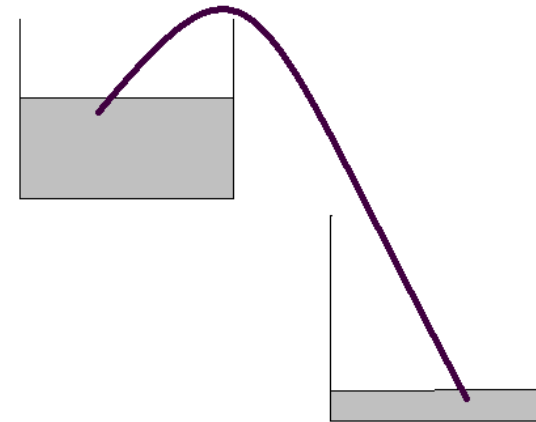


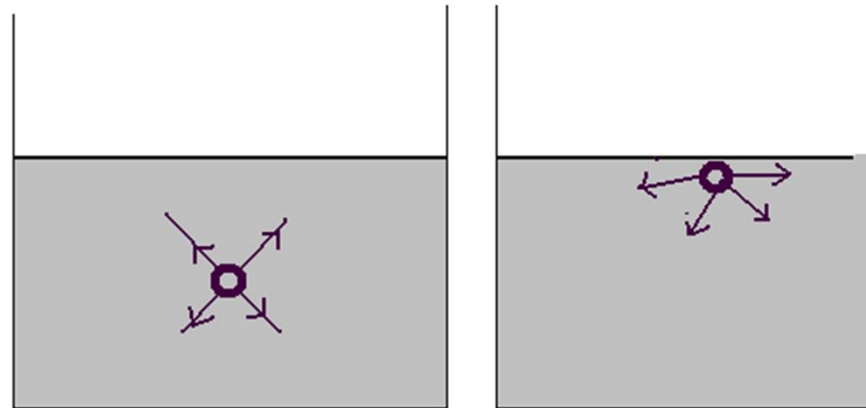
3.4. Oberflächenspannung und Kapillarität

Aus dem Experiment: Flüssigkeitsfaden, Moleküle der Flüssigkeit zeigen Zusammenhalt.

Eigenschaften kondensierter Materie:
Zwischen den Molekülen herrschen **starke Kräfte kurzer Reichweite, 10^{-7}cm** praktisch bis zum nächsten Nachbarn.

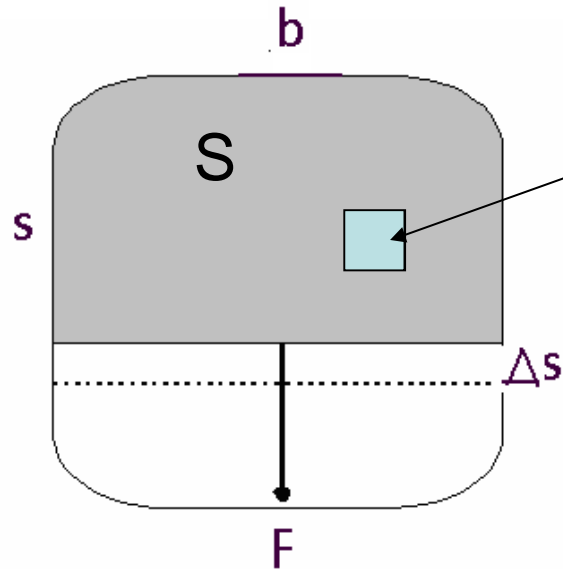


Im Innern der Flüssigkeit: Die Kräfte heben sich gegenseitig auf



An der Oberfläche: Es existiert eine resultierende Kraft nach Innen.

Bei einer Vergrößerung der Oberfläche: gegen die Kräfte ,
die nach innen ziehen, muss die Arbeit W geleistet werden.



