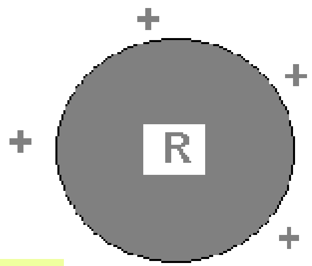
6.6. Kapazität



Kugel mit Ladung Q gegen

∞

weit entfernte Wand:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}; U \sim Q$$

$$Q = C \cdot U,$$

mit C als Kapazität

$$[C] = Farad = \frac{C}{V}$$

C hängt nur von der
Gestalt des Leiters ab:

Bei Kugel mit Radius R

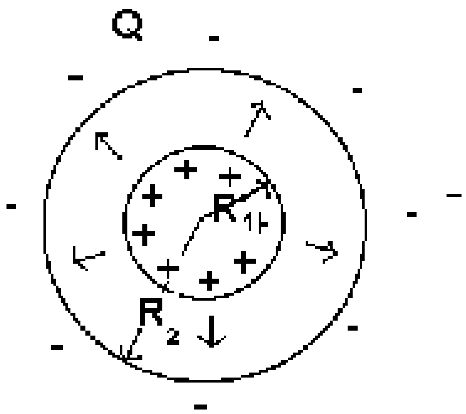
$$C = 4\pi\varepsilon_0 \cdot R$$

Kondensatoren:

Bei vorgegebener Spannung:
Trennung von Ladung hängt
von C ab!

Kugelkondensator

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r;$$ Potential: $$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$



Spannung U zwischen den beiden Kugelschalen:

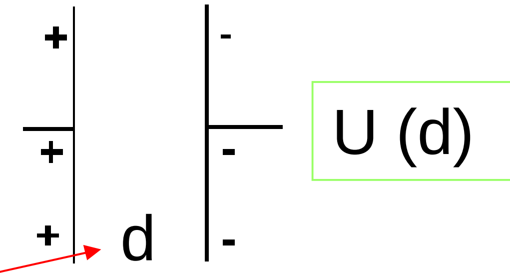
$$U = \varphi_1(R_1) - \varphi_1(R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2}\right\}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2-R_1}{R_1 \cdot R_2} = \frac{Q}{C} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2-R_1}{R_1 \cdot R_2}$$

Spezialfall: $R_1 \approx R_2 = R$ und damit $\Delta R \lll R$

$$C = \varepsilon_0 \frac{4\pi R^2}{\Delta R} = \varepsilon_0 \frac{A}{\Delta R}$$

Plattenkondensator:



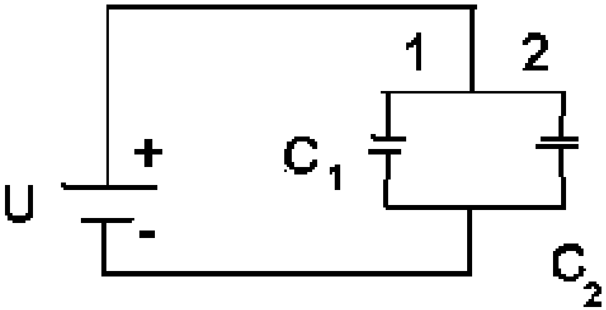
Teilstück eines Kugelkondensators mit R → ∞

$\Rightarrow$ $\boxed{C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}}$ d ist der Plattenabstand

Potentialdifferenz: $U = \frac{Q}{C}$

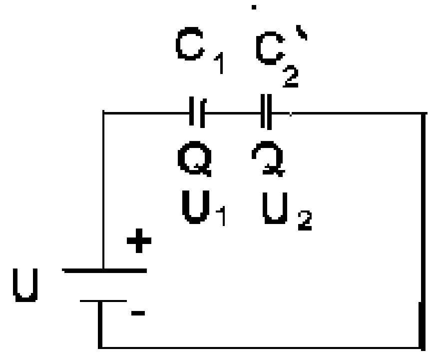
Elektrisches Feld: $$|\vec{E}| = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{d} = \frac{U}{d} \Rightarrow U = E \cdot d$$

