

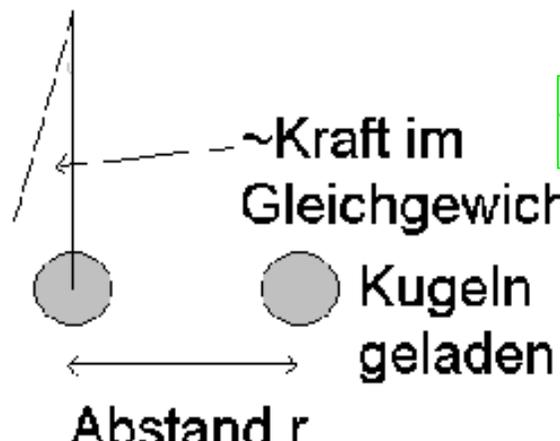
6. Elektrostatik

Aus den Experimenten, Reiben von Stäben etc.:
Kräfte: anziehend/abstoßend
Außerdem beobachten wir: Funken, Leuchten, etc.

6.1. Ladungen und Coulomb-Kraft

Mehr quantitativ: Versuch

Resultat: Kraft



$\sim Q_1 \sim Q_2 \sim \frac{1}{r^2} : [Q] = \text{Coulomb} = 1C, [r] = m$

oder

$$\Rightarrow K \sim \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$
$$K = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$

Dielektrizitätskonstante des Vakuums

Elementarladung, z.B. die Ladung des Elektrons:

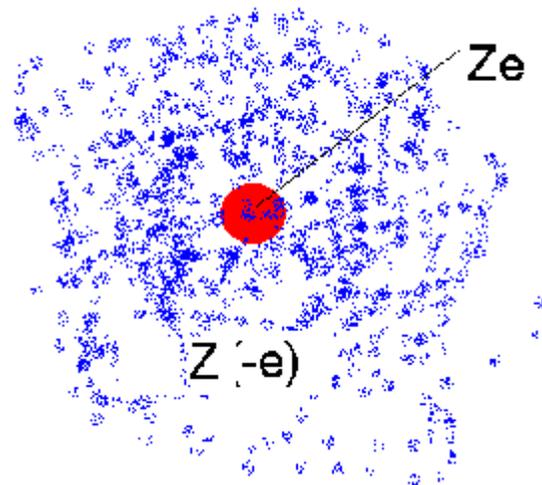
$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} C$$

Zur Einordnung mehr über elektrische Ladungen:

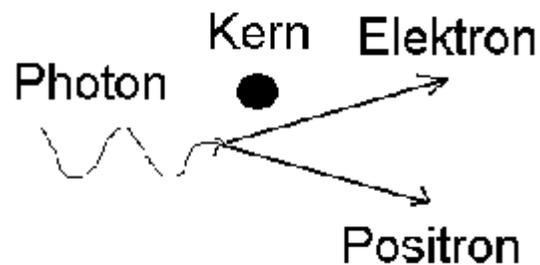
1. **Vorzeichen** + und -

2. Bei einem abgeschlossenen System: **Ladungserhaltung**

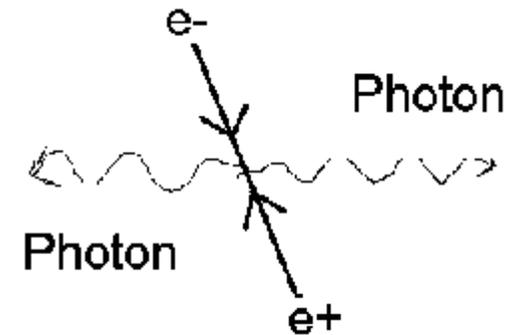
Atom



Paarbildung



Paarvernichtung



3. Vielfaches der Elementarladung \rightarrow
"gequantelt"

4. Ladung ist stets mit **Masse** verbunden

5. Elektrische Kraft zwischen zwei Punktladungen hat

die **Richtung ihrer Verbindungslinie**

6. Gleichnamige Ladungen: **abstoßend**
Ungleichnamige Ladungen: **anziehend**

7. Vergleich: Elektrische Kraft zur Gravitationskraft

Beispiel: 2 Elektronen : $q_1 = q_2 = 1.6 \cdot 10^{-19} C$

$$m_1 = m_2 = m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31} kg$$

spezifische Ladung

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}}{G \frac{m_1 m_2}{r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot G} \left(\frac{e}{m_0} \right)^2 : \left(\frac{e}{m_0} \right)$$