Bezogen auf die Flächeneinheit
 S , wird eine
Oberflächenspannung definiert:

$$\sigma_s = W / S \text{ mit } \sigma_s (\text{N/m})$$

Beispiel: Seifenlamelle

Oberfläche: $S = 2 \cdot s \cdot b$

Durch Verschieben des Bügels:

$S = 2 \cdot b \cdot s$ mit der Energiezunahme:

$W = \sigma_s \cdot \Delta S = \sigma_s \cdot 2b \cdot \Delta s$ Geleistete Arbeit

$W = F \cdot \Delta s$ und damit $\sigma_s = F / 2b$

$$\sigma_S = \frac{\Delta W}{\Delta S} \text{ mit } [\sigma_S] = \frac{N}{m}$$

Beispiel: **Seifenlamelle**

Oberfläche : $S = 2 \cdot s \cdot b$

mit der Energiezunahme

$$\Delta W = \sigma_S \cdot 2b \cdot \Delta s$$

Geleistete Arbeit:

$$\Delta W = F \cdot \Delta s \text{ und damit } \sigma_S = \frac{F}{2b}$$

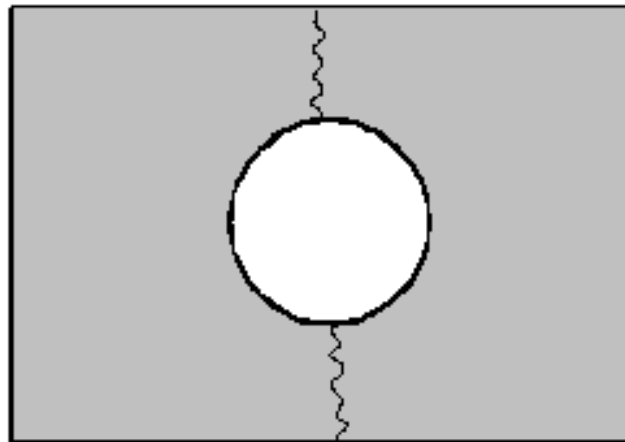
Für Wasser ist das:

$$\sigma_S = 0.073 N/m$$

Flüssigkeitsoberflächen sind Minimalflächen

Für Quecksilber:

$$\sigma_S = 0.47 N/m$$

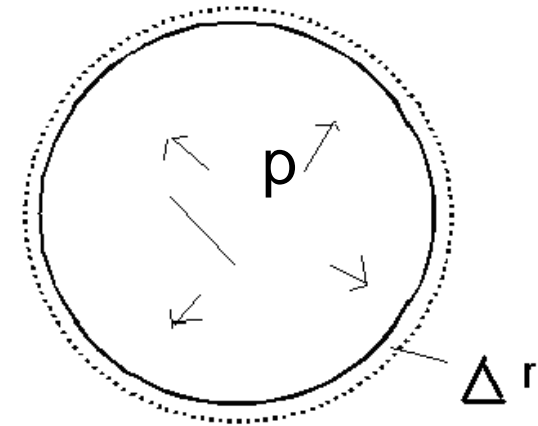


Druckverhältnisse in der Seifenblase

Oberflächenenergie:

$$W_S = 2 \cdot \sigma_S \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 8 \cdot \pi \cdot \sigma_S \cdot r^2$$

Kleinere Oberflächen bedeuten
Energiegewinn!



$$\Delta W_S = 16 \cdot \pi \cdot \sigma_S \cdot r \cdot \boxed{\Delta r} \rightarrow \text{Druckanstieg im Innern}$$

$$\text{Geleistete Arbeit: } \Delta W_P = F \cdot \Delta r = \boxed{p} \cdot S \cdot \Delta r$$

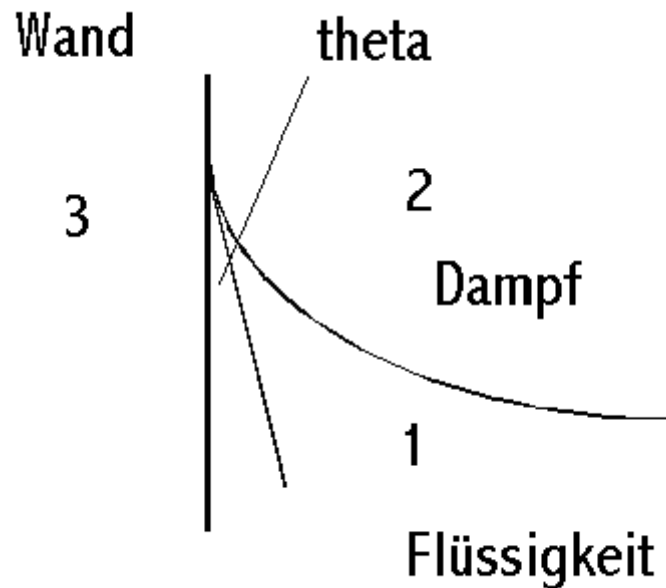
$$\text{Im Gleichgewicht: } \Delta W_S = \Delta W_P$$

