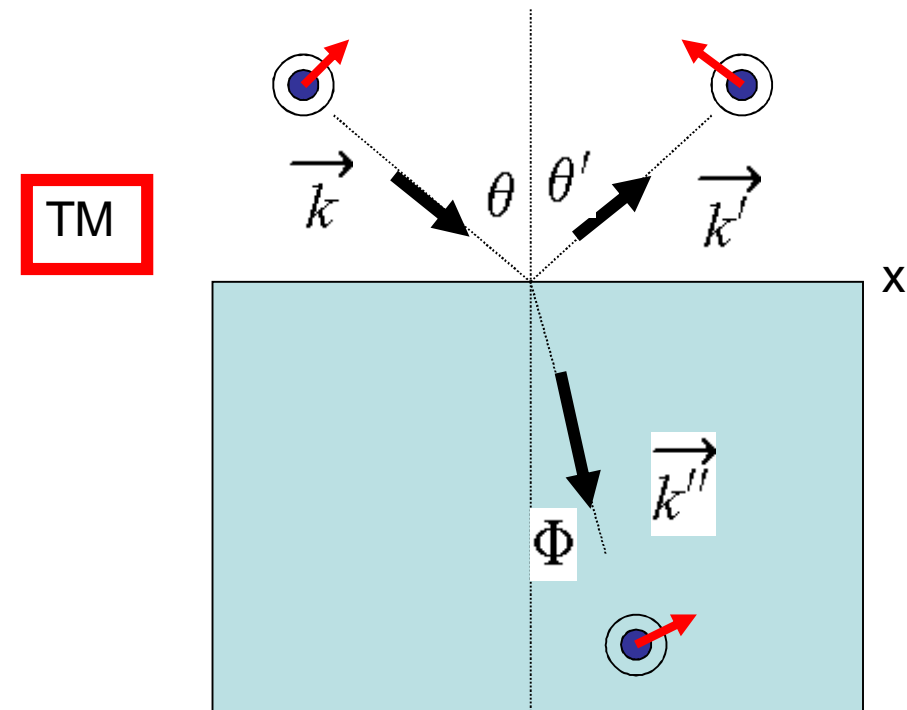
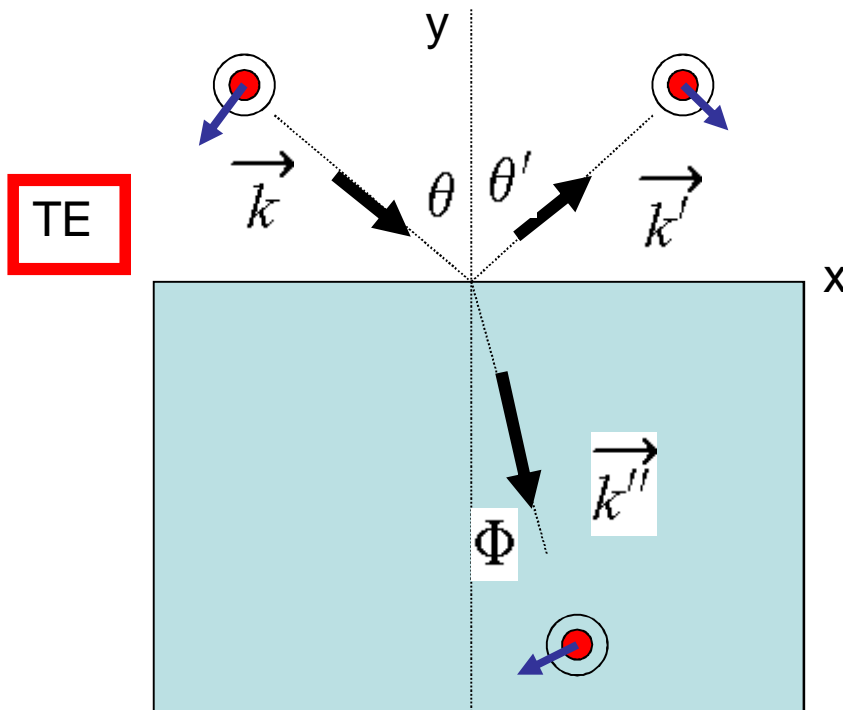
$$\frac{\sin \theta}{\sin \Phi} = n$$

Brechungsgesetz von Snellius

⊙ El. Feldstärke parallel z-Achse

⊙ Magn. Feldstärke parallel z-Achse

Amplituden der reflektierten und gebrochenen Wellen



Zur Erinnerung: Maxwellgleichungen und ebene Wellen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad \vec{\nabla} \rightarrow i \vec{k}$$

Auftreffende	reflektierte	gebrochene	Wellen
$\vec{H} = \frac{1}{\mu \cdot \omega} \vec{k} \times \vec{E}$	$\vec{H}' = \frac{1}{\mu \cdot \omega} \vec{k}' \times \vec{E}'$	$\vec{H}'' = \frac{1}{\mu \cdot \omega} \vec{k}'' \times \vec{E}''$	

$$e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Gemeinsam für E- und H- Felder

xz -Ebene

Zwei Fälle werden separat betrachtet: TE und TM -Polarisation

TE: Einfallender **elektrischer** Feldvektor parallel zur brechenden Oberfläche

TM: **magnetischer**

Randbedingung an Grenzflächen von Dielektrika (Physik II):

