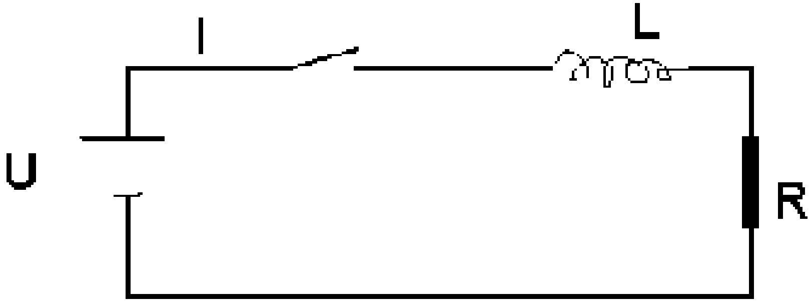
Stromanstieg/ abfall eines Kreises mit L und R



Summe aller Spannungen=0

$$U - I \bullet R - L \bullet \frac{dI}{dt} = 0$$

oder $$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}\left(I - \frac{U}{R}\right) = 0 \ast$$

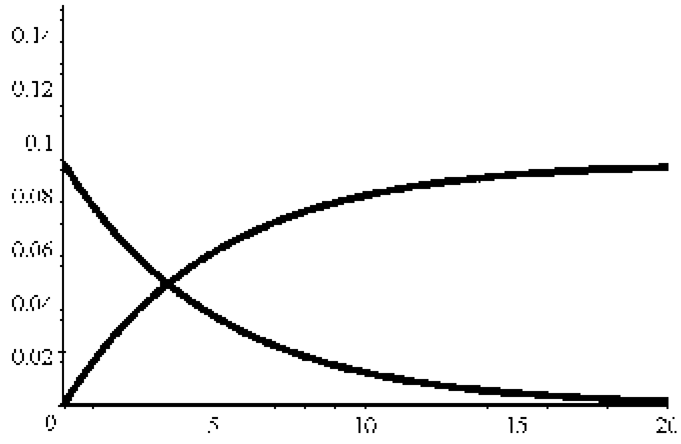
mit $I - \frac{U}{R} = x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dI}{dt}$ oder für $\frac{dx}{dt} + \frac{R}{L}x = 0$

oder: $\frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}dt \Rightarrow \ln x = -\frac{R}{L}t + \ln A($ Integrationskonstante)

$\Rightarrow x = A \bullet e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow I = \frac{U}{R} + A \bullet e^{-\frac{R}{L}t}$ für t=0 "Einschalten", $I = 0$

$$0 = \frac{U}{R} + A \Rightarrow A = -\frac{U}{R}$$

damit $\Rightarrow I = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$



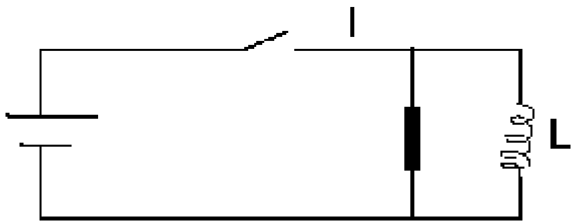
für t=0 "Ausschalten":

$t = 0, U = 0 \qquad \Rightarrow A = I_0$

und damit $I = I_0 \bullet e^{-\frac{R}{L}t}$

8.10. Energie und Energiedichte im Magnetfeld

Energie des Abschaltstroms: Aus dem Magnetfeld der Spule



Zur Erinnerung: Leistung L=$U \bullet I$

oder mit U=R • I $\quad L = I^2 \bullet R$

$$W = \int_0^\infty I^2 \bullet R \bullet dt = \int I_0^2 \bullet e^{-2\frac{R}{L}} \bullet R \bullet dt =$$

$$= R \bullet I_0^2 \bullet \int_0^\infty e^{-2\frac{R}{L}} \bullet dt = R \bullet I_0^2 \left[-\frac{L}{2R} e^{-\frac{2R}{L}t} \right]_0^\infty = \frac{1}{2} L \bullet I_0^2$$

Magnetische Feldenergie einer Spule

Für eine langgestreckte Spule: $L = \mu_0 \frac{N^2 \bullet A}{l}$

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 \bullet A}{l} \bullet I^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\mu_0 \frac{N \bullet I}{l}}_{B} \bullet \underbrace{\frac{N \bullet I}{l}}_{\frac{B}{\mu_0}} \bullet \underbrace{A \bullet l}_{Feldvol.\,V}$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \bullet V \Rightarrow$$