$$\boxed{p} = 4 \cdot \sigma_S / r$$

Je kleiner die Kugel, desto größer der Innendruck

Grenzflächen: Bisher Flüssigkeit - Gas

Es gibt aber auch die Grenzflächen Flüssigkeit-
Flüssigkeit, Flüssigkeit - Festkörper



Energiegewinn beim Benetzen der
Grenzflächen

Gleichgewicht:

$$\underbrace{\sigma_{23} - \sigma_{13}} = \sigma_{12} \cdot \cos \theta$$

Haftspannung σ_H

Kein Gleichgewicht : $\sigma_H \succ \sigma_{12}$:

die Flüssigkeit
kriecht die Wand hoch

$0 \leq \sigma_H \leq \sigma_{12}$: Benetzend, "hydrophil"

$\sigma_H < 0$: Nichtbenetzend, "hydrophob"

Kapillarität:

Energiegewinn beim Benetzen der Zylinderoberfläche

$$\Delta W_H = \sigma_H \cdot 2\pi \cdot r \cdot \Delta h$$

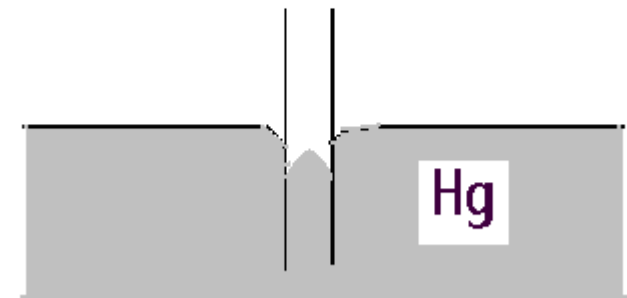
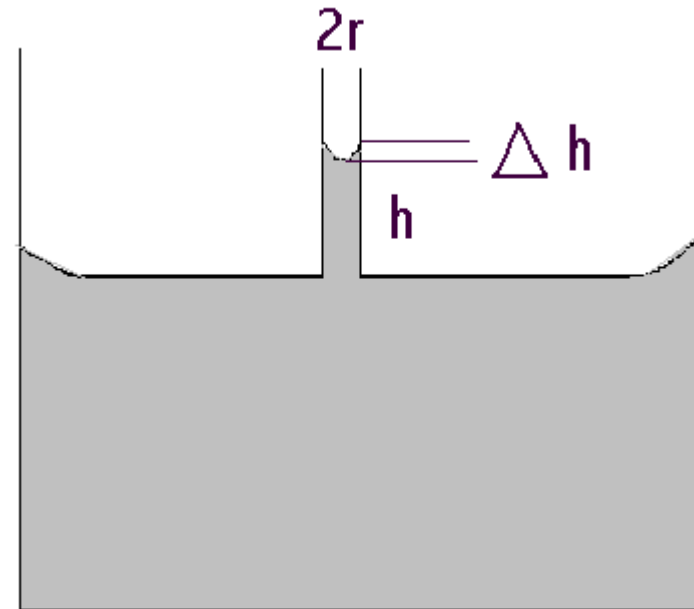
Die Hubarbeit:

$$\begin{aligned} \Delta W_g &= m \cdot g \cdot \Delta h \\ &= \rho \cdot V \cdot g \cdot \Delta h = \rho \cdot g \cdot \Delta h \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \end{aligned}$$