Tangentiale Komponenten von E und H kreuzen kontinuierlich diese Fläche

Auf die brechende Oberfläche projiziert:

$$\text{TE: } E + E' = E''$$

$$-H \cos \theta + H' \cos \theta = -H'' \cos \Phi$$

$$-k \cdot E \cdot \cos \theta + k' \cdot E' \cdot \cos \theta = -E'' \cdot \cos \Phi$$

$$\text{TM: } H - H' = H''$$

$$k \cdot E - k' \cdot E' = k'' \cdot E''$$

$$E \cdot \cos \theta + E' \cdot \cos \theta = E'' \cdot \cos \Phi$$

Reflexion und Transmission sind definiert als:

$$r_s = \left[ \frac{E'}{E} \right]_{TE} \quad t_s = \left[ \frac{E''}{E} \right]_{TE} \quad r_p = \left[ \frac{E'}{E} \right]_{TM} \quad t_p = \left[ \frac{E''}{E} \right]_{TM}$$

Elimination von  $E''$  mit:  $n = \frac{c}{u} = \frac{ck}{\omega}$

mit  $n = \frac{n_2}{n_1}$

$$r_s = \frac{\cos \theta - n \cdot \cos \Phi}{\cos \theta + n \cdot \cos \Phi} \quad r_p = \frac{-\cos \theta + \cos \Phi}{n \cos \theta + \cos \Phi}$$

~~t<sub>s</sub>~~ aus Elimination von  $E_{\pm}$

Für:  $\theta = 0 = \Phi$   $r_s$  und  $r_p$  reduzieren sich zu  $\frac{1-n}{1+n}$

Neg.  $\frac{E'}{E}$  heisst, dass die Phase von  $E_{\pm}$  sich um  $180^\circ$ , relativ zur einfallenden Welle, geändert hat. Positiv oder negativ

Nutzt man das Gesetz von Snellius  $n = \frac{\sin \theta}{\sin \Phi}$

→  $r_s = -\frac{\sin(\theta-\Phi)}{\sin(\theta+\Phi)}$        $t_s = \frac{2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \Phi}{\sin(\theta+\Phi)}$

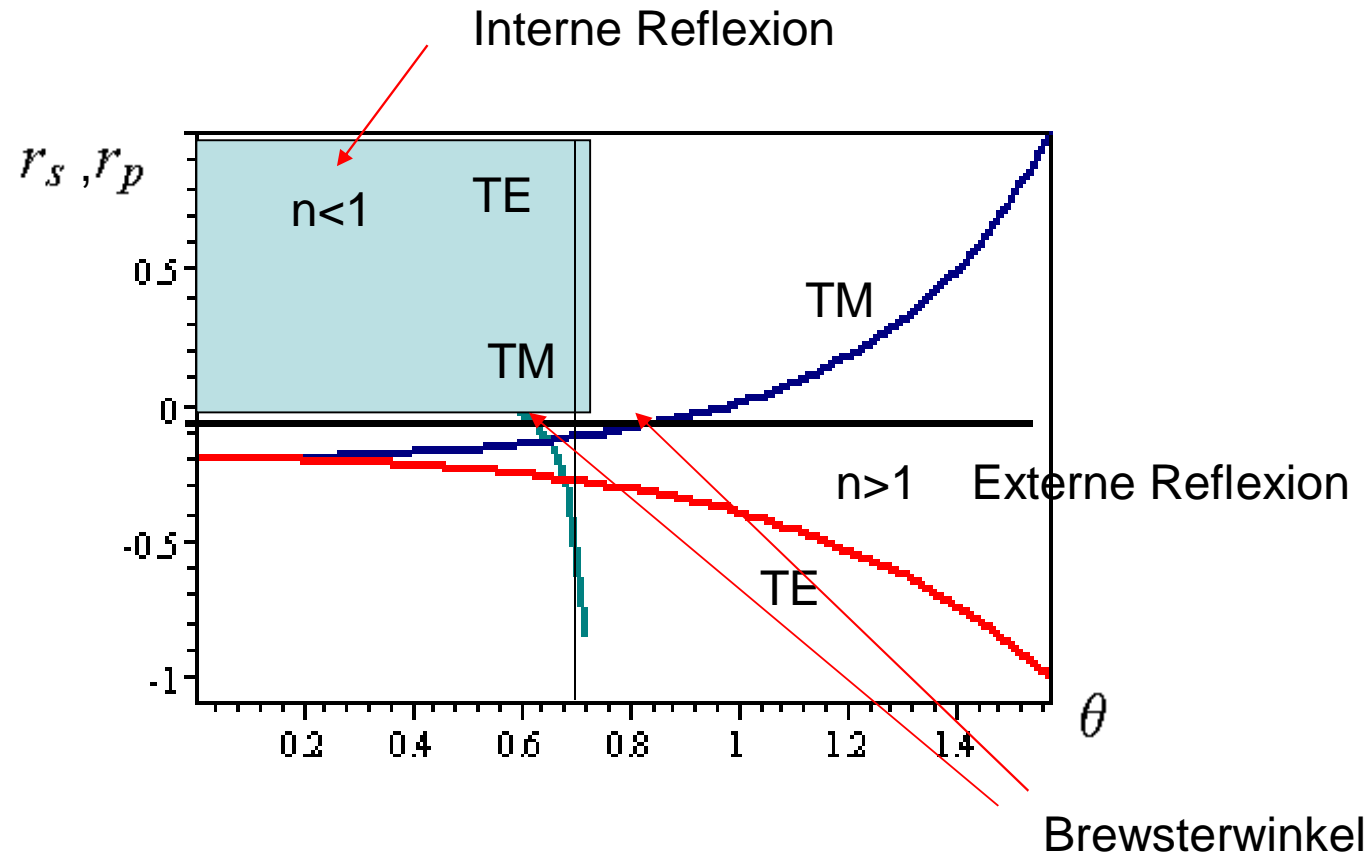
$r_p = -\frac{\tan(\theta-\Phi)}{\tan(\theta+\Phi)}$        $t_p = \frac{2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \Phi}{\sin(\theta+\Phi) \cos(\theta-\Phi)}$