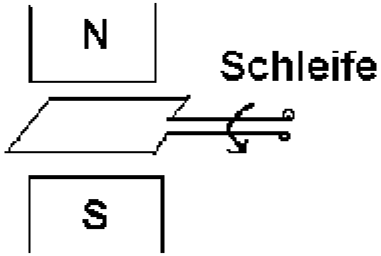
Energiedichte: $\boxed{w_M = \frac{B^2}{2 \bullet \mu_0}}$

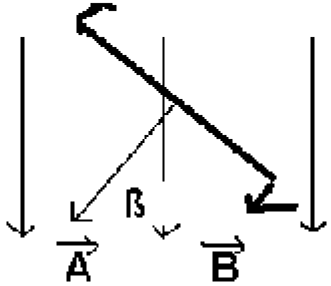
zum Vergleich :
Elektrisches Feld

$$\boxed{w_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2}$$

9. Wechselspannung und Wechselstrom

9.1.Exp:



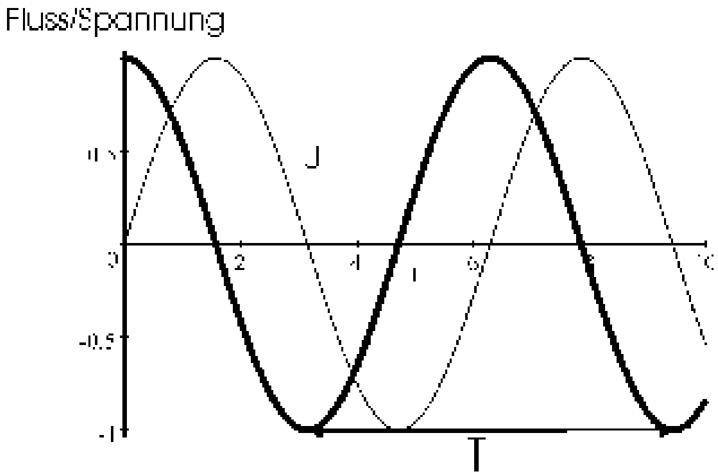


$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A}; A$: Fläche der Spule,B:Feld=konst.

Drehen der Schleife: $\Phi = B \cdot A \cdot \cos\beta$; sei $\beta = \omega t$

$$\Phi(t) = B \cdot A \cdot \cos\omega t \Rightarrow U_{ind} = U_{\sim} = U(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega \cdot B \cdot A \cdot \sin\omega t$$

bei einer Spule $U(t) = N \cdot \omega \cdot B \cdot A \cdot \sin\omega t$



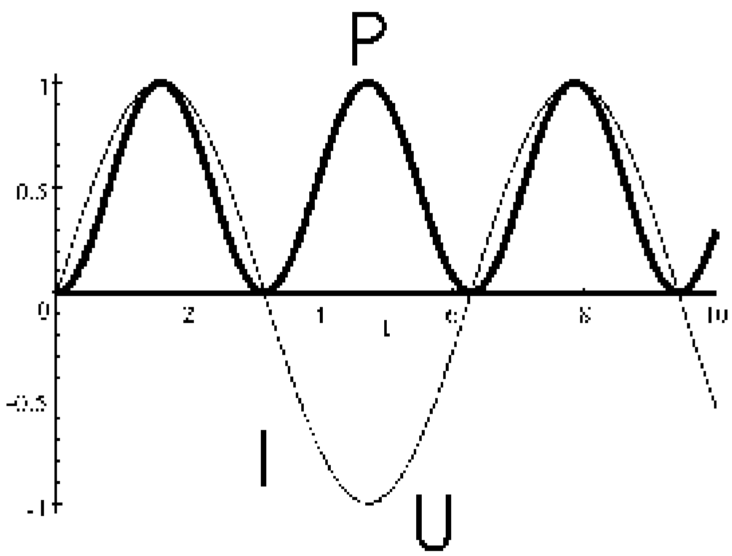
$$\nu = \frac{1}{T}, \omega = 2\pi\nu$$

9.2. Effektivwerte von Strom und Spannung

$$\underbrace{I_\sim}_{\text{Momentanwert}} = \frac{U_\sim}{R} = \underbrace{\frac{U_0}{R}}_{= I_0(\text{ Scheitelwert})} \sin\omega t$$

