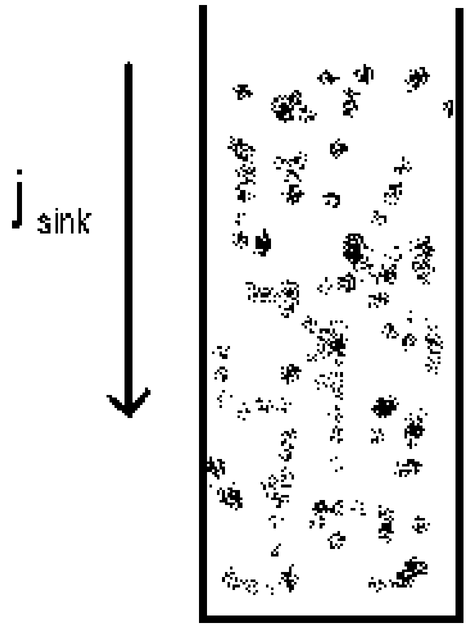
5.14 Transportphänomene

Diffusion, Dichteverteilung



Zwei Effekte:

a) Sinkgeschwindigkeit

s.o. Stokes (zähe Flüssigkeit):

$$v = -\frac{m \cdot g}{6\pi\eta \cdot r} \Rightarrow j_{\mathrm{sink}} = n \cdot v = -\frac{m \cdot g \cdot n}{6\pi\eta \cdot r}$$

b)Thermische Bewegung

der Moleküle wirkt entgegen:

Diffusion

Maßgebend: Konzentrationsgefälle $\boxed{\frac{dn}{dh}}$

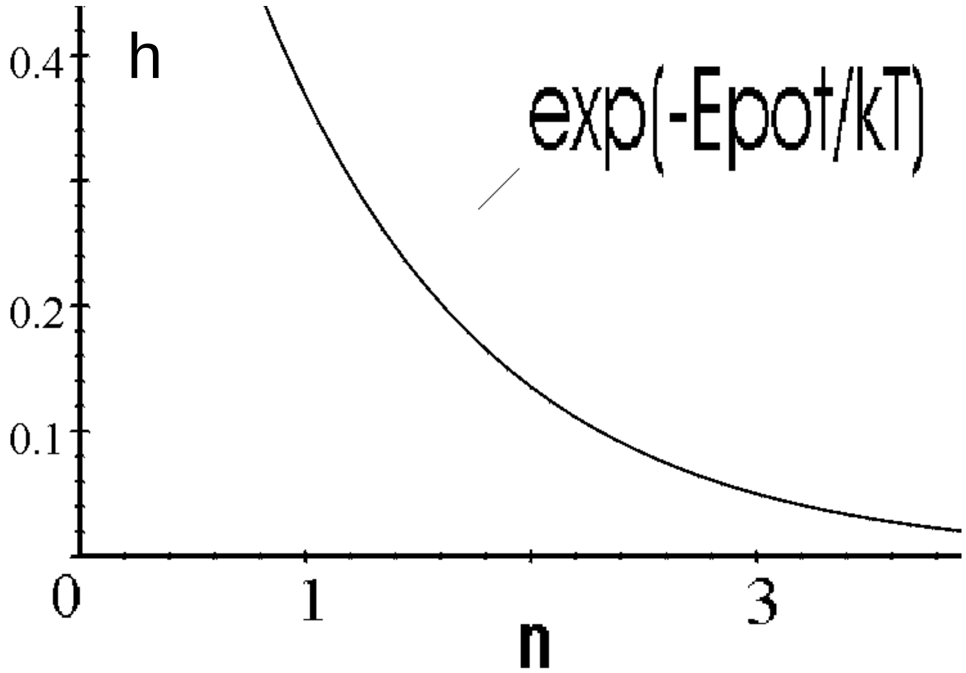
Diffusionsstromdichte: $j_{Diff} = -D\frac{dn}{dh}$