Eliminiert man  $\Phi$

$$r_s = \frac{\cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}$$

$$r_s = \frac{\cos \theta - \sqrt{1.5^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{1.5^2 - \sin^2 \theta}}$$

Für Rechnungen



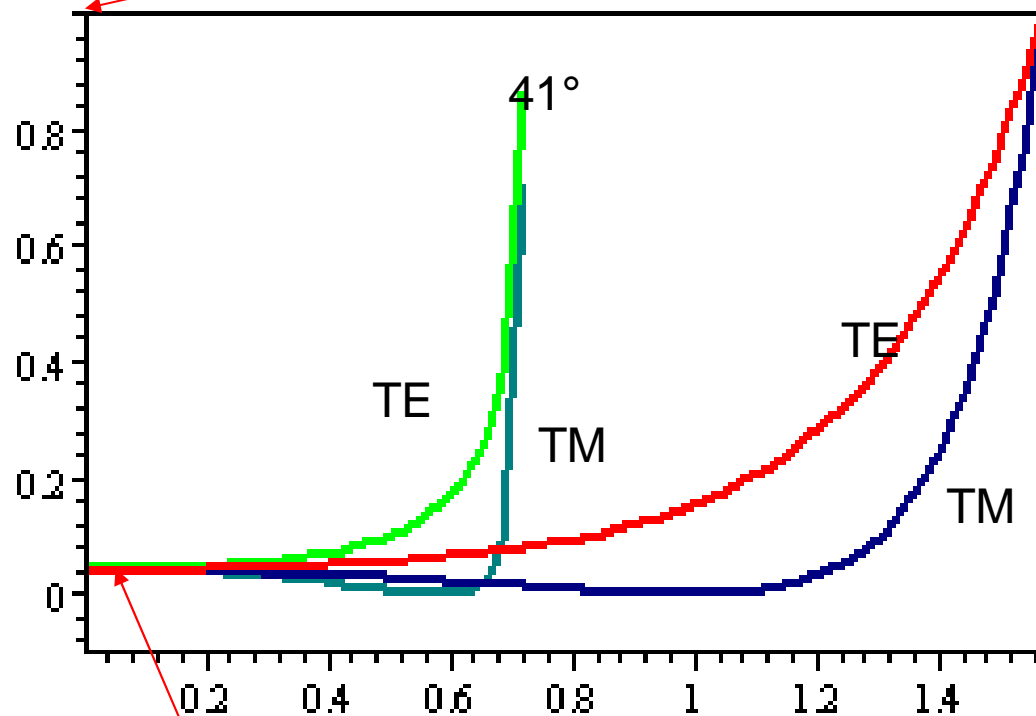
Für die externe Reflexion mit  $n > 1$ :  $\rightarrow$  Für alle  $\theta$   $r_s, r_p$  reell

Für interne Reflexion mit  $n < 1$ :  $\rightarrow$  Kritischer Winkel

$$\theta_{kritisch} = \sin^{-1} \frac{1}{1.5} \approx 41^\circ$$

$$R_s = |r_s|^2 = \left| \frac{E'}{E} \right|_{TE}^2 \quad R_p = |r_p|^2 = \left| \frac{E'}{E} \right|_{TM}^2$$