Gleichgewicht : $\Delta W_H = \Delta W_g$

Die Steighöhe in der Kapillare:

$$h = \boxed{2} \cdot \sigma_H / \rho \cdot g \cdot r$$



3.5. Bewegungen von Flüssigkeiten und Gasen

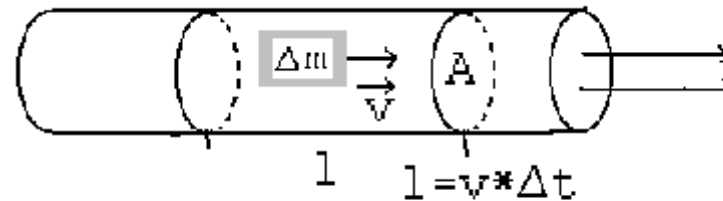
Einheitliche Behandlung von Gasen und Flüssigkeiten:

Geschwindigkeit \ll Schallgeschwindigkeit: Gemeinsamer Begriff: **Fluid**. Drei Arten von Strömungen

- a) *Ideale Flüssigkeit*: Keine Reibungskräfte
- b) *Zähe Flüssigkeit*: Reibung dominiert
- c) *Turbulente Strömung* realer Flüssigkeiten

a)

Flüssigkeitstransport:



Fluß: $\Phi = \frac{\text{In } \Delta t \text{ durch } A \text{ hindurchtretende Flüssigkeitsmasse}}{\text{Zeitintervall}}$

$$\Phi = \frac{m(A, \Delta t, v)}{\Delta t} = \frac{\rho \cdot V(A, \Delta t, v)}{\Delta t} = \frac{\rho \cdot A \cdot v \cdot \Delta t}{\Delta t} = \rho \cdot A \cdot v$$

v : nicht notwendigerweise konstant $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$

Stromdichte: Fluß/Fläche

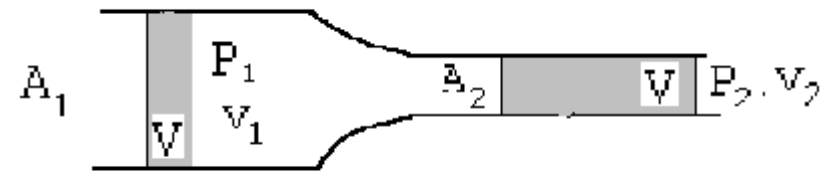
Kontinuitätsprinzip: Fluss bleibt erhalten:



$$\Phi_1 = \Phi_2$$

$$\Rightarrow A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

$\Phi = \text{konstant}$



Flüssigkeitsvolumen gewinnt **kinetische Energie:**

$$\Delta W_{kin} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot V \cdot (v_2^2 - v_1^2)$$

Dafür muss **Arbeit** geleistet werden!

V wird gegen P in das Rohr gepresst

$$\begin{aligned} &\nearrow P_1 \cdot V \\ &\nearrow P_2 \cdot V \end{aligned}$$

$$v_1 < v_2 \Rightarrow \Delta W = P_1 \cdot V - P_2 \cdot V = (P_1 - P_2) \cdot V$$

$$\Delta W = P_1 \cdot V - P_2 \cdot V = (P_1 - P_2) \cdot V$$

Energiesatz:

$$\Delta W = \Delta W_{kin}$$

$$P_1 \cdot V + \frac{1}{2} \rho \cdot V \cdot v_1^2 = P_2 \cdot V + \frac{1}{2} \rho \cdot V \cdot v_2^2$$

$$\Rightarrow P_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$$
 gilt entlang eines beliebig
geformten Rohres:

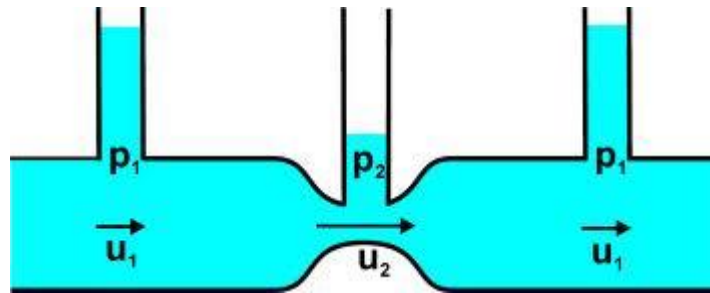
$$p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \text{konstant} = P_0$$

