10. Elektromagnetische Wellen

10.1. Wiederholung **Schwingung**:(4.1.): $\ddot{\xi} + \omega_0^2 \cdot \xi = 0$

Periodische Änderung mit der Zeit Lösung: $\xi = \xi_0 \cdot e^{i\omega t}$

Wellen: (4.5): Periodische Änderung in Zeit und Ort

$\xi = \xi_0 \cdot \sin \omega t$

$\xi = \xi_0 \cdot \cos \omega t$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

c: Geschwindigkeit

Lösung: $\xi = \xi(x,t) = f(x \pm ct), c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

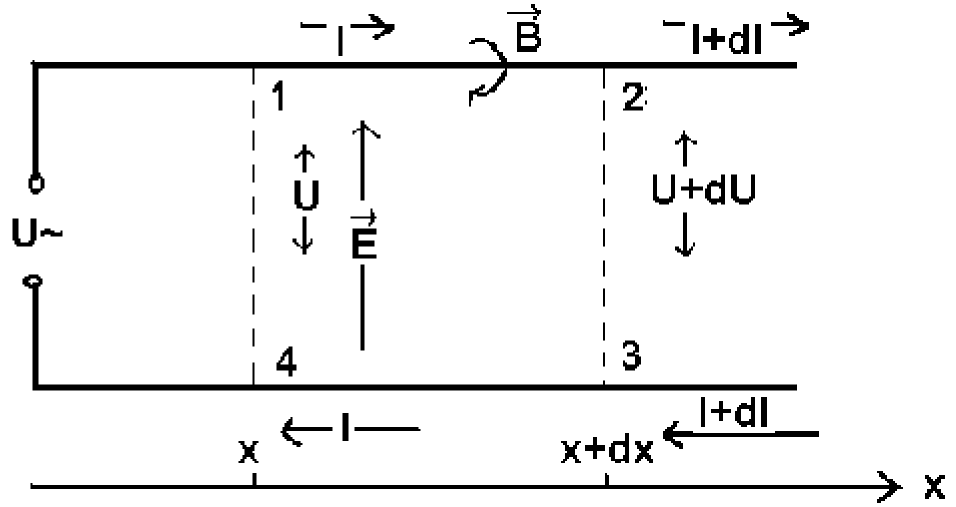
speziell: $\xi = \xi_0 \cdot \sin[kx \pm \omega t]$

mit "- " als auslaufender Welle mit "+" als einlaufender Welle

mit der Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ und der Kreisfrequenz

$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$: $c = \lambda \cdot \nu$ und λ als der Wellenlänge

10.2. Wellengleichung



Ladungsbilanz auf dx: (1-2)

Zufluss: $dQ_1 = I(x) \cdot dt$

Abfluss: $dQ_2 = I(x+dx) \cdot dt$

$$= I(x) \cdot dt + \frac{\partial I}{\partial x} dx \cdot dt$$

Änderung von Q: $d^2Q = dQ_1 - dQ_2 = -\frac{\partial I}{\partial x} dx \cdot dt$

Doppelleitung: Kapazität $C = C^* \cdot dx;\quad C^*$ ist Kapazität/Länge

Änderung der Spannung: $[C^*] = \frac{F}{m}$

$$dU = \frac{d^2Q}{C^* \cdot dx} = -\frac{1}{C^*}\frac{\partial I}{\partial x} \cdot dt \Rightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{C^*}\frac{\partial I}{\partial x}}$$

Eine Änderung von I führt zu einer Änderung von $\vec{B}, \Phi$

$dU_{ind} = -L\frac{\partial I}{\partial t} = -L^* \cdot dx \cdot \frac{\partial I}{\partial t}$ mit L^* als Induktivität/Länge $[L^*] = \frac{H}{m}$

mit $dU_{ind} = dU$ und für $R = 0$ $\boxed{\frac{\partial U}{\partial x} = -L^* \frac{\partial I}{\partial t}}$

