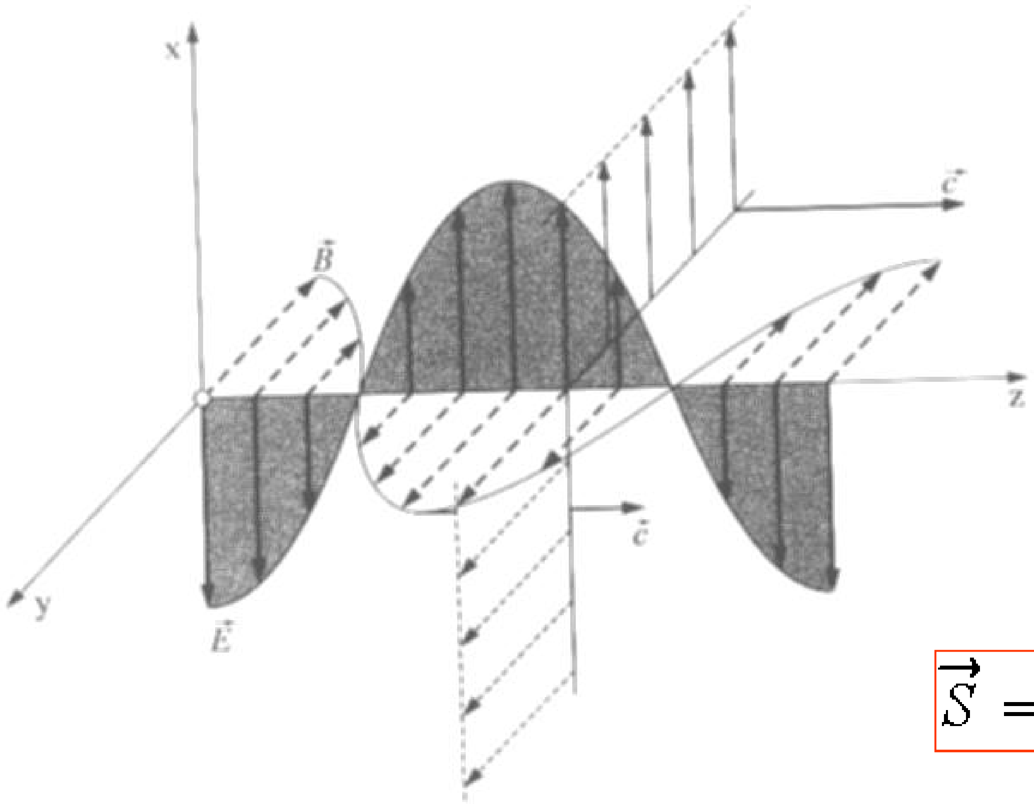
10.6. Energiedichte einer elektromagnetischen Welle und der Poynting - Vektor

Energiedichte w: $w = \frac{\varepsilon_0}{2} E_y^2 + \frac{1}{2\mu_0} B_z^2$ mit $B_z^2 = \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot E_y^2$

$$\boxed{w = \varepsilon_0 \cdot E_y^2}$$



Energiestromdichte:

$$S = w \cdot c,$$

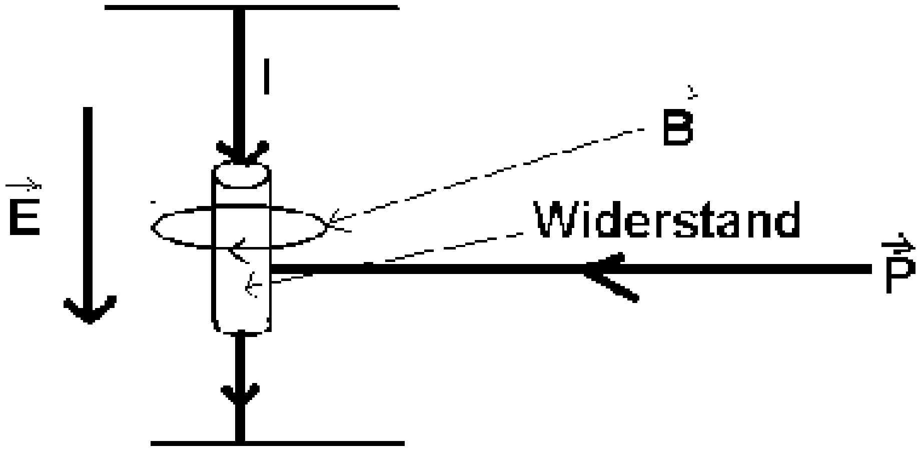
die pro Zeiteinheit durch eine Einheitsfläche senkrecht hindurchtretende Energie (Intensität)