Schaltung von Kondensatoren



$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 \bullet U + C_2 \bullet U = C \bullet U$$

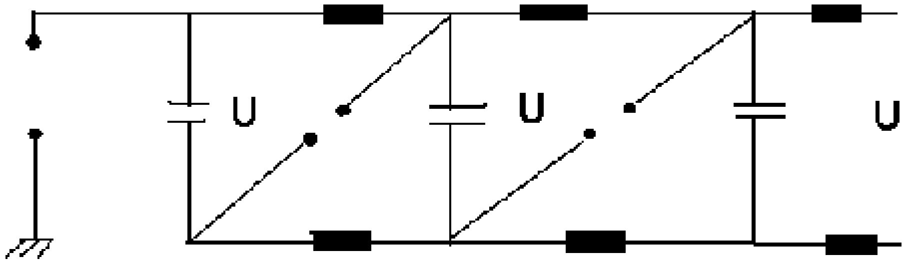
mit $C_1 + C_2 = C$



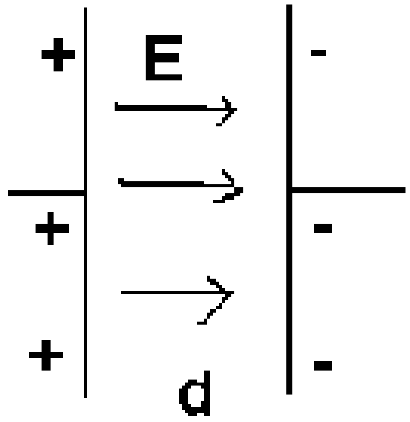
$$U_1 + U_2 = U; \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C}$$

Beispiel: Parallel-seriell

Marx-Generator



6.7. Energie im elektrischen Feld



$$U = \frac{q}{C}; E = \frac{U}{d}$$

Weitere Aufladung dq $\Rightarrow$ Arbeit nötig:

$$dW = F \cdot d = dq \cdot E \cdot d = U \cdot dq$$

$$W = \int_0^Q U \cdot dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q \cdot dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

oder

$$W = \frac{1}{2} C \cdot U_0^2$$

mit $U_0 = \frac{Q}{C}$

Beispiel: $U_0 = 1000V$

$C = \mu F(arad)$ $\boxed{\Rightarrow W = 0.5J = 0.5Ws}$

1Ws:Wattsekunde

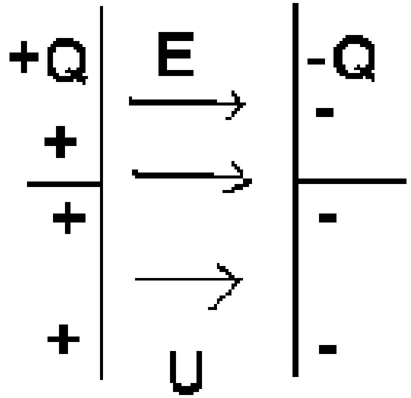
Wo sitzt die Energie?

$$W = \frac{1}{2} C \cdot U_0^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A}{d} E_0^2 \cdot d^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot E_0^2 \cdot V$$

V: Volumen des Feldbereichs!

Energie steckt im elektrischen Feld

Definition der Verschiebungsdichte:

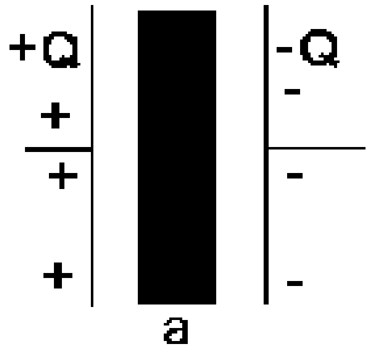


$$Q = C \cdot U = \varepsilon_0 \frac{A}{d} E \cdot d = \varepsilon_0 \cdot A \cdot E$$

Oberflächendichte: $\sigma = \frac{Q}{A} = \varepsilon_0 \cdot E = D_0$

$\boxed{\vec{D}_0 = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}}$ Verschiebungsdichte des Vakuums

6.8.Materie im elektrischen Feld



Materie: Leiter, Plattenabstand:d

$$Q = C_0 \cdot U_0 ; U_0 = E \cdot d$$

Einbringen des Leiters: Spannung sinkt ab

mit Leiter: $U = E(d-a) \Rightarrow U = \frac{d-a}{d} \cdot U_0$

da Q= konstant $C = \frac{d}{d-a} \cdot C_0$

d.h.: die Kapazität erhöht sich!