Gleichung von Bernoulli : **Statischer Druck+Staudruck=**
Gesamtdruck

Enorme praktische Bedeutung $v \sim \frac{1}{A} \Rightarrow$

Staudruck groß, wo A klein, **statischer Druck**
groß, wo A groß

Hydrodynamisches Paradoxon

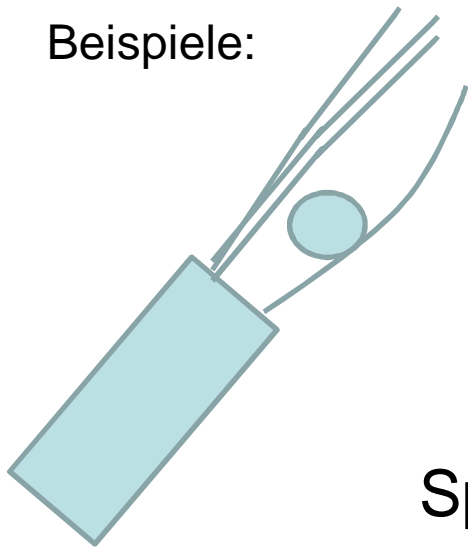


Gemäß:

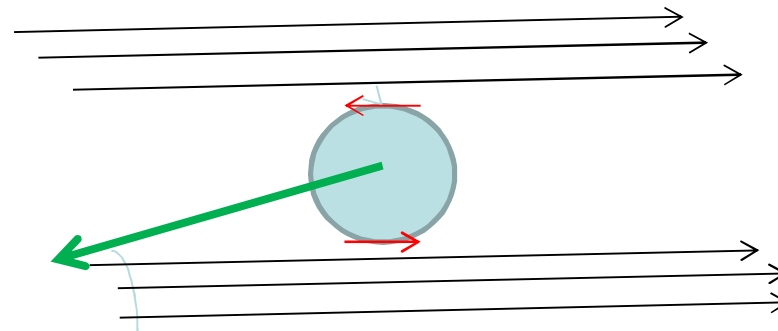
$$p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = P_0$$

klein ρ wenn v groß

Beispiele:



Magnuseffekt



Sport: Ball anschneiden

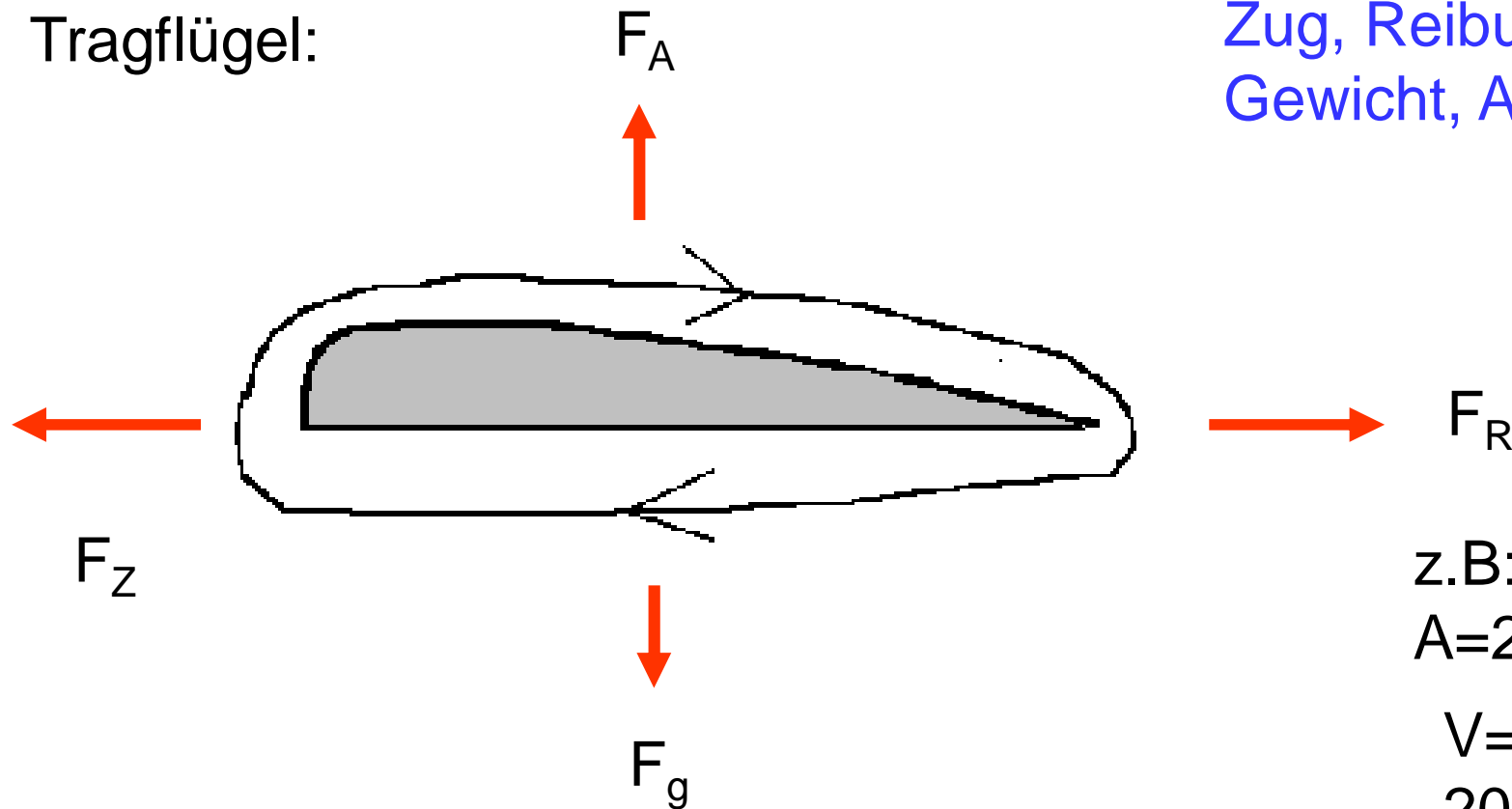
Tennis, Tischtennis, Fußball etc.