$$\left| \vec{E} \times \vec{B} \right| = \frac{E_y^2}{c}$$

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}}$$ Poyntingvektor

zeigt in Ausbreitungsrichtung

z.B.: Widerstand



$\vec{S} \Longrightarrow$

Der von allen Seiten zur Widerstandachse strömende Energiefluss (Poyntingvektor) ergibt genau die im Widerstand frei werdende Wärmemenge $\boxed{I^2 \cdot R}$

10.7. Elektromagnetische Wellen im Dielektrikum

Der Brechungsindex

Vakuum + Polarisationsladungen + Ampèresche Kreisströme → Materie

Hier nur: $\vec{P} = \chi \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon - 1) \cdot \vec{E}$ Ů $\varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$

$$\int_A (\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}) \cdot d\vec{A} = \int_A \varepsilon \cdot \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

außerdem: $\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$ dazu : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$

bleibt ungeändert

aber $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_A \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}) \cdot d\vec{A}$

$$= \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Formal: ε_0 wird ersetzt durch $\boxed{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon}$ auch $\boxed{\mu_0 \to \mu \cdot \mu_0}$

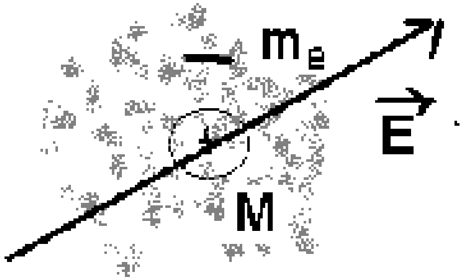
z.B: für $\frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu \cdot \varepsilon_0 \cdot \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} = v; \varepsilon \gtrsim 1, \mu \succeq 1$

$\sqrt{\varepsilon} = n$ Brechungsindex $\mu = 1$

Optik

Zur Erinnerung!

Polarisierbarkeit von Atomen in elektrischen Wechselfeldern:



$\vec{E}$: äußeres Feld, Massen M, m_e
mit M >>m_e

Das Elektron wird durch die Kraft $F = q \cdot E$

aus der Gleichgewichtslage gebracht

$$m_e \frac{d^2x}{dt^2} + m_e \cdot \omega_0^2 \cdot x = q \cdot E_x^0 \cdot \cos\omega t$$

Lösung mit $x=x_0$ *cosϒ t

$$\omega^2 \cdot m_e \cdot x_0 \cdot \cos\omega t + m_e \cdot \omega_0^2 \cdot x_0 \cdot \cos\omega t = q \cdot E_x^0 \cdot \cos\omega t$$

$$x_0 = \frac{q \cdot E_x^0}{m_2(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

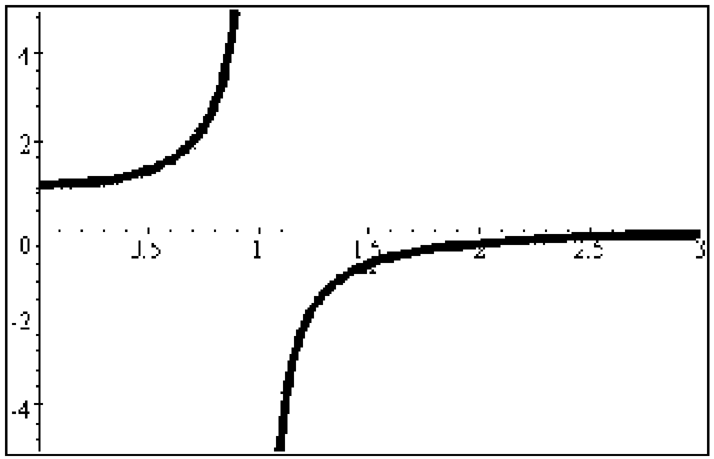
Der Auslenkung entspricht ein oszillierendes Dipolmoment