Nichtleiter im elektrischen Feld!

Glas	Ů=5-10
Wasser	81.1 (18°)
Luft	1.000576

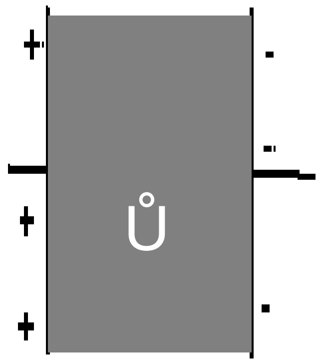
Ohne Dielektrikum: $Q = C_0 \cdot U_0$

mit: $U = \frac{Q}{C} = \frac{C_0 \cdot U_0}{C} = \frac{U_0}{\varepsilon}$

Dielektrizitätskonstante $\boxed{\varepsilon = \frac{C}{C_0}}$

$C = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$ für den Plattenkondensator

Wie können wir uns das vorstellen?



Ohne Dielektrikum: $\Phi_0 = E_0 \cdot A = \frac{Q_0}{\varepsilon_0} \ : *$

Mit Dielektrikum: $U = \frac{U_0}{\varepsilon} \Rightarrow E = \frac{E_0}{\varepsilon}$

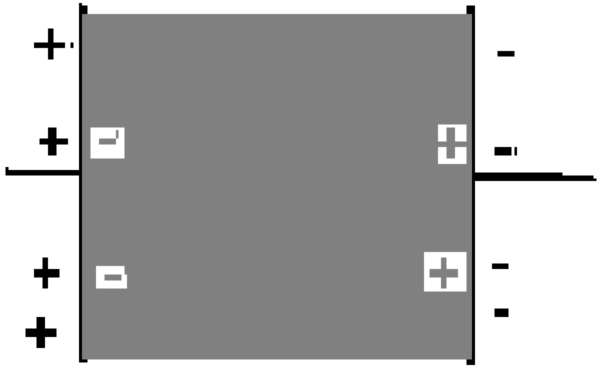
$\Phi = E \cdot A = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Phi = \frac{E_0}{\varepsilon} \cdot A = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \Rightarrow Q = \frac{Q_0}{\varepsilon}$

Auf den Platten Q_0!

Differenz Q_P :

Feldlinien enden auf der Oberfläche des Dielektrikums

$$Q_P = Q_0 - Q = Q_0\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \varepsilon_0 \cdot \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} A \cdot E_0;$$



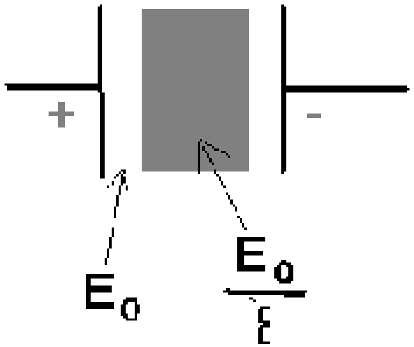
Oberflächenladungsdichte auf dem Dielektrikum

$$\sigma_P = \frac{Q_P}{A} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \cdot E_0 = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon - 1) \cdot E$$

Elektrisches Dipolmoments des Isolators:

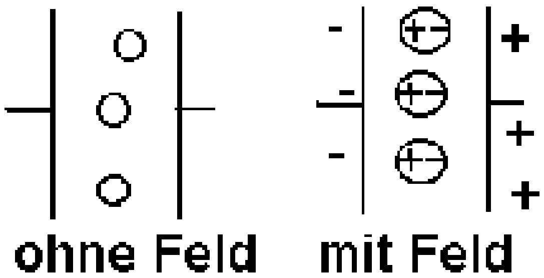
$$\vec{P} = Q_P \cdot \vec{d} = \sigma_P \cdot A \cdot \vec{d} = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon - 1) \cdot V \cdot \vec{E}$$