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{C^*}\frac{\partial I}{\partial x}} \qquad \boxed{\frac{\partial U}{\partial x} = -L^*\frac{\partial I}{\partial t}}$$

Partielle Differentiation:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \cdot \partial t} = -\frac{1}{C^*}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x \cdot \partial t} = -L^*\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$$

Wellengleichung:

$$\boxed{\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \frac{1}{L^* \cdot C^*}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}}$$

Ebenso für die Spannung:

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{L^* \cdot C^*}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}$$

Lösung:

$$U(x,t) = U_0 \cdot \sin(kx - \omega t)$$

als auslaufende Welle

mit c= $\frac{1}{\sqrt{L^* \cdot C^*}}$

als Phasengeschwindigkeit

Für parallele Leiter:

$$L^* \cdot C^* = \varepsilon_0 \cdot \mu_0$$

da für $C^* = \frac{\varepsilon_0}{4\ln(\frac{d}{r})}$ und $L^* = 4\mu_0 \ln\frac{d}{r}$

gelten $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$, d.h. die Welle breitet sich mit c entlang der Leitung fort

Hat man zwischen den Leitern ein ε oder $\mu \Rightarrow$ $\boxed{c = c_0\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}}$

Spannungsverteilung: $U(x,t) = U_0 \sin(kx - \omega t)$

Stromverteilung: $I(x,t) = I_0 \sin(kx - \omega t + \varphi)$

da eine Phasenverschiebung vorhanden sein könnte.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = k \cdot U_0 \cdot \cos(kx - \omega t)$$

aus $\boxed{\frac{\partial U}{\partial x} = -L^* \frac{\partial I}{\partial t}}$

$$-L^* \frac{\partial I}{\partial t} = -L^* \cdot (-)\omega \cdot I_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) \Rightarrow$$

Strom und Spannung sind in Phase!

$$k \cdot U_0 \cdot \cos(kx - \omega t) = L^* \cdot \omega \cdot I_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{U_0}{I_0} = \frac{L^* \cdot \omega}{k} = L^* \cdot c = \frac{L^*}{\sqrt{L^* \cdot C^*}} = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}}$$

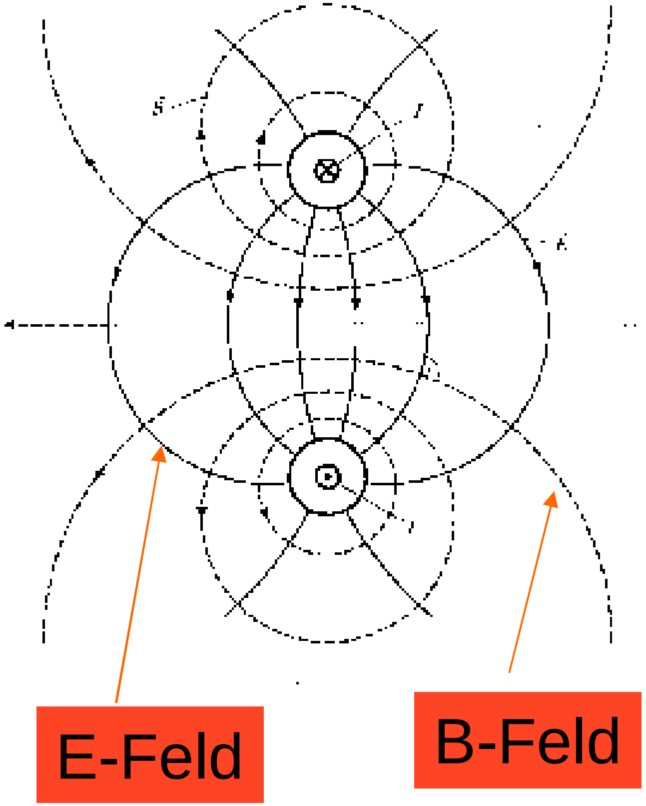
An jeder Stelle der Leitung:

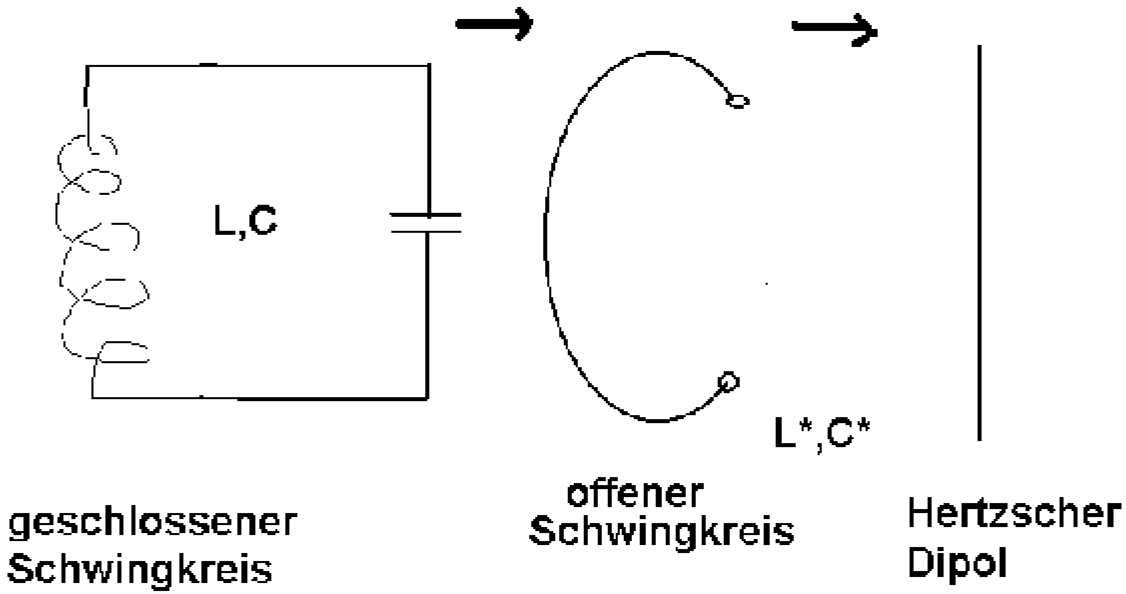
$\sqrt{\frac{L^*}{C^*}}$: Wellenwiderstand

$\frac{U}{I} = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}}$, schließt man die Leitung an einer beliebigen Stelle mit R= $\sqrt{\frac{L^*}{C^*}}$ ab →

die in der Welle transportierte Energie wird reflexionsfrei von R absorbiert!

10.3 Der Strahlungsdipol und freie Wellen



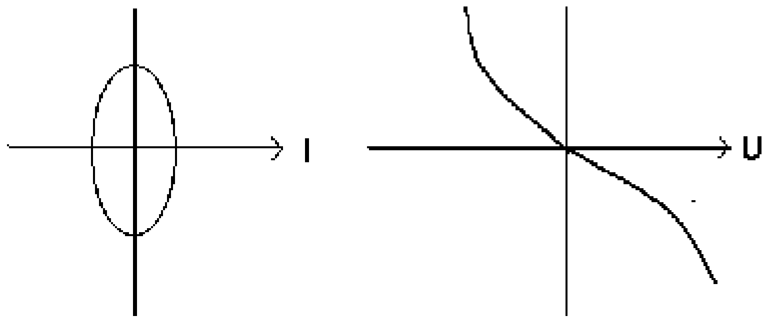


Resonanzbedingungen $\nu = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$ oder beim Hertzschen Dipol:

$\nu \approx \frac{1}{l \cdot \sqrt{L^* \cdot C^*}}$ l als der Länge des Hertzschen Dipols

im Dielektrikum entsprechend $\sim \frac{1}{l\sqrt{\varepsilon}}$

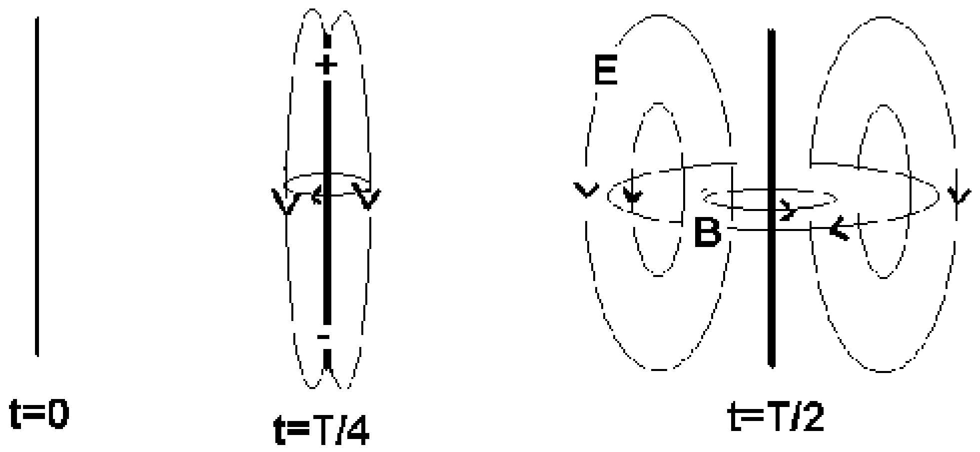
Verteilung der Stromstärke und Spannung:

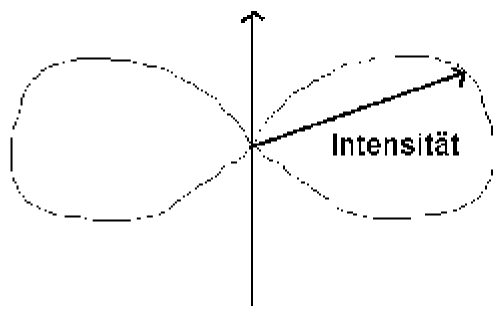


Stehende Welle: Wellenlänge ist die doppelte Oszillatorlänge

$$\Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2l} \qquad \text{z.B: } l=1.5\text{m} \qquad \Rightarrow \nu = \frac{3\cdot 10^8}{3} = 10^8 s^{-1}$$

Abstrahlcharakteristik eines el. Dipols





rotationssymmetrisch um die z-Achse
Intensität maximal ǫ zur Längsachse

10.4. Die Gleichungen von Maxwell

Bisher:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$ Gauß $$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

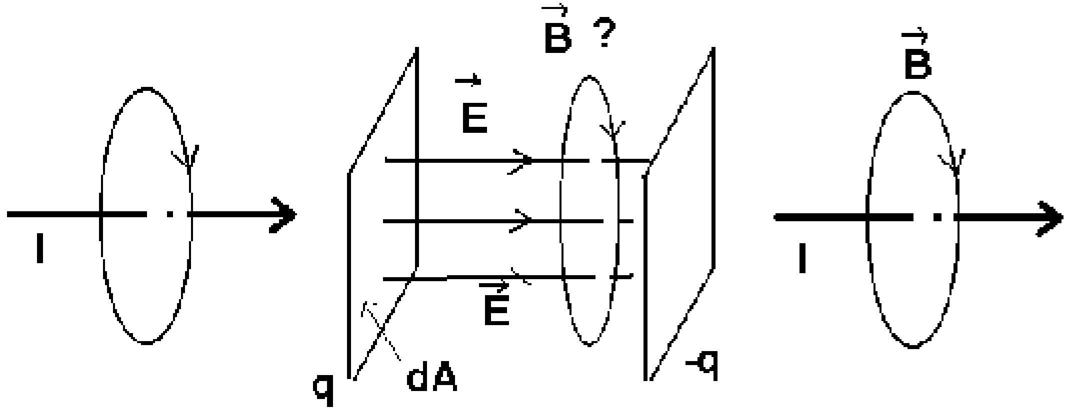
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I$$ Ampère $$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$ Faraday $$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

Zum Verständnis der elektromagnetischen Wellen fehlt noch ein 4. Schritt!