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{1.6^2 \cdot 10^{-38}}{4\pi 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 9.1^2 \cdot 10^{-62}} = 4.1675 \times 10^{42}$$

Dimensionsbetrachtung: $\frac{N \cdot m^2 \cdot kg^2 \cdot C^2}{C^2 \cdot N \cdot m^2 \cdot kg^2}$

8. Die **Kräfte**, die von den Ladungen ausgehen sind **additiv**

Superpositionsprinzip

6.2. Das Elektrische Feld

Coulombkraft: $\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{e}_r \cdot q : \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{e}_r = \vec{E}(r) = \frac{\vec{F}_C}{q}$

$\vec{E}(r)$: Elektrische Feldstärke $[E] = \frac{N}{C}$

Vektorfeld:

Im Plot sehen wir die

"Feldlinien"

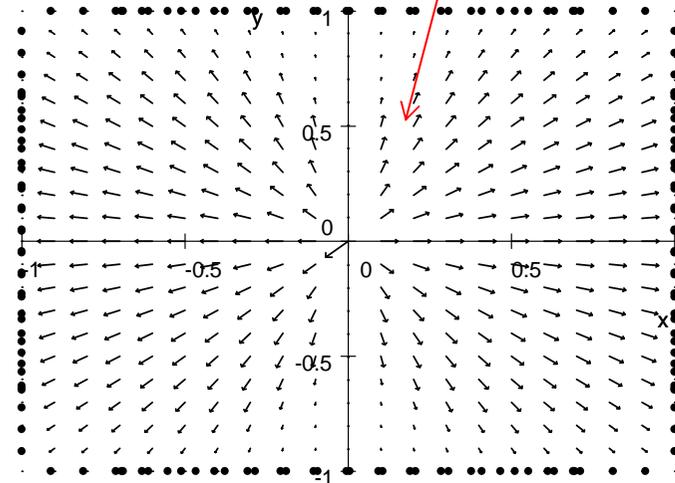
Integration über die

Oberfläche, z.B.

Kugeloberfläche ergibt:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \Phi,$$

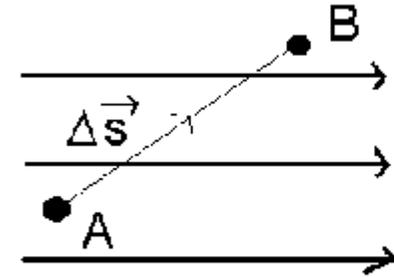
Gaußscher Satz



Fluss

6.3 Elektrisches Potential

$\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E}$ (Kraft auf Probeladung) bewirkt



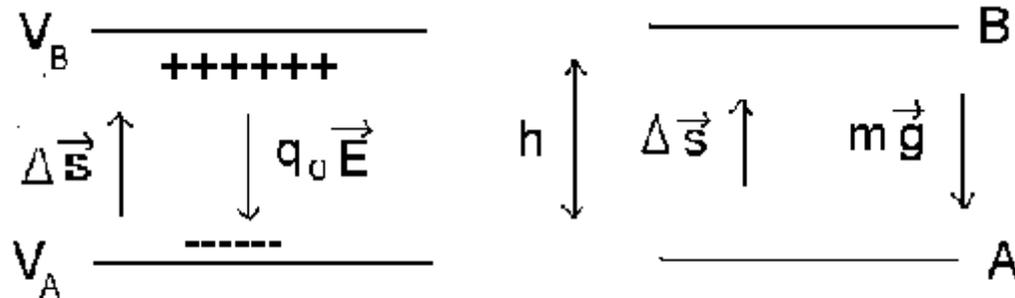
Es wird Arbeit geleistet: $q_0 : A \rightarrow B$

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} = q_0 \cdot \vec{E} \cdot \Delta \vec{s}$$

Definition: **Elektrische Potentialdifferenz**

$$V_B - V_A = \frac{W}{q_0}$$

(kann pos., neg. oder null sein)



hatten wir schon bei der Gravitation:

$V_A - V_B = \frac{q_0 \cdot \vec{E} \cdot \Delta \vec{s}}{q_0}$	$V_A - V_B = \frac{m \cdot \vec{g} \cdot \Delta \vec{s}}{m}$
$= - \vec{E} \cdot h$	$= - \vec{g} \cdot h$
$V_B - V_A = \vec{E} \cdot h$	$V_B - V_A = \vec{g} \cdot h$

in beiden Fällen ist das **Potential** in B höher!