Polarisation: $\vec{p} = \frac{\vec{P}}{V}$ $\quad \vec{p} = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon - 1) \cdot \vec{E} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E} - \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$



Polarisation:

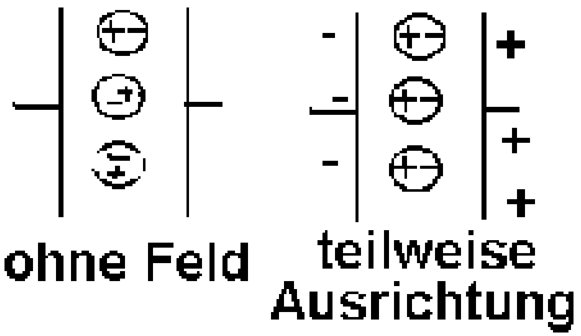
a) Moleküle ohne permanentes Dipol-moment



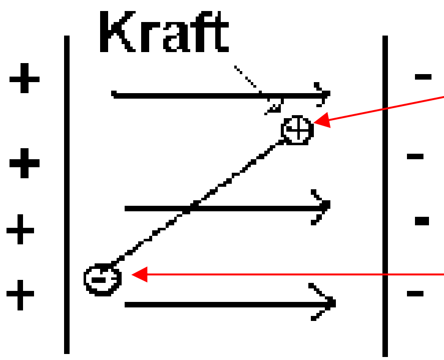
Elektrische Dipolmomente werden influenziert!

"Verschiebungspolarisation"

b) Moleküle mit permanenten Dipolmoment



"Orientierungspolarisation"



Kraft: $\vec{F} = Q \cdot \vec{E};$

l: Entfernung der Ladungen

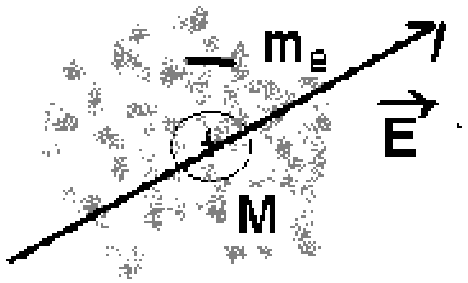
$$\vec{F}' = -Q \cdot \vec{E};$$

$$\Rightarrow Drehmoment : \vec{T} = \vec{l} \times \vec{F} = Q \cdot \vec{l} \times \vec{E}$$

mit $: Q \cdot \vec{l} = \vec{P} :$ elektrisches Dipolmoment

$$\boxed{\vec{T} = \vec{P} \times \vec{E}}$$

Polarisierbarkeit von Atomen in elektrischen Wechselfeldern:



$\vec{E}$: äußeres Feld, Massen M, m_e
mit M >> m_e

Das Elektron wird durch die Kraft $F = q \cdot E$
aus der Gleichgewichtslage gebracht

$$m_e \frac{d^2x}{dt^2} + m_e \cdot \omega_0^2 \cdot x = q \cdot E_x^0 \cdot \cos\omega t$$

Lösung mit $x=x_0 * \cos\omega t$

$$\omega^2 \cdot m_e \cdot x_0 \cdot \cos\omega t + m_e \cdot \omega_0^2 \cdot x_0 \cdot \cos\omega t = q \cdot E_x^0 \cdot \cos\omega t$$

$$x_0 = \frac{q \cdot E_x^0}{m_2(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Der Auslenkung entspricht ein oszillierendes Dipolmoment

$$p_x = q \cdot x$$

$m_e = m_2$

$$\Rightarrow p_x = \frac{q^2 \cdot E_x}{m_2(\omega_0^2 - \omega^2)} = \varepsilon_0 \cdot \alpha(\omega) \cdot E_x$$