Intensitäten



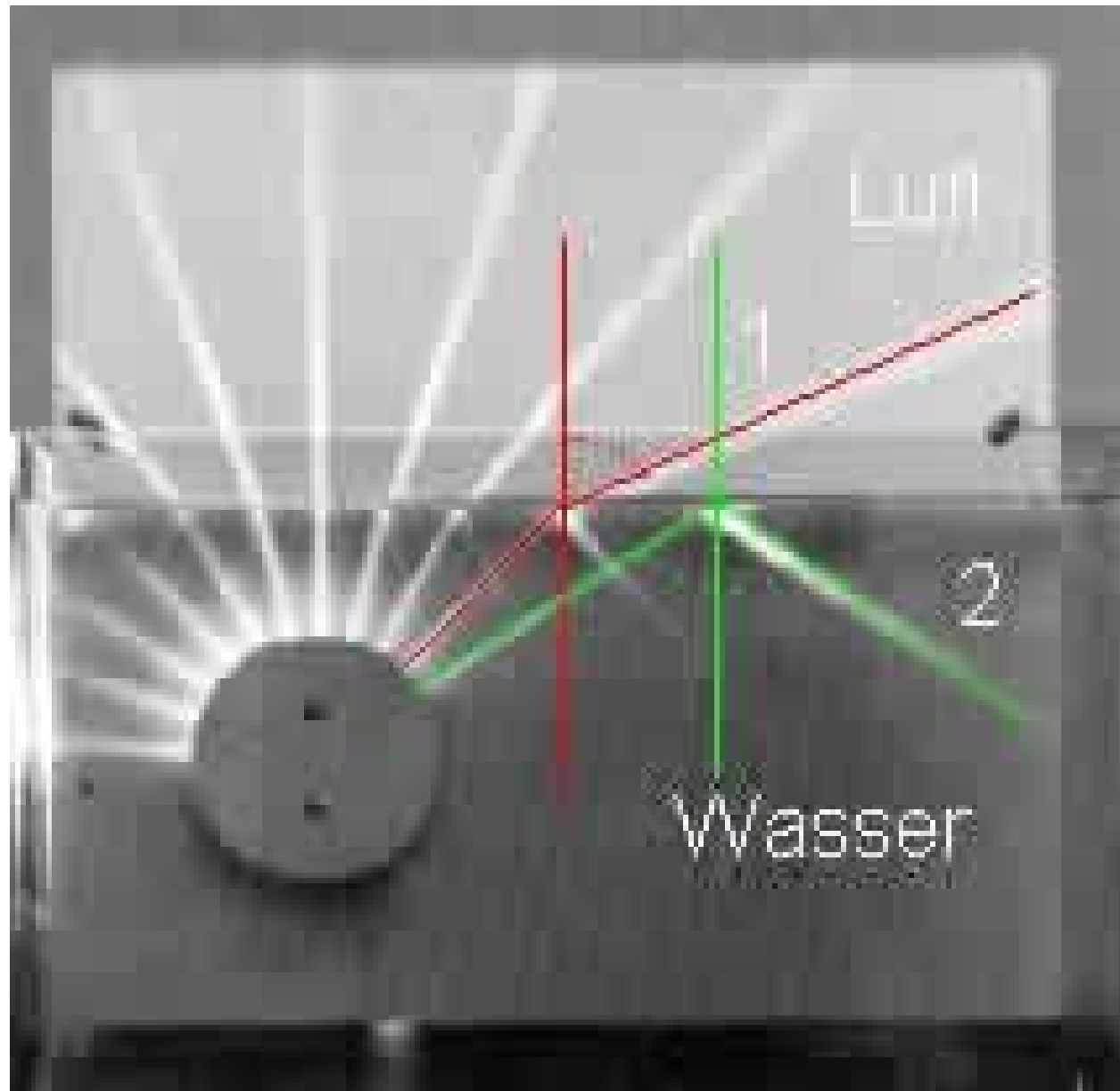
Bei streifendem Einschuss:

$$\theta \simeq 90^\circ$$

Alles wird reflektiert!  
Unabhängig von n

$$R_s = R_p = \left[ \frac{n-1}{n+1} \right]^2$$

Für Glas:  $\left( \frac{0.5}{2.5} \right)^2 = 0.04$





## Totale interne Reflexion:

Bei Überschreiten des kritischen Winkels  $\longrightarrow \frac{E'}{E}$  wird komplex

$$r_s = \frac{\cos\theta - i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{\cos\theta + i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}} \quad r_p = \frac{-n^2 \cos\theta + i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{n^2 \cos\theta + i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}$$

$$\left( \frac{\cos\theta - i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{\cos\theta + i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}} \right) \cdot \left( \frac{\cos\theta + i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{\cos\theta - i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}} \right) = 1 = R_s$$

$$\left( \frac{-n^2 \cos\theta + i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{n^2 \cos\theta + i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}} \right) \cdot \left( \frac{-n^2 \cos\theta - i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{n^2 \cos\theta - i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}} \right) = 1 = R_p$$