Ampèresches Gesetz

Maxwellsche Verschiebungsstrom:

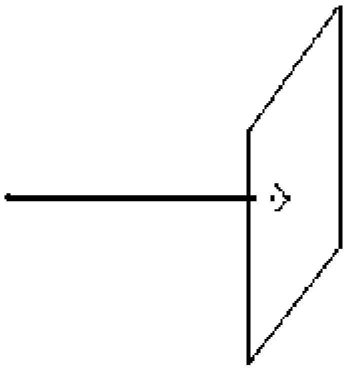


Maxwellsche Verschiebungsstrom:

$$\underbrace{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I_0}_{\text{Ampère}} + \underbrace{\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{\text{Maxwell}}$$

Ampère

Maxwell



Wechselfeld: q ändert sich !

Ladung auf einer Platte

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dq}{dt}}_{\text{Strom}} = \underbrace{\varepsilon_0 \cdot \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{I_{Verschiebung}}$$

Strom

$I_{Verschiebung}$

im Draht erzeugt

$\vec{B}$

$\Rightarrow$ Ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld $\dot{\vec{E}}$
erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld!

Maxwell: $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$: statischer Fall

Stromerhaltung

$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$: nicht statisch! = mit Gauss $\vec{\nabla}(\vec{j} + \varepsilon_0 \cdot \dot{\vec{E}})$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Gauß

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Ampère +Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \dot{\vec{E}}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

Synthese zwischen Magnetismus und Elektrizität

Coulomb 1785 Kraft zwischen Ladungen

$\vec{E} - Feld$

Biot-Savart 1815, Ampère 1820-1825

$\vec{B} - Feld,$

Kraft zwischen zwei elektrischen Strömen

Faraday 1831: Zeitabhängiges magnetisches Feld induziert elektrisches Feld

Maxwell 1865 : Verschiebungsstrom

Wellengleichung von $\vec{E}$ und $\vec{B}$

im ladungs- und stromfreien Vakuum:

$$\rho = 0 \qquad \vec{j} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \dot{\vec{E}}$$

$$\vec{\nabla} \times: \; \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla}\times:\ \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{\nabla}\times\dot{\vec{B}} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = -\varepsilon_0\cdot\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

mit den Vektorbeziehungen: $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \Delta\vec{E};\Delta : Laplace$

$$\boxed{\Delta\vec{E} = \varepsilon_0\cdot\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2};c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\cdot\mu_0}}}$$

für die x-Komponente $\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$

ε_0 : Aus Messungen der Coulombkraft zwischen Ladungen

μ_0 : Aus Messungen der Kraft zwischen stromführenden Leitungen

Gültigkeitsbereich: Elektromagnetische Wellen

$\nu = z.B.: 50Hz \quad \lambda \succ 10^6 m$: technischer Wechselstrom

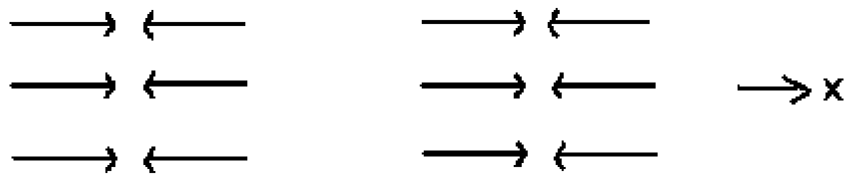
100MHz UKW

$\nu = 10^{22}Hz \quad \lambda = 10^{-14}m : \gamma -$ Strahlung

Distanzen atomar und kleiner: Quantenmechanik+ spezielle Relativitätstheorie mit der Synthese: Quantenfeldtheorie