Ohmscher Widerstand: Spannung und Strom in Phase

Leistungsverbrauch: $P = U \cdot I = U_0 \cdot \sin\omega t \cdot I_0 \cdot \sin\omega t = \frac{U_0^2}{R} \sin^2\omega t$



Mittelwert: $\overline{P} = \frac{U_0^2}{R} \cdot \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\omega t \cdot dt}_{0.5}$

$$= \frac{1}{2}\frac{U_0^2}{R} = \frac{1}{2}P_0$$

Def.: $\overline{P} = \frac{U_{eff}^2}{R}$ mit

$$U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}U_0; I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}I_0$$

Aus der Steckdose: $U_{eff} = 220V \Rightarrow U_0 = 311V$

9.3. Wechselstromwiderstände

Ex: Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung

Induktivität

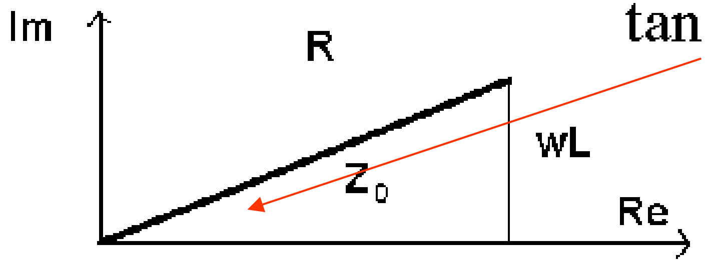
$$U = U_L + U_R = L \cdot \dot{I} + R \cdot I$$

Ansatz: $U = U_0 \cdot e^{i\omega t}$ $\quad I = I_0 \cdot e^{i(\omega t - \varphi)}$ $\quad \dot{I} = i\omega \cdot I_0 \cdot e^{i(\omega t - \varphi)} = i\omega \cdot I$

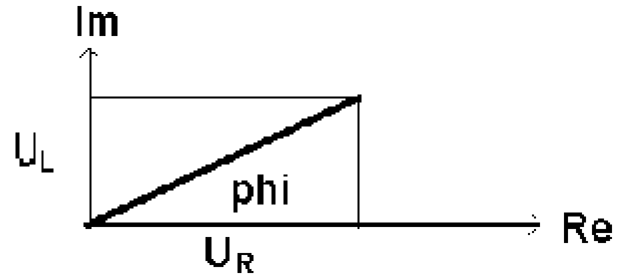
$$\Rightarrow U = \underbrace{(R + i\omega L)}_{\text{Komplexer Widerstand } Z} \cdot I$$

$$U = Z \cdot I; Z = \frac{U}{I} = \frac{U_0}{I_0} e^{i\varphi} = Z_0 e^{i\varphi}$$

Für Strom und Spannung:



$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}$$



$$U_L = i\omega L \cdot I \Rightarrow$$

Strom hingt der Spannung nach: $\boxed{\varphi}$

Leistung: $P(t) = U \cdot I = U_0 \cdot \cos\omega t \;\; I_0 \cdot \cos(\omega t - \varphi)$

Zeitlicher Mittelwert: $\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t) \cdot dt$ $\qquad \boxed{\overline{P} = \frac{1}{2} P_0 \cdot \cos\varphi}$

Grenzfälle:1)L=0 $\Rightarrow \varphi = 0$ 2)R=0 $\Rightarrow \varphi = 90^0$

Strom hingt Spannung 90 ęnach $\overline{P} = 0$ aber Blindleistung!

Kapazität:

$$U = U_c + U_R, Q = C \cdot U_C \Rightarrow U_C = \frac{1}{C} \cdot Q = \frac{1}{C}\int I \cdot dt$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{C}\int I \cdot dt + R \cdot I$$

$\dot{U} = \frac{1}{C} I + R \cdot \dot{I} \;\; *$ Ansatz: $U = U_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \dot{U} = i\omega U_0 e^{i\omega t} = i\omega U$