Thermisches Gleichgewicht: $j = j_{\mathrm{sink}} + j_{Diff} = 0$

$$\frac{-mg \cdot n}{6\pi\eta \cdot r} - D\frac{dn}{dh} = 0; \boxed{\frac{dn}{dh} = \frac{-mg \cdot n}{6\pi\eta \cdot r \cdot D}}$$

oder $$\frac{dn}{n} = \frac{-mg}{6\pi\eta\cdot r\cdot D}dh$$

$$n(h) = n_0 e^{\frac{-mg}{6\pi\eta\cdot r\cdot D}h}$$



"Barometrische Höhenformel"
für die Teilchenzahldichte

s.o.: $$n(h) = n_0 e^{-E_{pot}/kT} = n_0 e^{-mgh/kT} \Longrightarrow$$

die Einsteinsche Beziehung: $$D = \frac{kT}{6\pi\eta\cdot r}$$

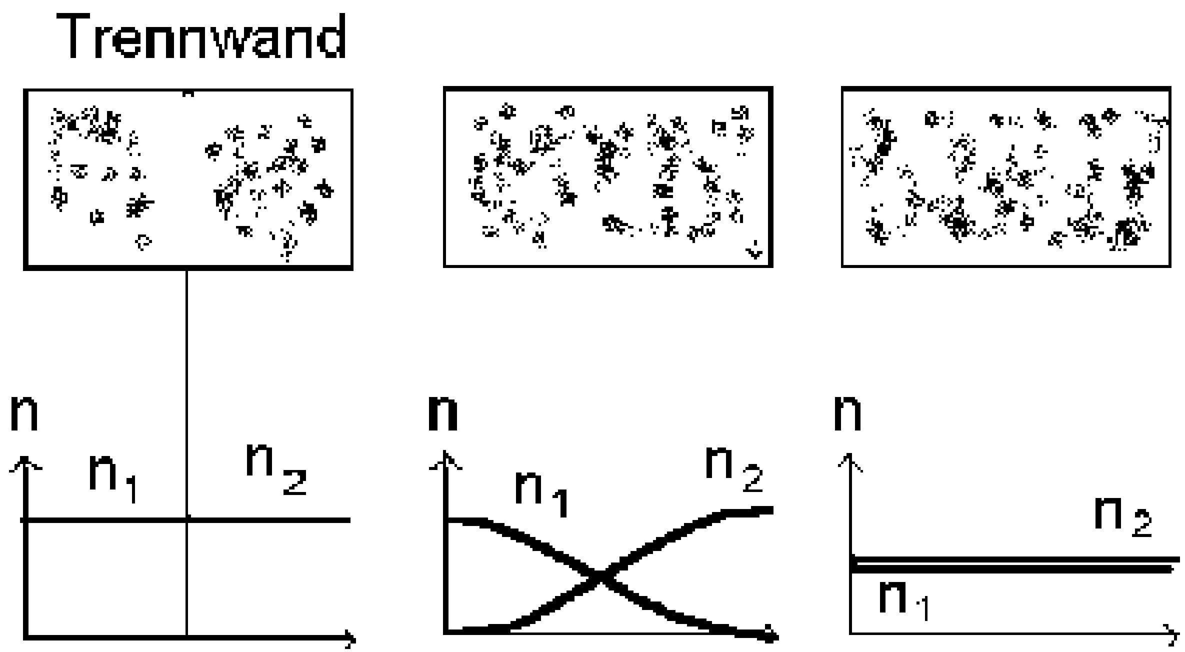
Bei Gasen
ɖ ~ã T

Diffusion eines Gases in ein anderes:

T=konst. mit

Gas 1	$P_1=n_1kT$
Gas 2	$P_2=n_2kT$

Annahme $P_1=P_2 \rightarrow n_1=n_2$



Thermische Bewegung:
Gase vermischen,
keine zusätzliche Energie!

Thermische Molekularbewegung "sorgt" für Mischung: "Diffusion"

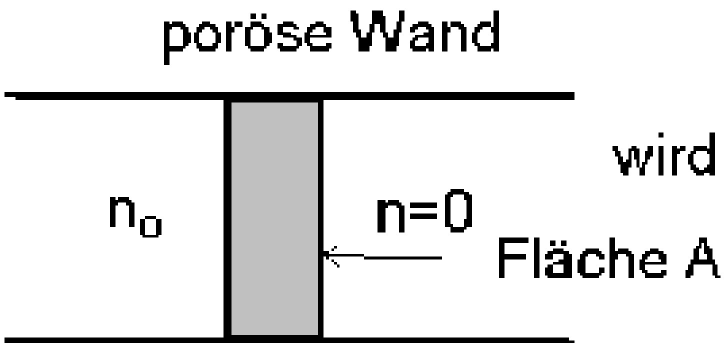
Teilchendichte des i- ten Gases $\boxed{\Longrightarrow P_i = n_i \bullet k \bullet T}$