$$\frac{W_{AB}}{q_0} = \vec{E} \cdot \Delta \vec{s} = \underbrace{V_A - V_B}_{\text{Potentialdifferenz zwischen A und B}} \quad \text{enthält nur Eigenschaften des Feldes}$$

Beliebiges Feld: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s}$

$$W_{AB} = q_0 \cdot \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{Wählt man } V_A = 0 \Rightarrow V_B \text{ nennt man das } \textbf{Potential}.$$

Für Felder, die mit $\sim 1/r^2$ abfallen, wählt man $V(\infty) = 0$

$$\vec{E} \xrightarrow{\text{Integration}} V \quad V \xrightarrow{\text{Differenziation}} \vec{E}; \quad \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}(V(r))}$$

Potential einer Punktladung:

Ausgangspunkt:

$$V(r_B) - V(r_A) = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

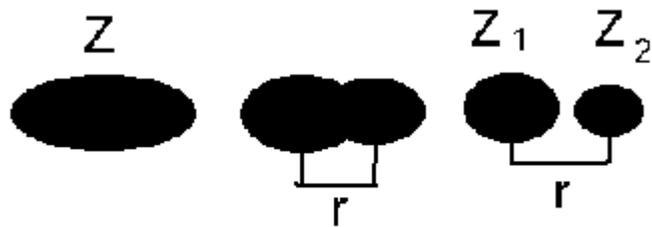
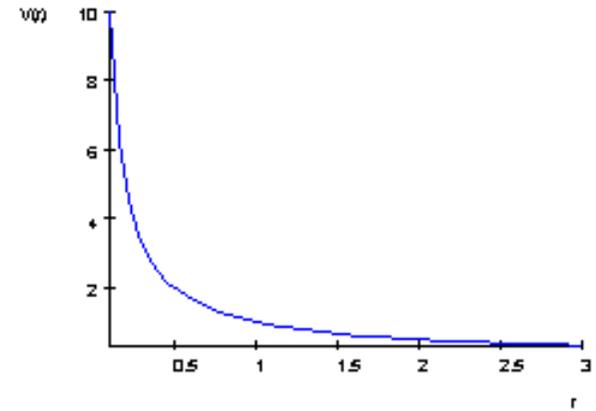
$$-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

mit $V(r \rightarrow \infty) = 0$
und $r_B = r \Rightarrow$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \quad \text{Coulomb-Potential}$$

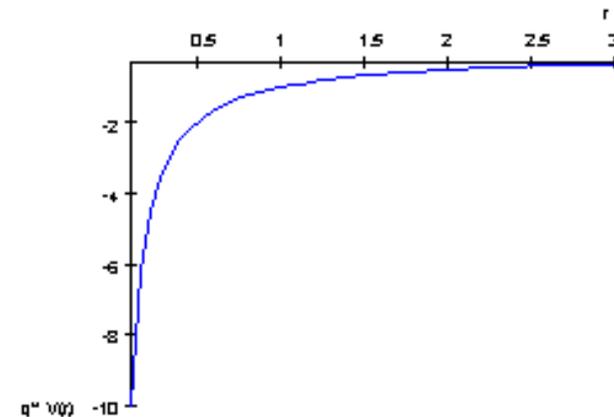
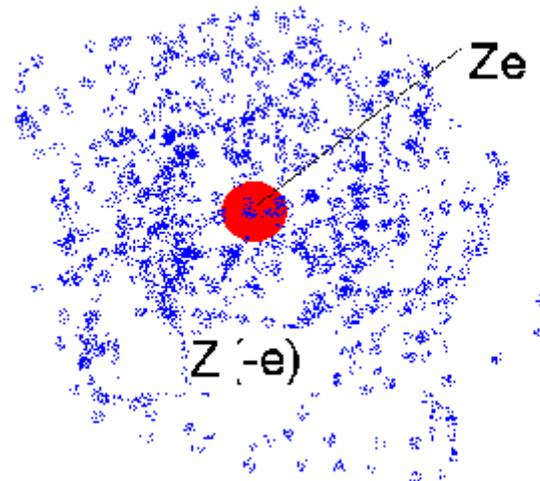
$V(r) \cdot e = \text{Potentielle Energie}$

z.B: bei der Kernspaltung



Bei einer negativen Ladung im Feld einer pos. Ladung:

z.B.: Wasserstoffatom



Bohrscher Radius a_0 der Elektronenverteilung im H-Atom :