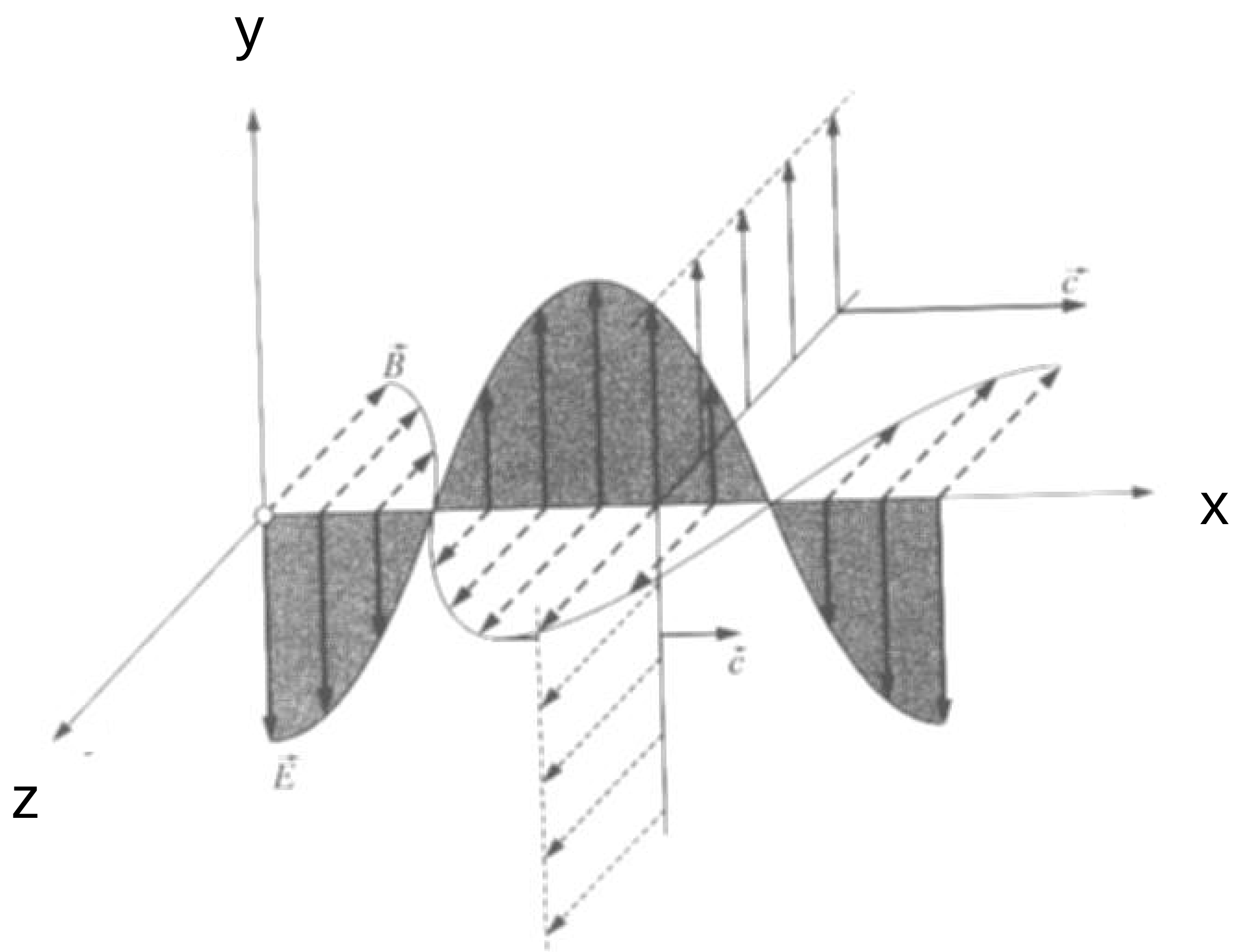
Komponenten der Felder

Aus: $$\int_A \vec{E} \bullet d\vec{A} = 0, und \int_A \vec{B} \bullet d\vec{A} = 0 \Rightarrow$$