Partialdruck

Gesamtdruck P (Summe aller Partialdrucke):

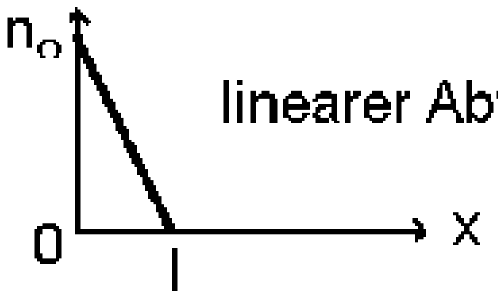
$$\boxed{\sum_i P_i}$$

Daltonsche Regel
Diffusion von Gasen durch poröse Trennwände



n_o, n wird

wird aufrecht erhalten



linearer Abfall :Konzentrations
gefälle

$$\frac{dn}{dx} = -\frac{n_0}{l}$$

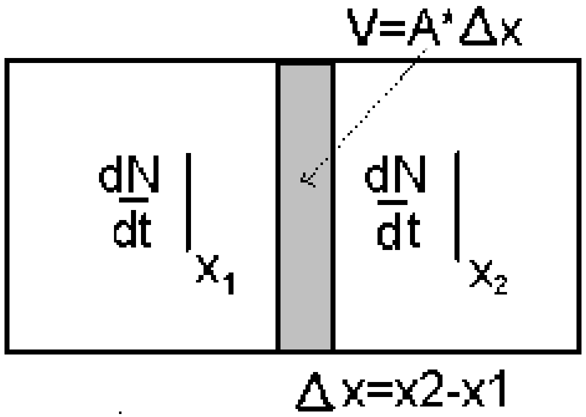
stetiger Molekülstrom: In $\Delta t \rightarrow \Delta N$ $\Rightarrow \Delta N \sim A \frac{dn}{dx} dt \Rightarrow$

$$i = \frac{\Delta N}{\Delta t} = -D \cdot A \frac{dn}{dx}$$

Molekülstrom

1.Ficksche Gesetz
Bisher stationär: Konstantes Konzentrationsgefälle

Wie



rechts/links geschlossen

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{V}\left\{ \frac{\partial N}{\partial t}\Big|_{x_1} - \frac{\partial N}{\partial t}\Big|_{x_2} \right\}$$

$\frac{\partial N}{\partial t}\Big|_{x_1}$ fließt bei x1 in V rein

$\frac{\partial N}{\partial t}\Big|_{x_2}$ fließt bei x2 aus V raus

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{A}\,\frac{\frac{\partial N}{\partial t}\Big|_{x_1} - \frac{\partial N}{\partial t}\Big|_{x_2}}{\Delta x}$$

mit dem 1.Fickschen Gesetz

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -DA\frac{\partial n}{\partial x} \Longrightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{DA}{A}\underbrace{\frac{\frac{\partial n}{\partial x}\Big|_{x_1} - \frac{\partial n}{\partial x}\Big|_{x_2}}{\Delta x}}_{\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}}$$

2.Ficksche Gesetz

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

Diffusionsgleichung!

Die Diffusionskonstante hängt ab von der mittleren (thermischen) Geschwindigkeit vt hund der freien Weglänge ş

ş : mittlere Strecke zwischen zwei Stößen

D~v_{th}* ş $\quad v_{th} \sim \sqrt{\frac{kT}{m}} \Rightarrow D \sim \frac{\Lambda}{\sqrt{m}}$

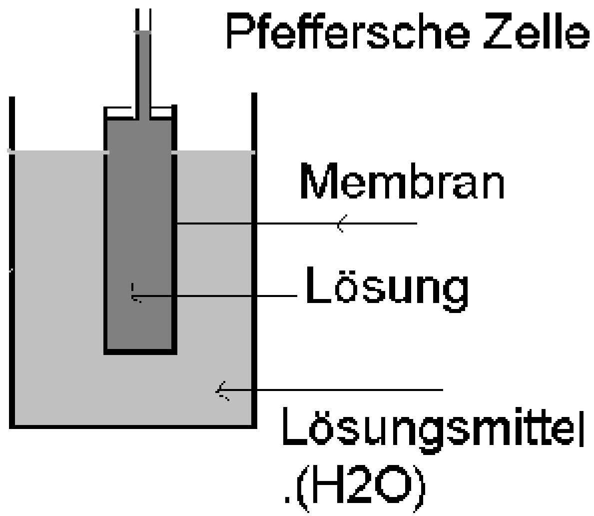
Vergleich zweier Gase: $\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ dabei wurde angenommen, $\Lambda_1 \simeq \Lambda_2$

leichtere Gase diffundieren schneller als schwerere!