Totale Reflexion für Winkel größer als der kritische Winkel

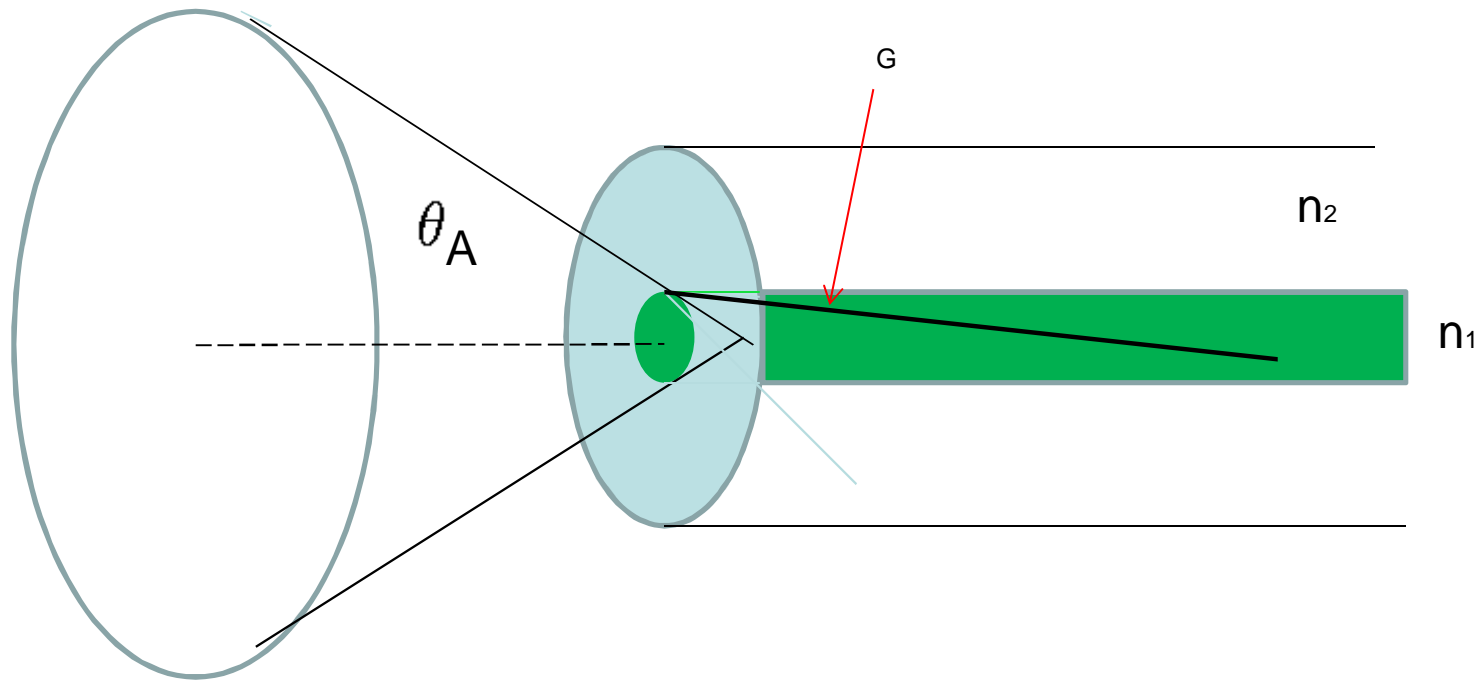
## Anwendung: Lichtleiter

Akzeptanzwinkel:

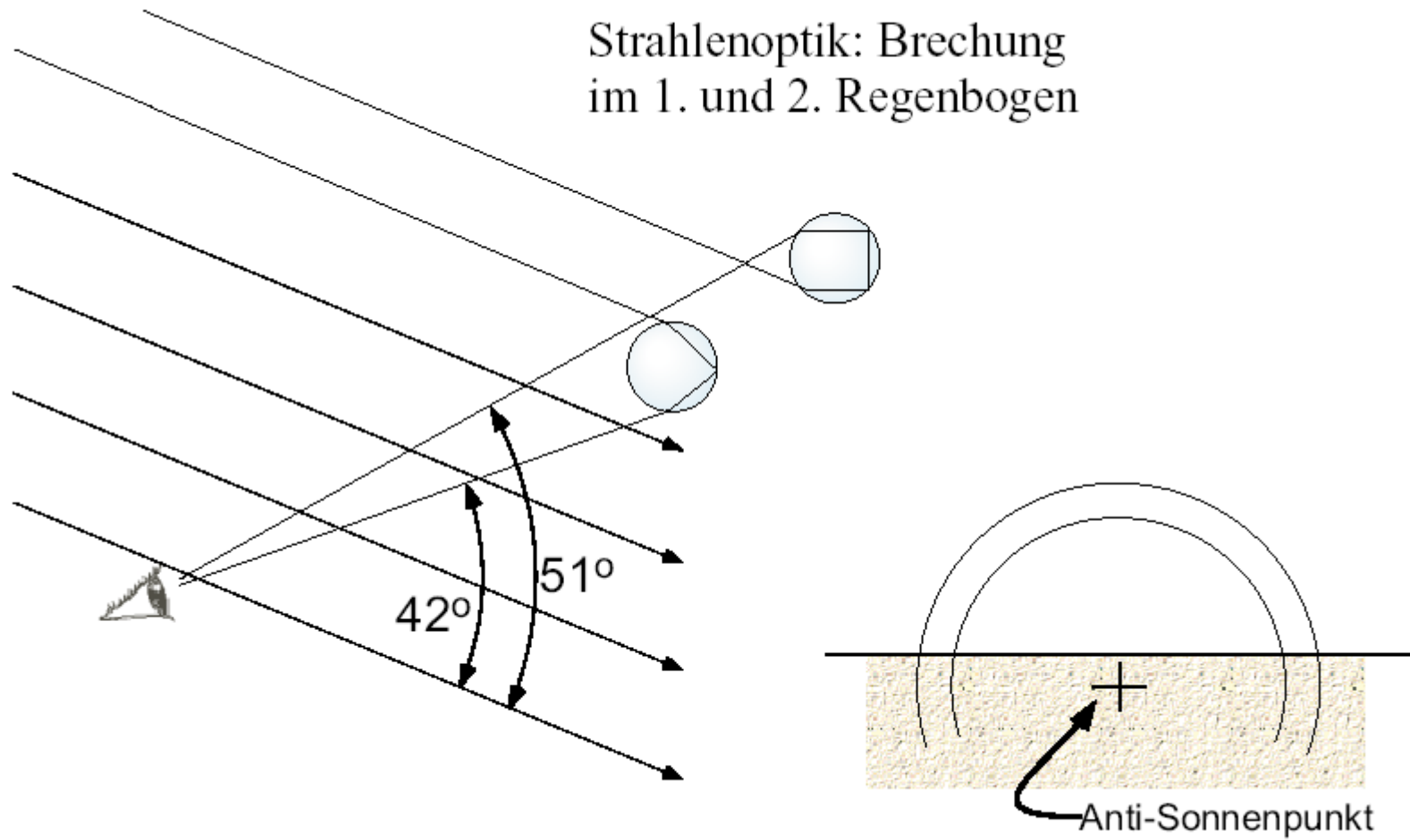
$$\theta_A = \sin^{-1} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$