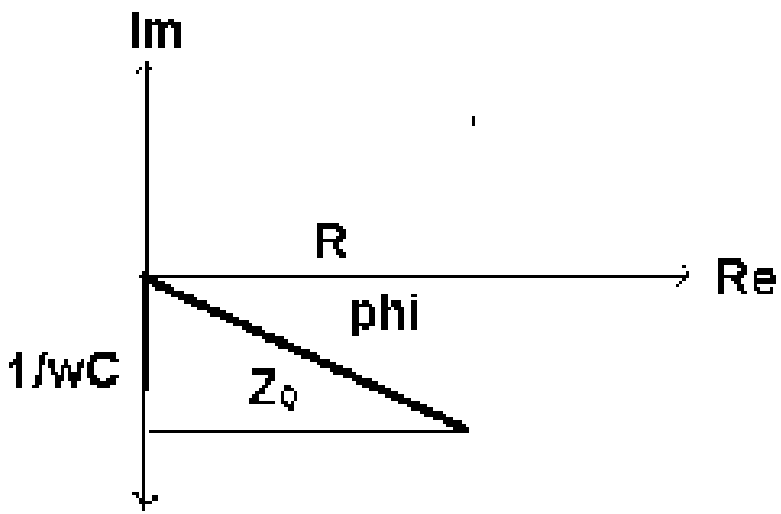
$$I = I_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \Rightarrow \dot{I} = i\omega I_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = i\omega I \quad * \Rightarrow i\omega U = \frac{1}{C} I + R \cdot i\omega I$$

$U = (R - i\frac{1}{\omega C})I; Z = (R - i\frac{1}{\omega C})$: komplexer Widerstand

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_0}{I_0} e^{-i\varphi} = Z_0 e^{-i\varphi}$$

Strom eilt Spannung voraus!
Auch hier

$$\overline{P} = \tfrac{1}{2} P_0 \cdot \cos\varphi$$



Grenzfall: R=0 Strom eilt Spannung um 90 ęvoraus!

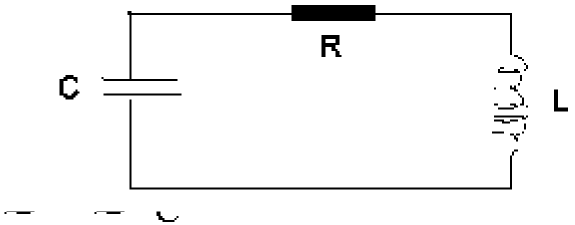
9.4. Elektrische Schwingkreise

Siehe auch Mechanik!

a) Ungedämpfter Schwingkreis

Energiesatz:

$$\underbrace{W_C}_{\frac{1}{2}CU^2} + \underbrace{W_L}_{\frac{1}{2}LI^2} = konst.$$



Differenzieren nach t:

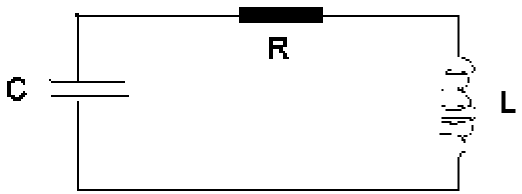
$$\frac{1}{C}Q + L\cdot\dot{I} = 0$$

Differenzieren nach t: $\frac{1}{C}\dot{Q} + L\cdot\ddot{I} = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\ddot{I} + \frac{1}{LC}I = 0}$

Lösung mit $I = I_0 e^{i\omega_0 t}$ mit $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

b) Gedämpfte Schwingungen

R: Energie geht in Wärme:



$$-\frac{d}{dt}\{W_C + W_L\} = I^2R$$

$$-Q\cdot\dot{Q}\frac{1}{C} - L\cdot I\cdot\dot{I} = I^2R$$

$$\frac{1}{C}Q + L\cdot\dot{I} + IR = 0$$

Differenzieren: $\frac{1}{C}\dot{Q} + L\ddot{I} + R\dot{I} = 0$ oder $L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0$

Schwingungsgleichung für den Strom!