siehe Exp: Tonzylinder

Osmose

Exp.:Pfeffersche Zelle



z.B.:H_2O -Moleküle diffundieren durch eine semipermeable Membran in die Zuckerlösung
→höherer Druck in der Zelle
→Osmotischer Druck

Semipermeable Membran

Gesetz van t'Hoff: $\boxed{P_{Osmose} \cdot V = M \cdot R \cdot T}$

M:Masse des im Volumen V gelösten Stoffes
experimenteller Befund! C=M/V=Massenkonzentration

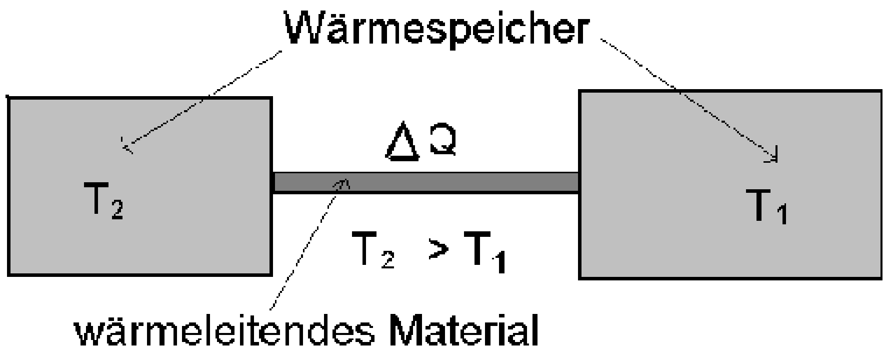
z.B:C=0.1Mol/Liter,T=0° $\Rightarrow P_{Osmose} = 2.24at$

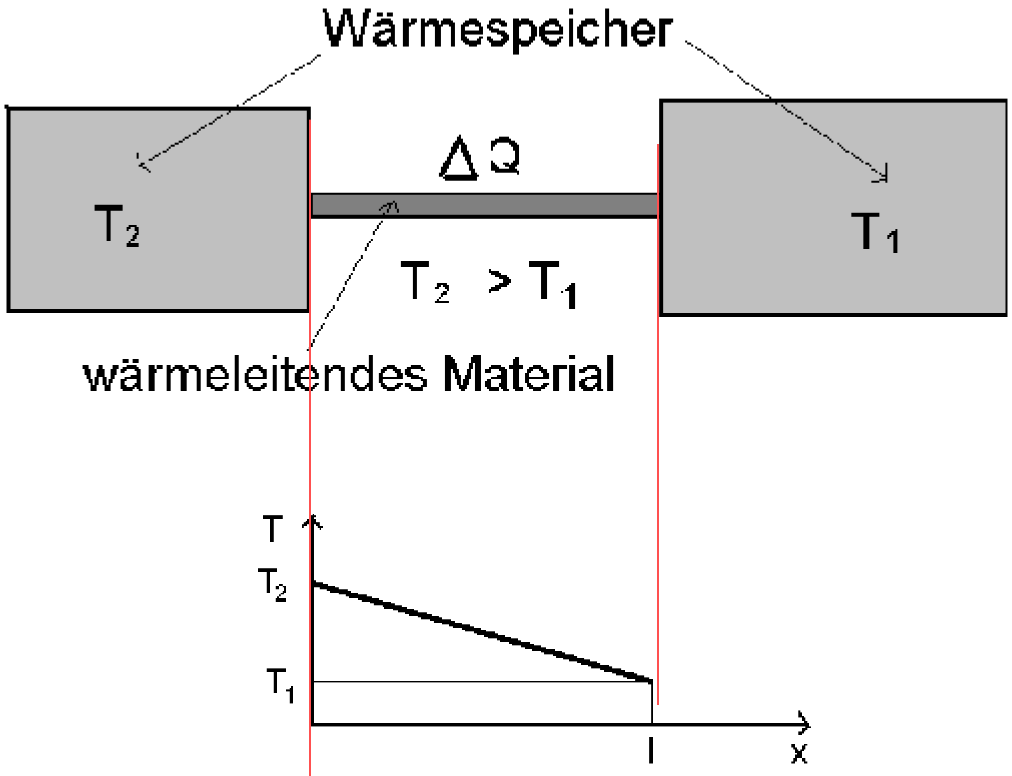
Große Bedeutung in der Biologie: z.B:Erbsen quellen in H_2O

Erbsen schrumpfen in konzentrier Kochsalzlösung

Wärmetransport

a) Wärmeleitung
b) Wärmeströmung
c) Wärmestrahlung (3.Sem.)