Abschätzung

Aus der Unschärferelation: $P \sim h/(2\pi \cdot a)$

$$\hbar = 1.05457266 \times 10^{-34} \text{ J s} \quad \frac{1}{2} \cdot mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m \cdot a^2}$$

Totale Energie des Elektrons im Coulombfeld des Protons

$$E = \frac{\hbar^2}{2m \cdot a^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot a} \Rightarrow \text{Minimale Energie:}$$

$$\frac{dE}{da} = -\frac{\hbar^2}{m \cdot a^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot a^2} = 0 \Rightarrow$$

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot \hbar^2}{m \cdot e^2} = \frac{4 \cdot 3.1415 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot (1.05457266 \times 10^{-34})^2}{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (1.60217733 \times 10^{-19})^2} = 5.2946 \times 10^{-11} \text{ m}$$

Einsetzen in die Formel für E

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot 2 \cdot a_0} - \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a_0} = -\frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot 2 \cdot a_0} \\ &= -\frac{(1.60217733 \times 10^{-19})^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot 2 \cdot a_0} = -\frac{(1.60217733 \times 10^{-19})^2}{4 \cdot 3.1415 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 5.2946 \times 10^{-11}} = -2.1798 \times 10^{-18} \text{ J} \end{aligned}$$

$$1J = \frac{1}{1.60217733 \times 10^{-19}} = 6.2415 \times 10^{18} eV$$

"Elektronenvolt" Energieskala bei Atomen!

$$\Rightarrow E_0 = -2.1798 \times 10^{-18} \cdot 6.2415 \times 10^{18} = -13.605 eV$$

Hier: Elektron gebunden

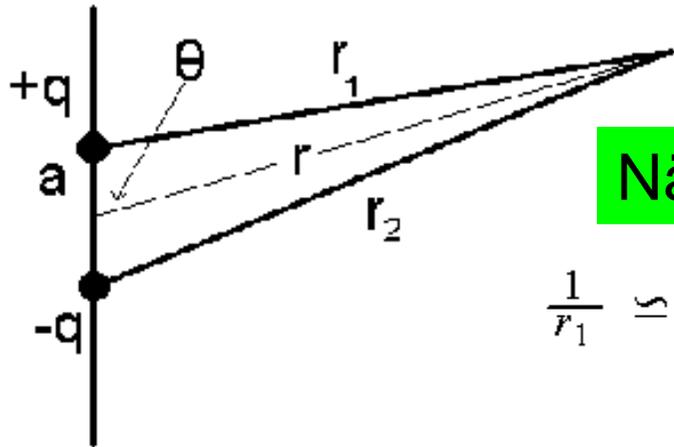
Zur "Loslösung" vom Proton ist eine Arbeit von 13.6 eV
nötig!

Verschiedene Materialien haben verschiedene
Loslösungsenergien!

Potential eines Dipols

Superpositionsprinzip, Potential

für das Beispiel:



$$\Phi = \sum_i \Phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

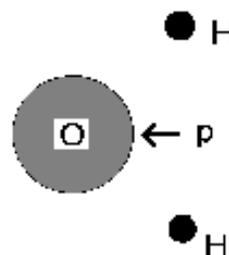
$$\Phi_1 + \Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q \cdot (r_1 - r_2)}{r_1 \cdot r_2} \right)$$

Näherung $r \gg 2a$

$$\frac{1}{r_1} \simeq \frac{1}{r - a \cdot \cos\theta} = \frac{1}{r(1 - \frac{a}{r} \cos\theta)} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \cos\theta \right)$$

analog: $\frac{1}{r_2} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{r} \cos\theta \right)$ $\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot 2a \cdot \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot \cos\theta}{r^2}$,

"Dipol": $p = q \cdot 2a$



Dipol:

Der Schwerpunkt von negativen und positiven Ladungen stimmen nicht überein!

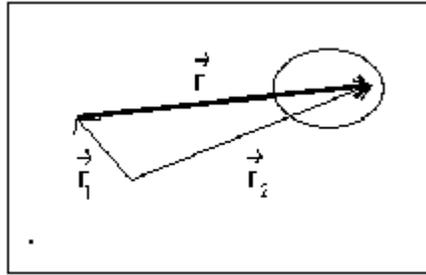
z.B.: H₂O: $p = 6.2 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$

Orientierung!