# Großes Anwendungspotential: Glasfaserkabel



# Strahlenoptik: Brechung im 1. und 2. Regenbogen



## Brewster - Winkel

Reflexion = 0 im TM Fall mit  $\theta = \tan^{-1} n$

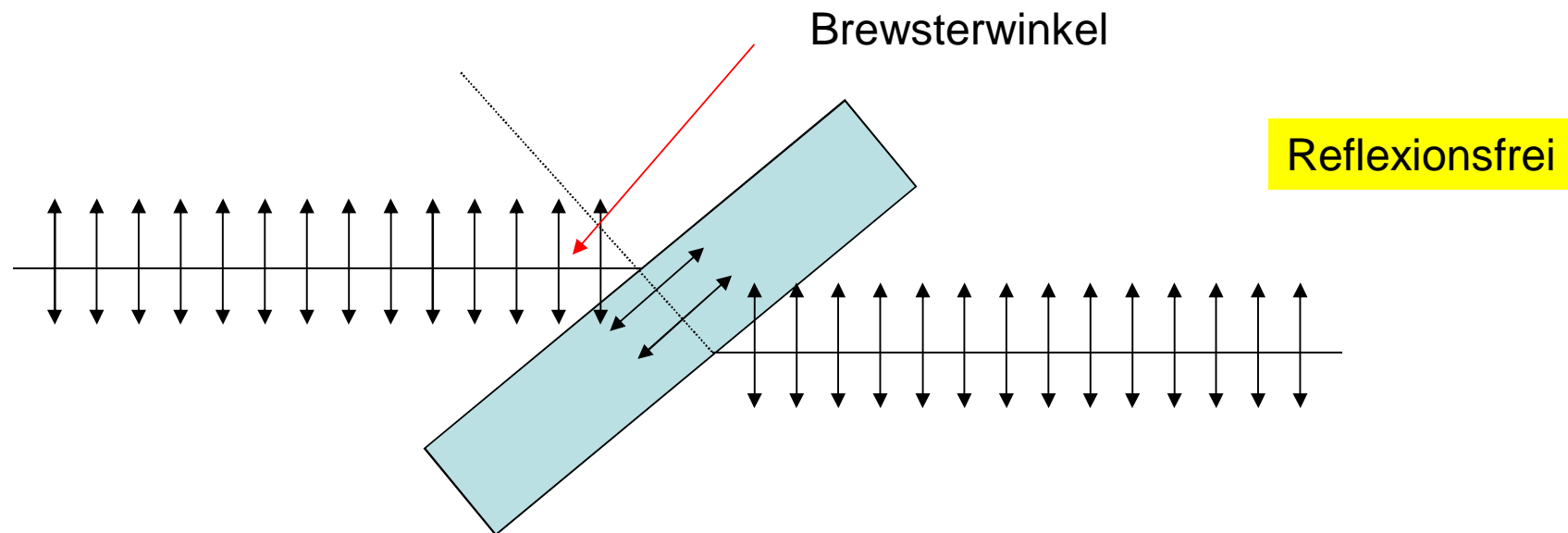
Luft . Glas Übergang  $\theta_{Brewster} = \tan^{-1}(1.5) = 56.3^\circ$

Glas-Luft Übergang  $\theta_{Brewster} = \tan^{-1}(\frac{1}{1.5}) = 33.7^\circ$

Unpolarisiertes Licht mit Brewsterwinkel auf die brechende Oberfläche:

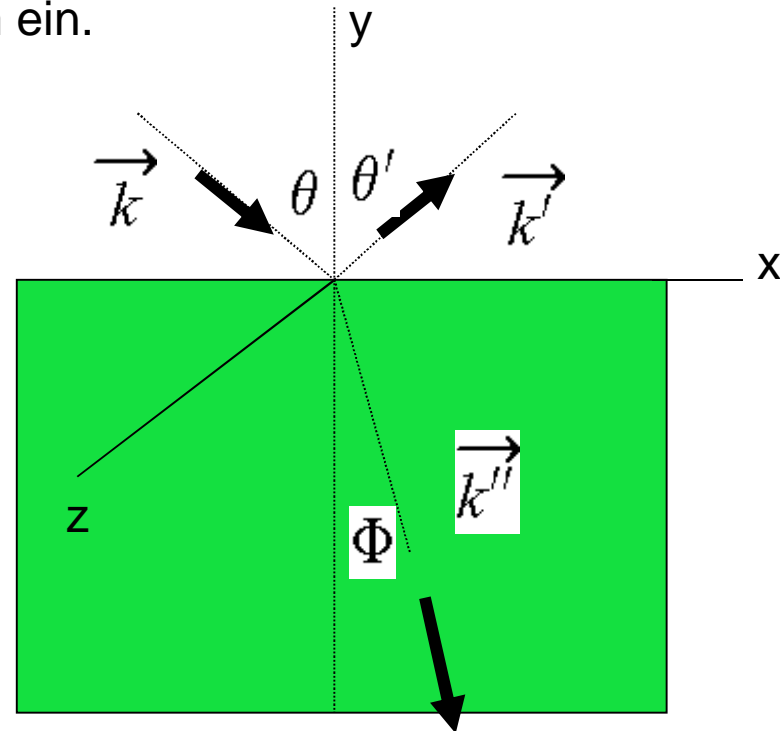
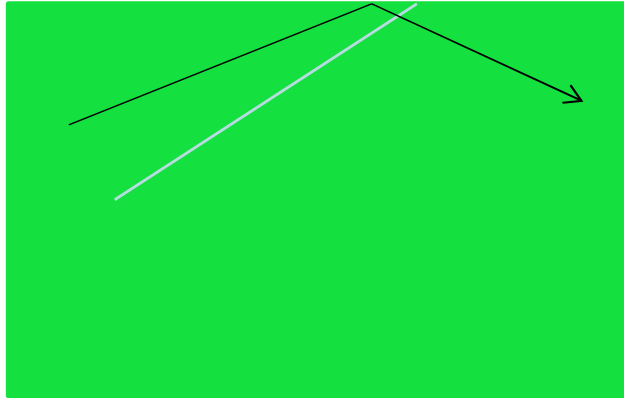
→ Reflektiertes Licht linear, transversal zur Einfallsebene, polarisiert.