Der elektrische (magnetische) Feldvektor besitzt keine longitudinale - Komponente

es gibt nur eine Ausbreitung transversaler elektromagnetischer Wellen



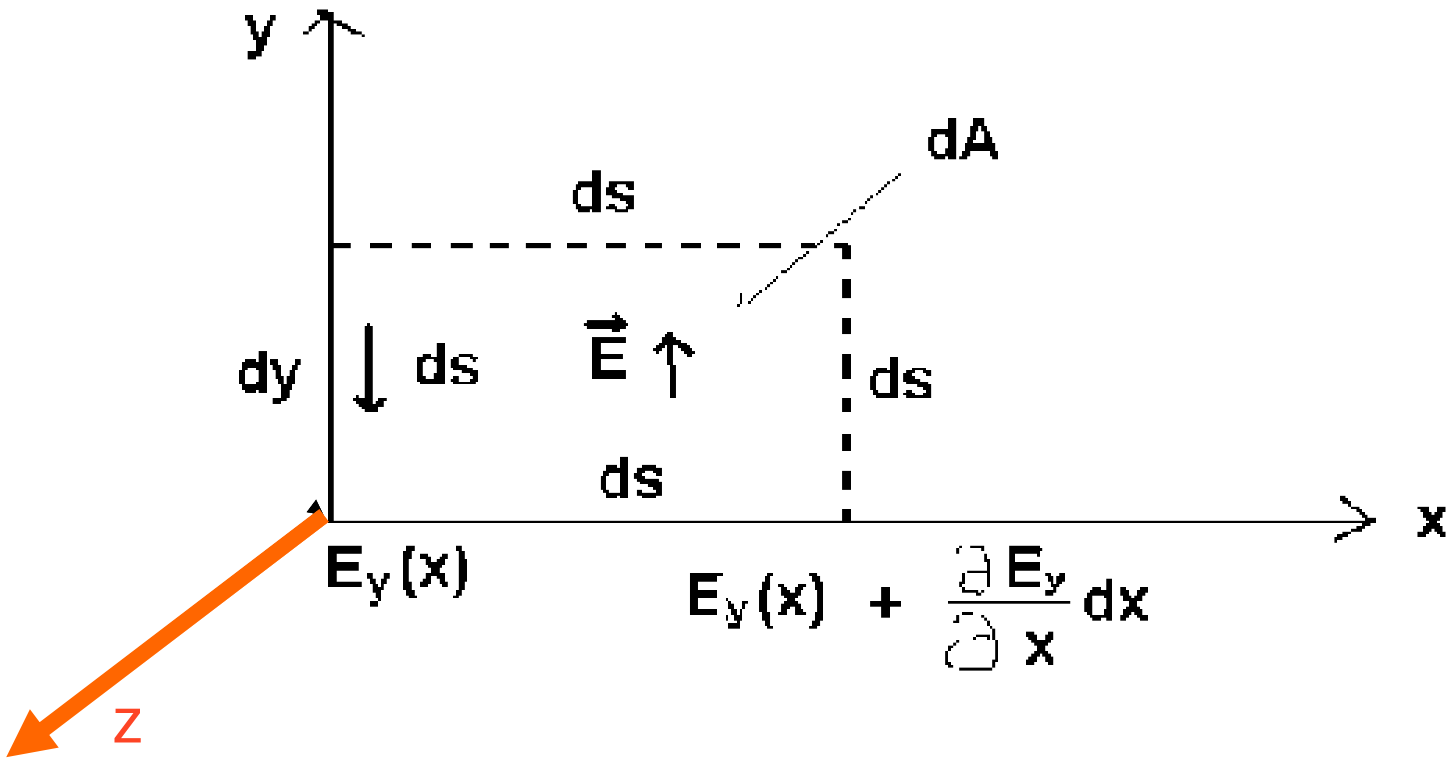
y
x
z
$\vec{B}$
$\vec{E}$
$\vec{c}$
$\vec{c}$