$$p_x = q \cdot x$$

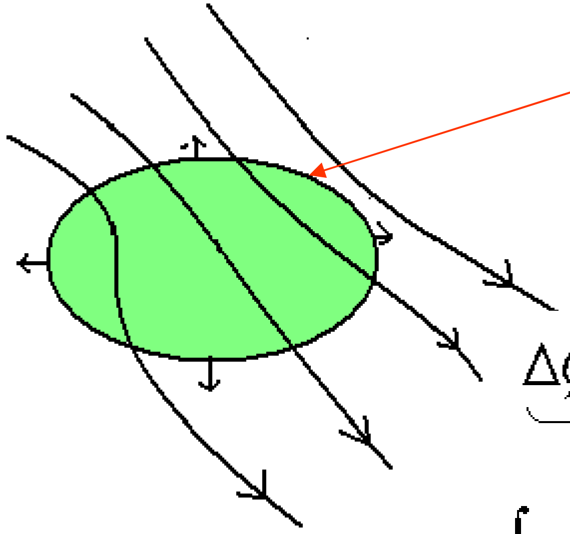
m_e=m_2

$$\Rightarrow p_x = \frac{q^2 \cdot E_x}{m_2(\omega_0^2 - \omega^2)} = \varepsilon_0 \cdot \alpha(\omega) \cdot E_x$$

Ů



Modifikationen der Maxwell- Gleichungen in Materie durch elektrische Polarisationseffekte



Integration schließt Ladung ein!

$$\underbrace{\Delta Q_{pol}}_{} = -\int_{Oberfläche} \vec{P} \cdot d\vec{A} \overset{Gauß}{=} -\int_{Volumen} \nabla \cdot \vec{P} \cdot dV$$

$$\int_{Volumen} \rho_{pol} \cdot dV \rightarrow\rightarrow\rightarrow \rho_{pol} = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\underbrace{\rho_0}_{\text{Ladungen}} + \rho_{pol} = \rho \qquad \nabla\vec{E} = \frac{\rho_0+\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\vec{P}$$

$$\nabla\underbrace{\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right)}_{\vec{D}} = \rho_0$$

$\vec{P}$ ändert sich mit der Zeit $\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ Ladungen ändern sich mit der Zeit

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ Strom

$$j = N \cdot q_e \cdot \underbrace{v}_{= \frac{dx}{dt}} \rightarrow j_{pol} = \frac{dP}{dt}$$

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ $j = j_0 + j_{pol}$

$$\boxed{c^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\vec{j_0}}{\varepsilon_0} + \frac{\vec{j_{pol}}}{\varepsilon_0} + \dot{\vec{E}}}$$

$$\varepsilon_0 \cdot c^2 \nabla \times \vec{B} = \vec{j_0} + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right)}_{\vec{D}}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j_0} + \mu_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}}$$

$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ und $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ bleiben!

Was passiert bei magnetischer Materie?

$$\vec{B} = \vec{B_0} + \underbrace{\mu_0 \cdot \vec{M}}_{Magnetisierung}!$$

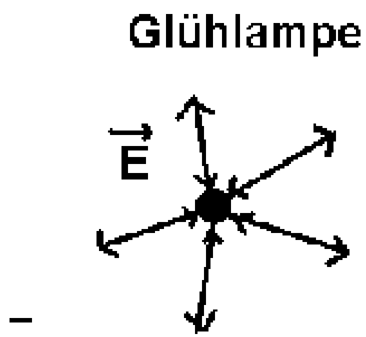
Will man auf der linken Seite der Maxwell Glg.Felder und auf der rechten Seite Ströme, führt man $\vec{H}$ ein!