Vergleich mit der Mechanik: $Q \triangleq x; \vec{I} \triangleq \vec{v};$ *sieht man aus*

$E_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}; E_B = \frac{1}{2}LI^2$ $m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = 0 \Rightarrow L \triangleq m, k \triangleq R, \frac{1}{C} \triangleq D$

Lösung: $I = I_0 e^{-\delta t} e^{\pm i\omega t}; \delta = \frac{R}{2L}; \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

$\boxed{\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{CR^2}{4L}} \Rightarrow}$ 3 Fälle: a) $R^2 \prec \frac{4L}{C}$: Schwingfall

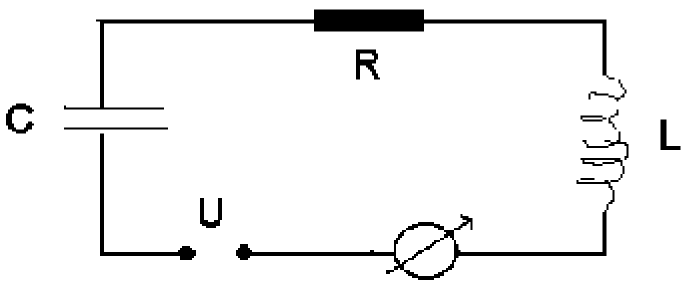
b) $R^2 = \frac{4L}{C}$: Aperiodischer Kriechfall $I = I_0 \bullet e^{-\delta t}$

c) $R^2 \succ \frac{4L}{C}$: Kriechfall: ω ist imaginär $I = I_0 \bullet e^{-(\delta + \omega)t}$

Güte: $Q = \frac{\omega}{2\delta}$ s. Mechanik! Vorlesung 16

c) Erzwungene Schwingung

$U = U_0 \sin \omega t$



Leistungsbilanz:

$$\frac{d}{dt}\{W_C + W_L\} + I^2 R = U_0 \bullet I \bullet \sin\omega t$$

$$Q \bullet \dot{Q} \frac{1}{C} + L \bullet I \bullet \dot{I} + I^2 R = U_0 \bullet I \bullet \sin\omega t$$

$$Q \bullet \frac{1}{C} + L \bullet \dot{I} + I \; R = U_0 \bullet \sin\omega t \; : \; \mathit{Differenzieren} \Rightarrow$$

$$L \ddot{I} + R \dot{I} + \frac{1}{C} I = \omega \bullet U_0 \bullet \cos\omega t$$

$$\ddot{I} + \frac{R}{L} \bullet \dot{I} + \omega_0^2 \bullet I = \frac{1}{L}\omega \bullet U_0 \bullet \cos\omega t; *$$

Lösung gesucht mit der Form:

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi) = I_0 \bullet [\sin\omega t \cos\varphi - \cos\omega t \sin\varphi]$$

$$\dot{I} = \omega \bullet I_0 \cos(\omega t - \varphi) = \omega \bullet I_0 [\cos\omega t \cos\varphi + \sin\omega t \sin\varphi]$$

$$\ddot{I} = -\omega^2 I_0 \sin(\omega t - \varphi) = -\omega^2 I_0 [\sin\omega t \cos\varphi - \cos\omega t \sin\varphi]$$

Einsetzen in $*$: $I_0[-\omega^2 \sin\omega t \cos\varphi + \omega^2 \cos\omega t \sin\varphi] +$

$\frac{R}{L} I_0[\omega \cos\omega t \cos\varphi + \omega \sin\omega t \sin\varphi] +$

$$\omega_0^2 I_0 \cdot [\sin\omega t \cos\varphi - \cos\omega t \sin\varphi] = \frac{1}{L}\omega \cdot U_0 \cdot \cos\omega t$$

Gilt für "alle" Zeiten → Koeffizienten von sin und cos auf beiden Seiten der Gleichung gleich!

$$I_0[-\omega^2 \cos\varphi + \frac{R}{L}\omega \sin\varphi + \omega_0^2 \cos\varphi] = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi$$

$$I_0[\omega^2 \sin\varphi + \frac{R}{L}\omega \cos\varphi - \omega_0^2 \sin\varphi] = \frac{1}{L}\omega \cdot U_0$$