Folge:
Ablenkung

Rotierende Oberfläche des Balls vermindert/vermehrte
via Reibung die Luftgeschwindigkeit um die Oberfläche

Weiteres Beispiel

Tragflügel:



Käfte:

Zug, Reibung

Gewicht, Auftrieb

z.B:

$A=200\text{m}^2$

$V=250\text{m/s}$

200t Gew.

$dv=150\text{km/h}$

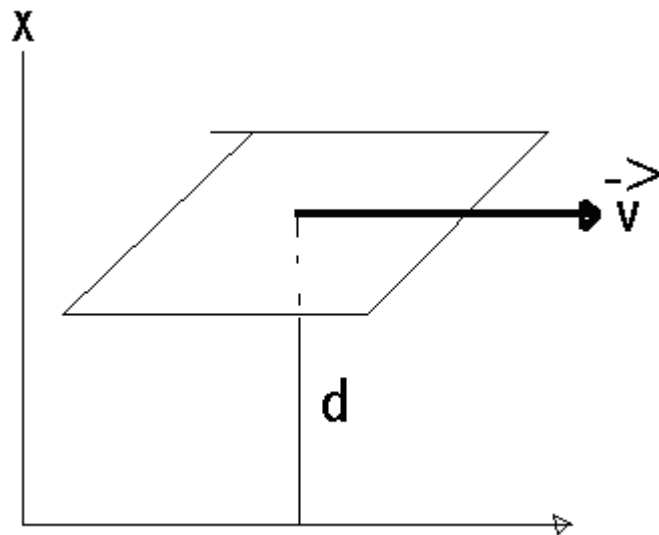
$$F_A = A(p_{\text{unten}} - p_{\text{oben}}) = A \cdot 0.5 \cdot \rho (v_{\text{oben}}^2 - v_{\text{unten}}^2)$$

oder $F_A = A \cdot 0.5 \cdot \rho (v_{\text{oben}} + v_{\text{unten}})(v_{\text{oben}} - v_{\text{unten}})$

Tragende Kraft: $F_A = A \cdot \rho \cdot v \cdot (v_{\text{oben}} - v_{\text{unten}})$

b) Laminare oder schlichte Strömung einer zähen Flüssigkeit

Flüssigkeit kann **keine Scherspannung** aufnehmen.