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \bullet d\vec{A}$$

Faraday

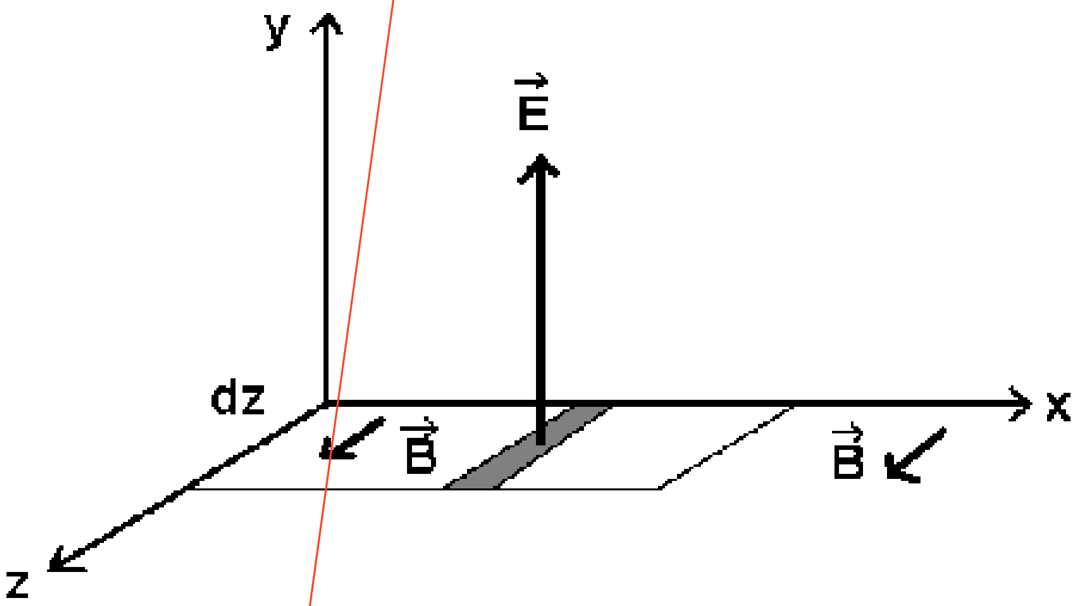
$$= E_y(x+dx) \bullet dy - E_y(x) \bullet dy \quad = (E_y(x) + \frac{\partial E_y}{\partial x}dx)dy - E_y(x) \bullet dy$$

$$= \frac{\partial E_y}{\partial x}dy \bullet dx = -\frac{\partial B_z}{\partial t}dx \bullet dy \Rightarrow \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Ampère+Maxwell



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B_z \cdot dz - \left(B_z + \frac{\partial B_z}{\partial x} dx\right) \cdot dz$$

$$= -\frac{\partial B_z}{\partial x} dx \cdot dz = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot dx \cdot dz \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

oder

$$\boxed{\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial E_y}{\partial t}}$$

$$\boxed{\Longrightarrow \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = -\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}}$$

und aus $\boxed{\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}}$ $\Longrightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}$

$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$; Lösung: $E_y = E_{y_0} \cdot \sin(t - \frac{x}{c})$ $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$

desgleichen $\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$

Integration:

$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -E_{y_0} \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \cos\omega(t - \frac{x}{c}) = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$ $B_z = \frac{E_{y_0}}{c} \sin\omega(t - \frac{x}{c})$

Elektrisches und magnetisches Feld haben
zur gleichen Zeit und am gleichen Ort ihr Maximum

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind in Phase!

Wir beobachten: $\frac{E_y}{B_z} = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$

unabhängig von der
Wellenlänge!

z.B.: Intensität des Sonnenlichts $B = \frac{E}{c} = \frac{800 V/m}{3 \cdot 10^8 m/s} = 2.67 \cdot 10^{-6} T$

E-Feld: 800V/m B?

Vergleich: Statisches Erdfeld:0.5 $\cdot 10^{-4} T$