## Brewsterfenster:



## Evaneszente Wellen

Feld dringt, bei Totalreflexion, in das dünnere Medium ein.



$$\vec{k}'' \cdot \vec{r} = k'' \cdot r \cdot \sin \Phi - k'' \cdot y \cdot \cos \Phi$$

$$= k'' \cdot x \cdot \sin \Phi - ik'' \cdot y \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n^2} - 1}$$

Mit

$$\text{Snellius: } \cos \Phi = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{n^2}} = i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n^2} - 1}$$

$$\vec{E}_{trans} = \vec{E}'' \cdot e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$\cos \Phi$  imaginär bei totaler interner Reflexion



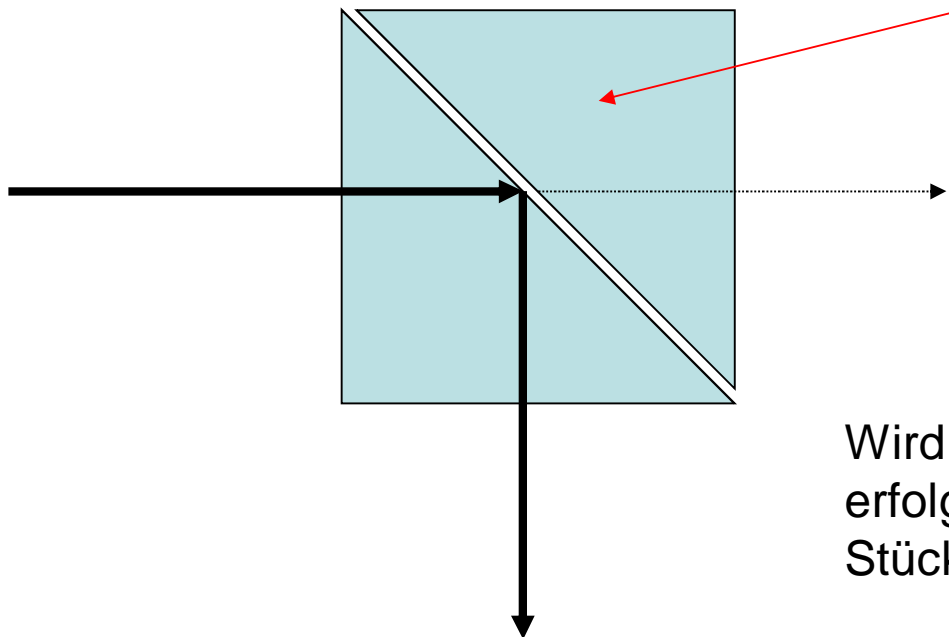
$$\vec{E}_{trans} = \vec{E}'' \cdot e^{-\alpha \cdot |y|} e^{i(k_1 x - \omega t)}$$

mit  $\alpha = k'' \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n^2} - 1}$

und  $k_1 = \frac{k'' \sin \theta}{n}$

$e^{-\alpha \cdot |y|}$  Zeigt, dass die Wellenamplitude schnell kleiner wird.

Welle läuft parallel zur Oberfläche mit einer Geschwindigkeit  $\frac{\omega}{k_1}$