Bewegliche Platte mit Oberfläche S
Zur Bewegung der Platte über eine Flüssigkeitsschicht ist eine Kraft nötig:

$$F \sim S \cdot v/d$$

Interpretation: Auf die Flüssigkeit wirkt **eine Art Scherspannung** τ

→ Viskosität

$$\tau : \tau = F/S \quad d.h. : \tau = \eta \cdot v/d \quad [\tau] = N \cdot m/S$$

Eine haftende Flüssigkeitsschicht gleitet über die darunter liegende Schicht etc.

v/d stellt ein **Geschwindigkeitsgefälle** dar

→ dv/dx d.h. : **Gradient** $\eta(T) : T = \text{Temperatur, z.B.: } H_2O$

$$\eta(0) = 0.0018, \eta(100) = 0.00029$$

Beispiel : **Laminare Strömung** zwischen parallelen Platten, mit $v = \text{konstant}$

An den **Stirnflächen**: **Kräfte**

$$2 \cdot x \cdot b \cdot p_1 - 2 \cdot x \cdot b \cdot p_2$$

An den **Flanken**: **Reibungskräfte**:

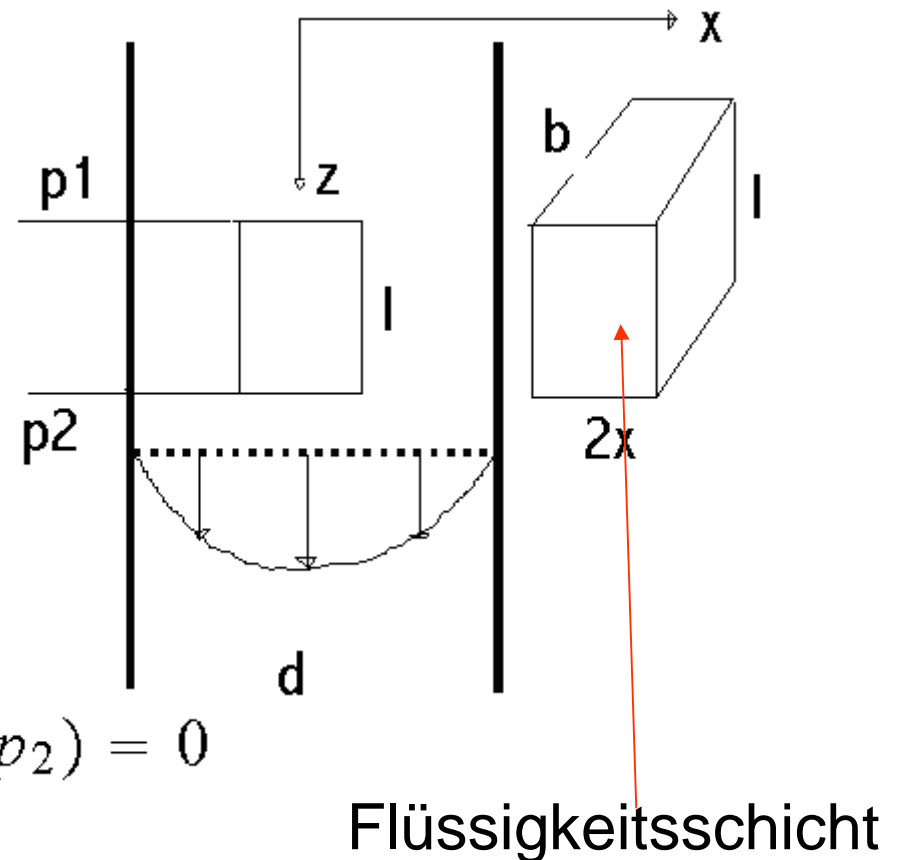
$$\eta \cdot 2 \cdot b \cdot l \cdot dv/dx$$

Konstante Geschwindigkeit heißt:
Die Summe aller Kräfte ist null!