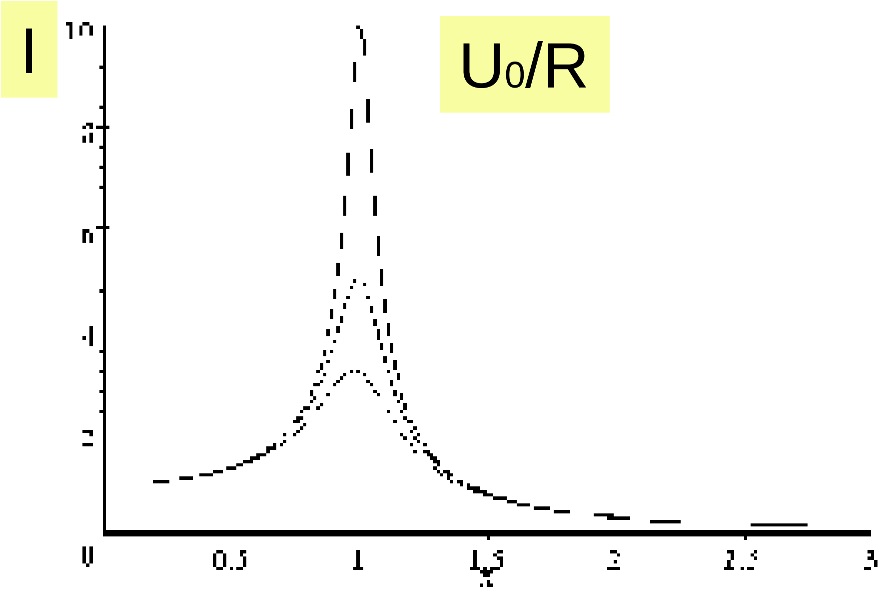
$$\tan\varphi = \frac{\omega^2-\omega_0^2}{\frac{R\omega}{L}}; \sin\varphi = \frac{\omega^2-\omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\frac{R^2\omega^2}{L^2}}}; \cos\varphi = \frac{\frac{R\omega}{L}}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\frac{R^2\omega^2}{L^2}}}$$

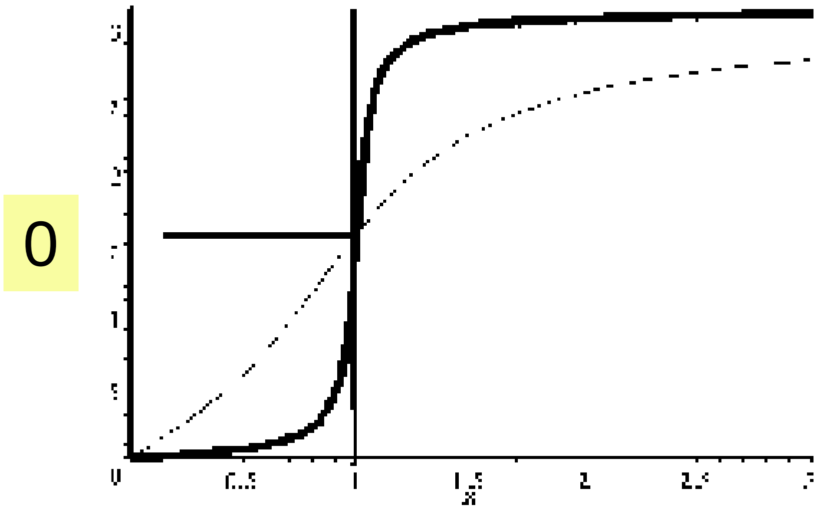
$$I_0 = \frac{\frac{1}{L}\omega \cdot U_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\frac{R^2\omega^2}{L^2}}}$$

In der Resonanz:

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}, \varphi = 0$$

$$\Rightarrow I = \frac{U_0}{R} \cdot \cos\omega_0 t$$





Spannung an R: $U_R = R \cdot I = U_0 \cdot \cos\omega_0 t$

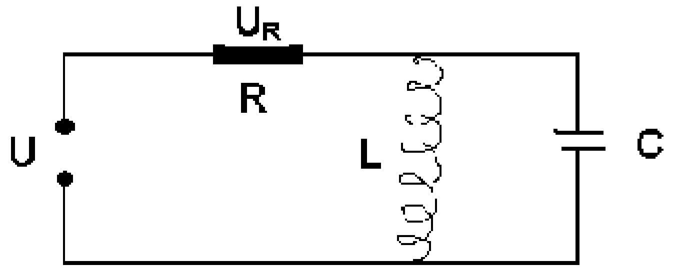
........an L: $U_L = L \cdot \dot{I} = -\omega_0 \cdot L \frac{U_0}{R} \sin\omega_0 t = \boxed{-\frac{U_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \sin\omega_0 t}$

........an C: $U_C = \frac{1}{C} Q = \frac{1}{C}\int I \cdot dt = \frac{U_0}{R \cdot C}\int \cos\omega_0 t \cdot dt$

$$= \frac{1}{\omega_0 \cdot C}\frac{U_0}{R} \sin\omega_0 t = \boxed{\frac{U_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \sin\omega_0 t}$$