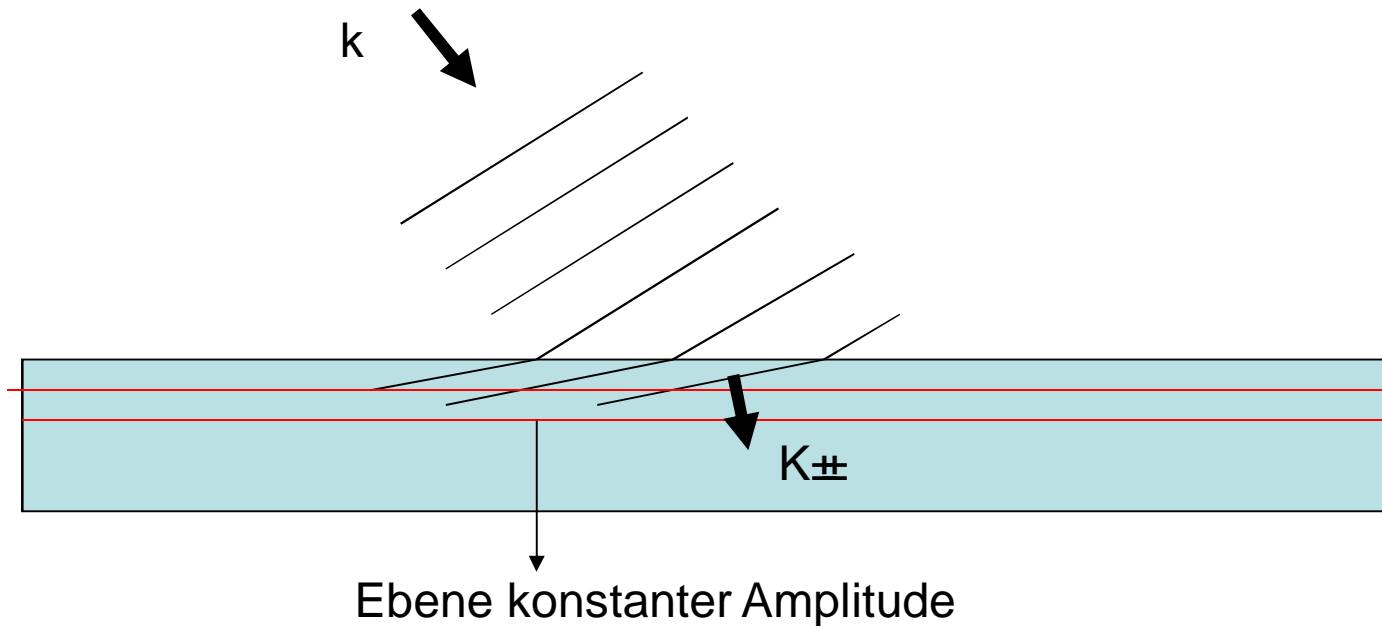
Glasprisma

Wird der Abstand verkleinert, erfolgt Einkopplung in das nächste Stück

## Absorbierendes Medium

Aus Vorlesung 2: 
$$n = 1 + \frac{N \cdot e^2 (\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot m \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot \gamma^2} = n' - iK$$

Beschreibung wird aufwendiger!



Metalle sind insbesondere gute Reflektoren: Phasensprung für die reflektierte Welle!

## Brechungsindex leitfähiger Materialien

Elektrisches Feld :  $v$  für Elektronen

Freie Elektronen: **Dämpfung**  $\tau^{-1}$

$\tau$  Mittlere Stoßzeit

$$m \left( \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} \right) = q \cdot E_0 \cdot e^{-i\omega t}$$

Ansatz:  $v = v_0 \cdot e^{-i\omega t}$

$$v_0 = \frac{q \cdot E_0}{m} \frac{1}{-i\omega + \frac{1}{\tau}} = \frac{q \cdot E_0 \cdot \tau}{m} \frac{1}{-i\omega \cdot \tau + 1}$$

Stromdichte:  $j = \sigma \cdot E = N \cdot q \cdot v$

N: Ladungsträgerdichte

$$\sigma(\omega) = \frac{N \cdot q^2}{m} \frac{\tau}{1 - i\omega\tau} = \varepsilon_0 \cdot \omega_p^2 \frac{\omega_p \cdot \tau}{1 - i\omega\tau}$$

Mit  $\omega_p^2 = \frac{N \cdot q^2}{m \cdot \varepsilon_0}$

**Plasmafrequenz**

$$N = 10^{19} \text{ cm}^{-3} \quad \omega_p \approx 10^{16} \text{ s}^{-1}$$

Wellenausbreitung: Mit Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ansatz :  $E = E_0 e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E(r, t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot c^2} \frac{\partial}{\partial t} E(r, t)$$

$$k^2 = n^2(\omega) \left( \frac{\omega}{c} \right)^2$$

$$\longrightarrow n^2(\omega) = 1 + i \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \cdot \omega}$$



Optische Frequenzen:  $\omega_p \cdot \tau \gg \omega \cdot \tau \gg 1$

$$\sigma \approx i \cdot \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \quad \omega < \omega_p \quad \rightarrow \quad n = i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{\omega}$$

Welle pflanzt sich nicht mehr fort!

Eindringtiefe:

$$\delta = \left( \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{\omega} \cdot k \right)^{-1}$$

Metallische Reflexion:

Grenzflächen:  $E + E' = E''$

$$-k \cdot E \cdot \cos \theta + k' \cdot E' \cdot \cos \theta = -k'' \cdot E'' \cdot \cos \Phi$$

Senkrechter Einfall:

Mit

$$\frac{k''}{k} = n = i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{\omega}$$

$$\rightarrow E' = \frac{1 - i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{\omega}}{1 + i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{\omega}} E$$

Reflektivität:  $Al, Au, Ag \sim R = 90 - 98\%$

$$E'' = \frac{2}{1 + i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{\omega}} E$$

$$R = \frac{|E'|^2}{|E|^2} = \frac{\left| 1 - i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{\omega} \right|^2}{\left| 1 + i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{\omega} \right|^2} = 1$$