$$\eta \cdot 2 \cdot b \cdot l \cdot dv/dx + 2 \cdot x \cdot b \cdot (p_1 - p_2) = 0$$

$$\rightarrow dv/dx = -x(p_1 - p_2)/(\eta \cdot l)$$

$$\text{Integration: } v = -x^2 \cdot (p_1 - p_2)/(2 \cdot \eta \cdot l) + c$$



$$v = -x^2 \cdot (p_1 - p_2)/(2 \cdot \eta \cdot l) + c \quad \text{mit } v=0 \text{ für } x= d/2$$

ergibt sich die Integrationskonstante c zu:

$$c = (d/2)^2 \cdot (p_1 - p_2)/(2 \cdot \eta \cdot l) \quad \text{und damit:}$$

$$v = (p_1 - p_2)/(2 \cdot \eta \cdot l)((d/2)^2 - x^2) \quad (p_1 - p_2)/l = dp/dz$$

stellt ein Druckgefälle dar

$$\vec{v} \approx \text{grad}(p) \cdot ((d/2)^2 - x^2)$$

Die Spitzen der Geschwindigkeitsvektoren
liegen auf einer Parabel!

Laminare Strömung durch eine Röhre
(analog dem ebenen Problem)

$$r \eta \cdot 2 \cdot \pi \cdot l \cdot dv \cdot /dr + r^2 \cdot \pi \cdot (p_1 - p_2) = 0$$

$$dv/dr = -r \cdot (p_1 - p_2) / (\eta \cdot 2 \cdot l)$$

mit Integration:

$$-4 \cdot \eta \cdot l \cdot v / (p_1 - p_2) = r^2 + c$$

$$c = -R^2 \text{ für } v = 0 \text{ an } r = R$$

$$R^2 - r^2 = 4 \cdot \eta \cdot l \cdot v / (p_1 - p_2)$$

$$\text{oder } v = (p_1 - p_2) \cdot (R^2 - r^2) / 4 \cdot \eta \cdot l$$

Paraboloid

Strömende Flüssigkeitsmenge für die Zeit t:

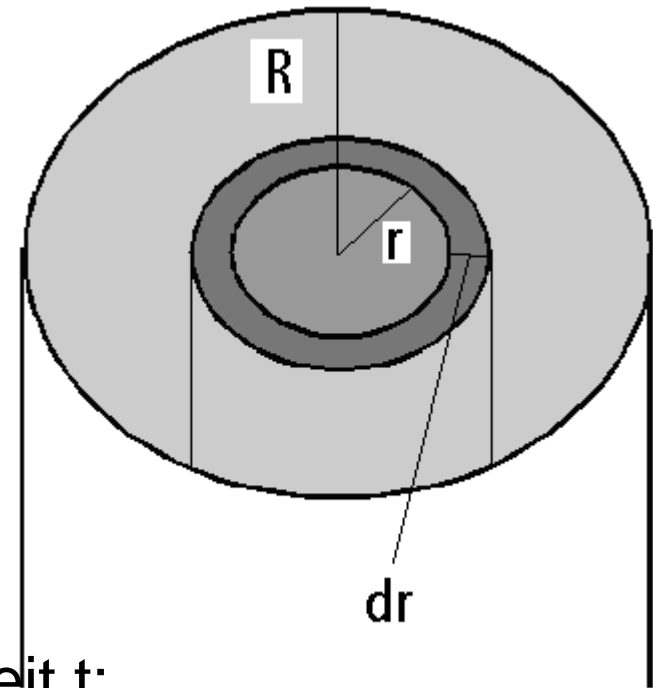
$$2 \pi \cdot dr \cdot (p_1 - p_2) \cdot (R^2 - r^2) \cdot t / 4 \cdot \eta \cdot l$$

$$V = \frac{\pi \cdot (p_1 - p_2) \cdot t}{2 \cdot \eta \cdot l} \int_0^R (R^2 - r^2) \cdot r \cdot dr$$

$$V = \pi \cdot R^4 \cdot (p_1 - p_2) \cdot t / 8 \cdot \eta \cdot l$$

Gleichung von Hagen- Poiseuille

$$\Phi = \pi \cdot \rho \cdot R^4 \cdot (p_1 - p_2) / 8 \cdot \eta \cdot l$$



$$dV = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot v \cdot t =$$

Fluss:

$$\Phi = m/t = \rho \cdot V/t \rightarrow$$