Kontinuierliche Ladungsverteilung:

a) räumlich

$$\Phi(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r)d\tau}{r}$$



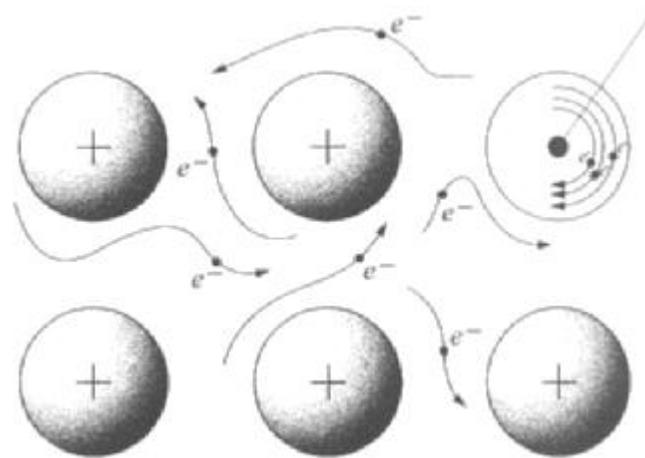
$$\rho(r) = \frac{\text{Ladung}(dq)}{\text{Volumenelement}(d\tau)}$$

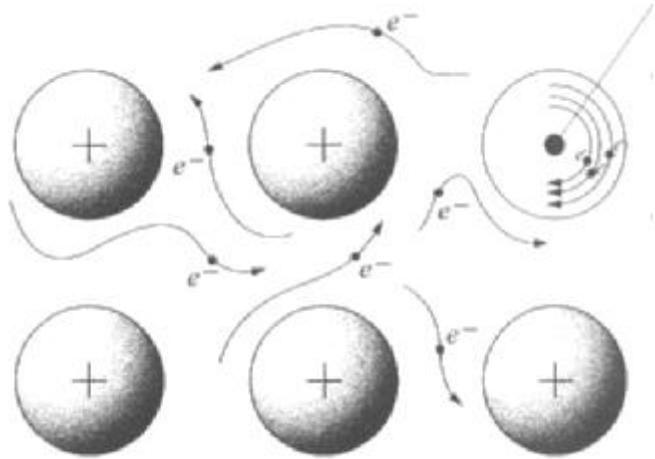
b) eben

$$\sigma(r) = \frac{\text{Ladung}(dq)}{\text{Fläche}(dA)} \quad \Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(r)dA}{r}$$

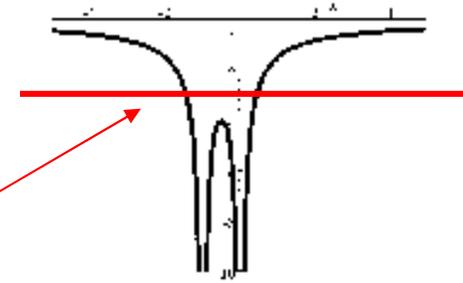
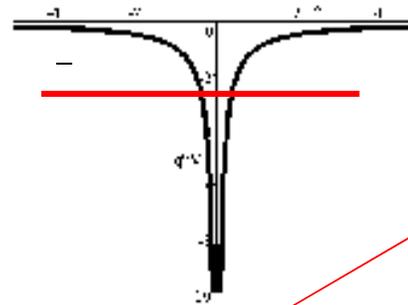
6.4. Elektrische Ladungen auf Leiteroberflächen

"Leiter": Ladungen sind frei beweglich
Dazu Betrachtung der Energie der Elektronen:

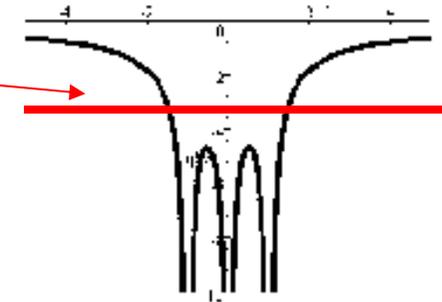




Atomkerne: Potentialtopf der Elektronen

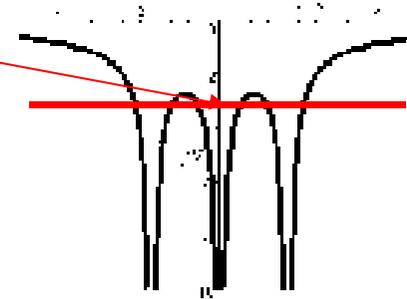
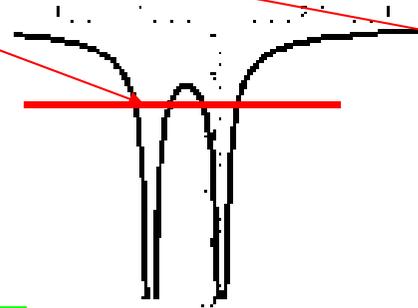
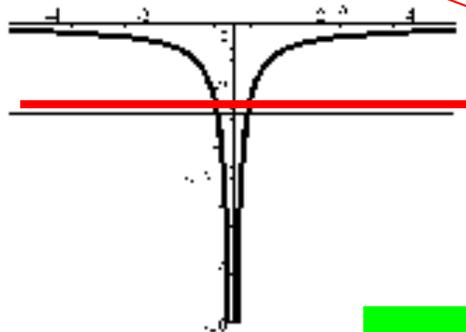


werden "frei" beweglich



Oder bleiben lokalisiert

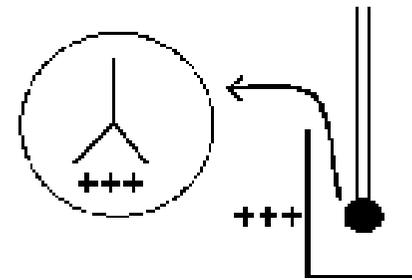
Leiter z.B.: Metall



Isolator

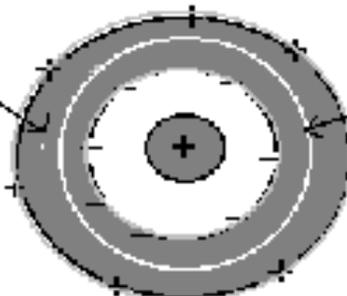
Beobachtungen eines Experiments:

Aus dem Inneren des Bechers kein Unterschied, ob berührt oder nicht!



Ladungsübertrag aus einem Becher !??

Leiter



Geschlossene Fläche im Leiter

Leiter: $|\vec{E}| = 0$

$$\Rightarrow \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0! \rightarrow$$

Die eingeschlossene Ladung ist Null! Leiter im elektrostatischen Gleichgewicht



Gaußsche Oberfläche

$$\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0$$

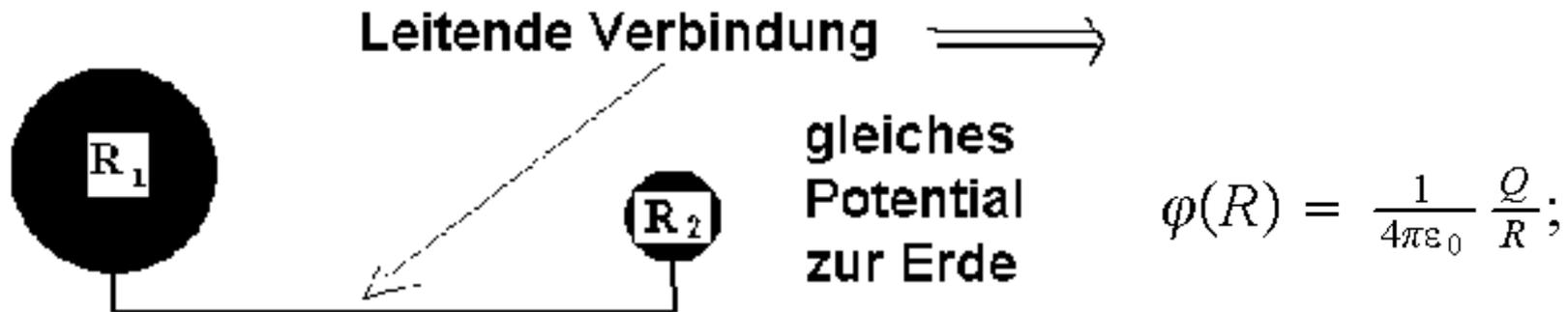
$$|\vec{E}| = 0 \quad \text{im Inneren}$$

anderenfalls bewegte Ladungen \Rightarrow Strom

Jede Überschußladung muß an der Oberfläche sein!

Dabei steht \vec{E} senkrecht auf der Oberfläche!