Temperaturgefälle: $\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{l}$

$\Delta Q \sim A \frac{dT}{dx} dt$ oder mit der Wärmeleitfähigkeit λ

$$\boxed{\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda \cdot A \cdot \frac{T_2 - T_1}{l}}$$

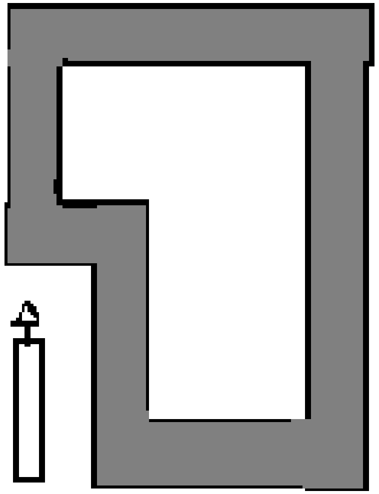
$$[\lambda] = \frac{J}{s \cdot m \cdot k}$$

Beispiele: λ

Silber	423
Kupfer	394
Aluminium	201
Eisen	71
Porzellan	1
Wasser	0.6
Luft	0.023

Metalle: Leitfähigkeit ~ Elektrischen Leitfähigkeit

Wärmeströmung

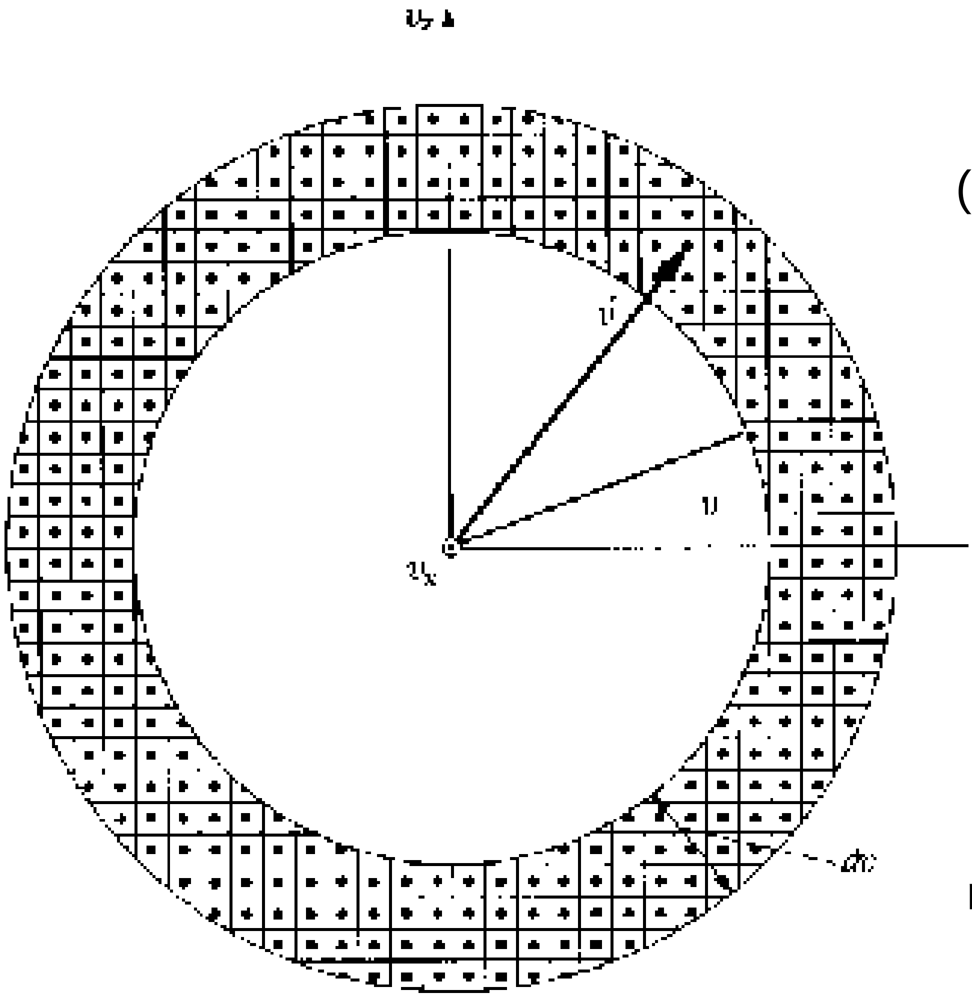


Konvektion z.B.
Warmwasserheizung

Durch Dichtevariation

Addendum: Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung

Die Anzahl der Teilchen $dN(v_x, v_y, v_z)$ in dem Geschwindigkeits -volumenelement