Im Resonanzfall: $\boxed{U_L = -U_C}$

Parallelschwingkreis:



Gesamter Widerstand:

$$Z = R + Z_1 = Z_0 e^{i\varphi} \quad \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_C} = \frac{1}{i\omega L} + i\omega C = i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

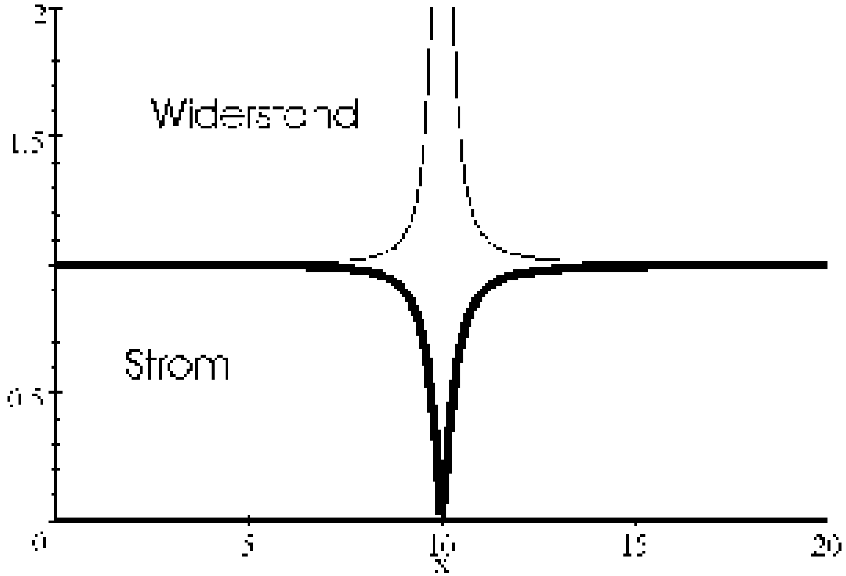
$$\Rightarrow Z_0 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} = R\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{R^2\left(\frac{1-\omega^2 CL}{L}\right)^2}} =$$

$$R\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{R^2C^2\left(\frac{1-\omega^2 CL}{CL}\right)^2}} = R\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{R^2C^2(\omega_0^2-\omega^2)^2}}$$

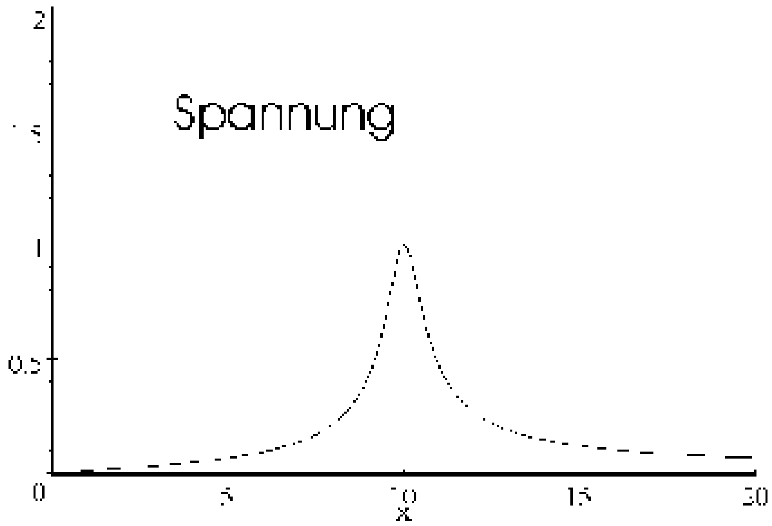
$$\varphi = \arctan\left[\frac{\frac{1}{\frac{1}{\omega L}-\omega C}}{R}\right] = \varphi = \arctan\left[\frac{\frac{\omega L}{1-\omega^2 CL}}{R}\right] =$$

$$\arctan\left[\frac{\frac{\omega L}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}{R}\right] = \arctan\left[\frac{\omega L \omega_0^2}{R(\omega_0^2-\omega^2)}\right] = \arctan\left[\frac{\omega}{RC(\omega_0^2-\omega^2)}\right]$$

Resonanz: $\omega = \omega_0 \Rightarrow Z_0 \to \infty, I \to 0$



Spannung:



D.h.: Filter in TV, Radio etc.