Verteilung der Ladung auf der Oberfläche:
Beispiel Kugeln:



Verbindung: $\varphi(R_1) = \varphi(R_2) \implies \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$

Oberflächenladungsdichte:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \implies \frac{Q_1}{4\pi R_1^2}, \frac{Q_2}{4\pi R_2^2}$$

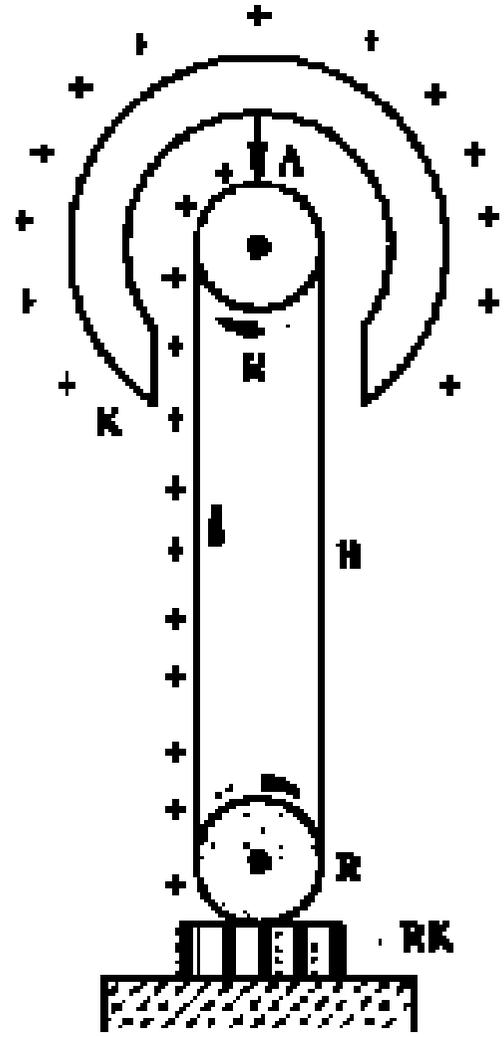
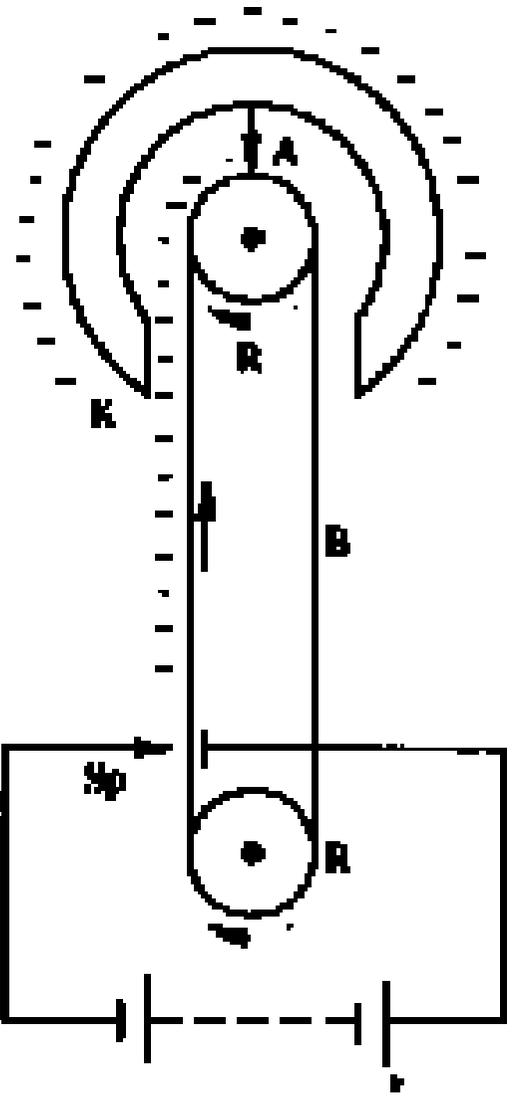
mit $\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \implies \frac{R_1 \cdot Q_1}{R_1^2} = \frac{R_2 \cdot Q_2}{R_2^2}$

Die Ladungsdichten verhalten sich umgekehrt wie die Krümmungsradien!

oder $\frac{R_1 \cdot Q_1}{4\pi R_1^2} = \frac{R_2 \cdot Q_2}{4\pi R_2^2} \implies \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$