$$\frac{dN(v_x, v_y, v_z)}{dv_x dv_y dv_z} \sim e^{-\frac{E}{kT}}$$

(Boltzmann-Verteilung s.o.)

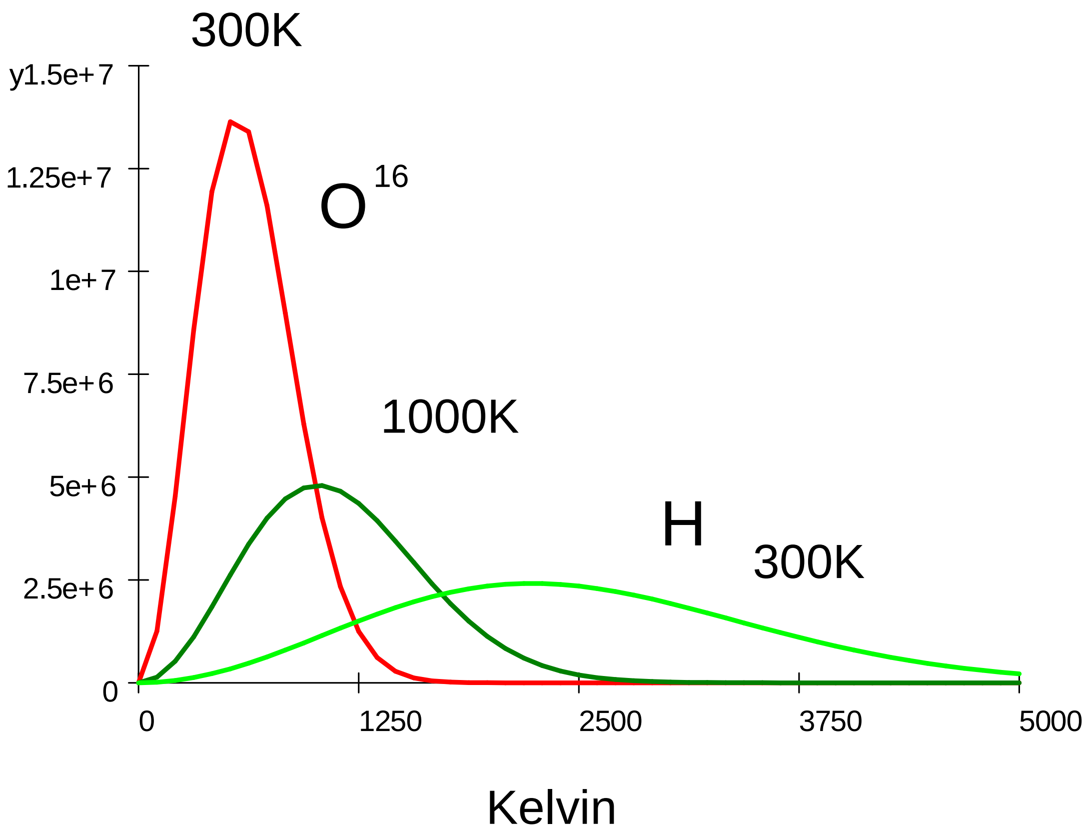
$$dv_x dv_y dv_z = v^2 dv \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$E = \frac{m}{2} v^2 \Rightarrow$$

$$dN(v) = 4\pi v^2 \bullet C \bullet e^{-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot kT}} \bullet dv$$

$$\frac{dN(v)}{dv} = 4\pi v^2 \bullet C \bullet e^{-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot kT}}$$

mit C als Normierungskonstante bestimmt durch Teilchenzahl



300K
y1.5e+7
1.25e+7
1e+7
7.5e+6
5e+6
2.5e+6
0
O 16
1000K
H
300K
0
1250
2500
3750
5000
Kelvin