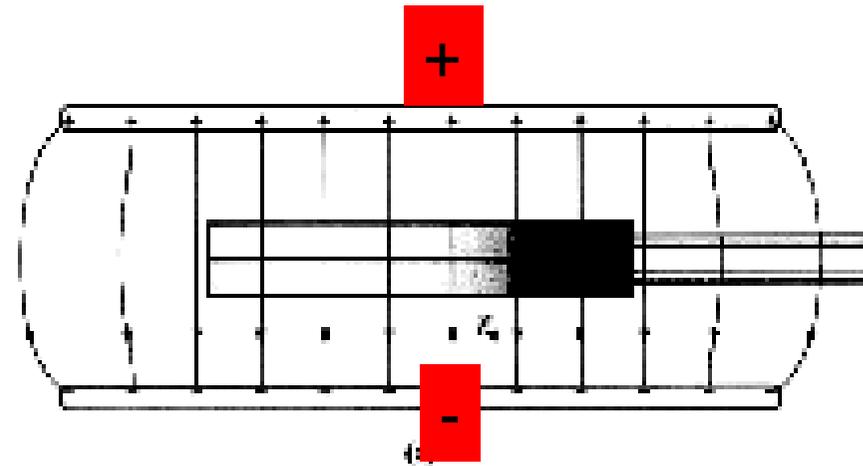
Beispiel: van de Graaf



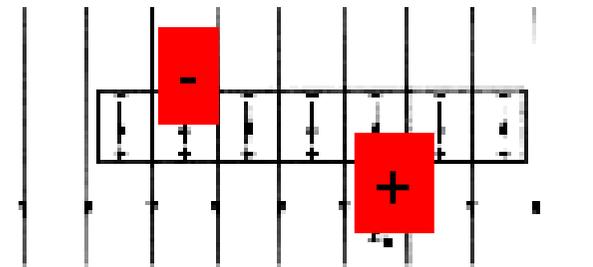
6.5 Influenz

Aus folgender Demonstration:

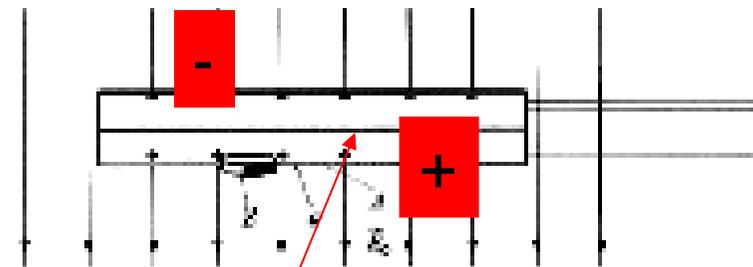
Influenzierte Ladungen können getrennt werden!



+



(b)

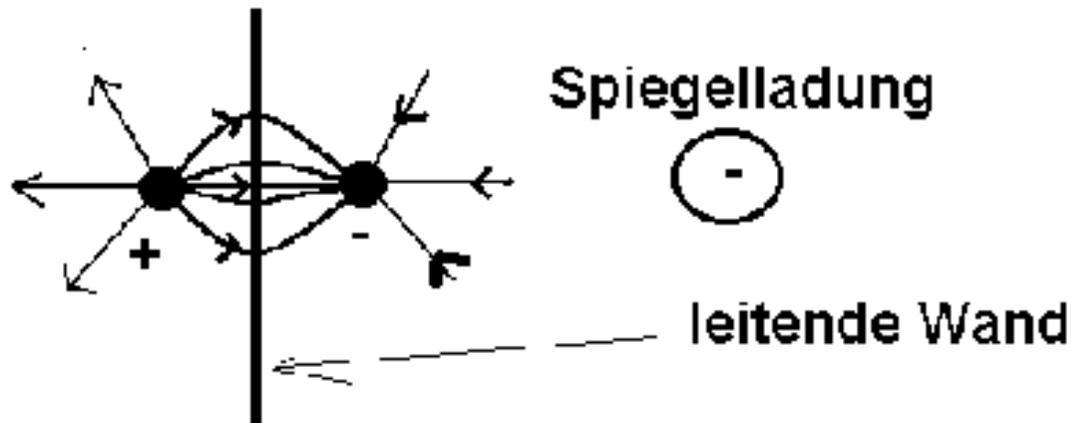


(c)

trennen

Influenzierte Ladungen können getrennt werden!

Punktladung vor Metallwand



Feldlinien stehen senkrecht auf der Leiteroberfläche!

Kraft auf die positive Ladung:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2}$$

d: Wandabstand der Ladung

Bildkraft

Erklärung für die Anziehung der Alu-Hülse,
1. Stunde, durch den Plastikstab