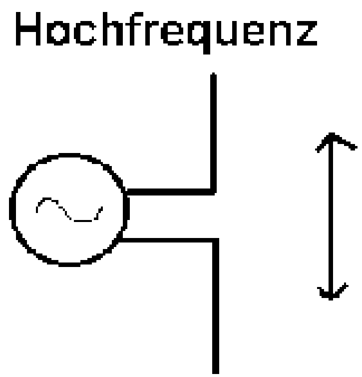
$$\vec{H} = \vec{B} - \mu_0 \cdot \vec{M}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \mu_0 \cdot \vec{j_0} + \mu_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}}$$

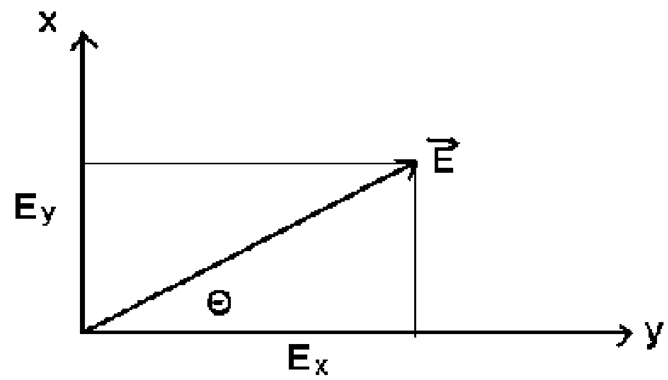
10.8. Polarisation

Die Polarisation einer elektromagnetischen Welle ist definiert als die Ebene, die durch die Richtung des $\vec{E}$ -Feldes und die Ausbreitungsrichtung aufgespannt wird!





Zerlegung des elektrischen Feldes in Komponenten



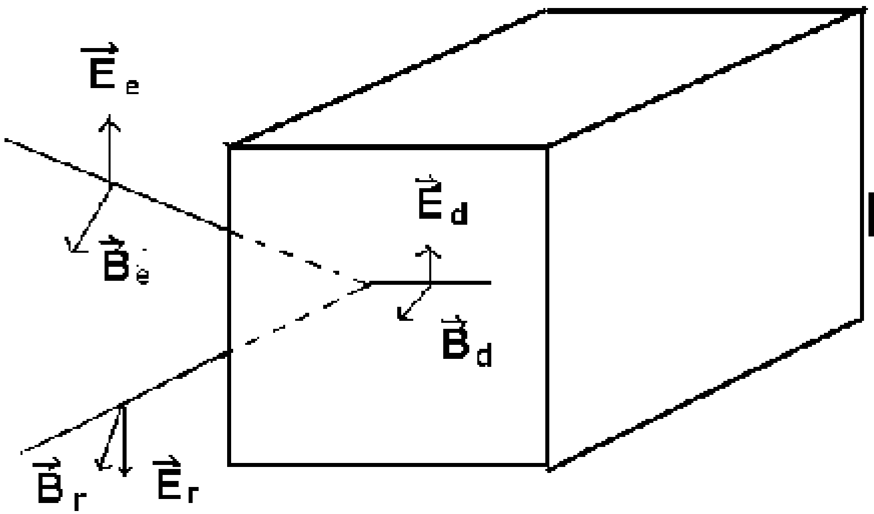
Für die Intensitäten gilt:

$$I_x \sim (E \cdot \cos\Theta)^2$$

$$I_y \sim (E \cdot \sin\Theta)^2$$

10.9. Reflexion einer Welle an einer Isolatoroberfläche

Beispiel Glas: fast senkrechter Einfall
Reflexion, durchgehender Strahl



$\frac{E}{B} = c$ im Vakuum und

$\frac{c}{n}$ im Glas

Randbedingungen: Gleichheit der tangentialen Feldstärken!

$$B_d = B_e + B_r \qquad E_d = E_e - E_r$$

Reflexionskoeffizient: $R = \frac{E_r}{E_e}$ mit $\frac{E}{B} = \frac{c}{n}$

$$E = \frac{c}{n}B, B = \frac{n}{c}E \quad \Rightarrow \frac{E_e}{c} + \frac{E_r}{c} = \frac{n}{c}E_d = \frac{n}{c}(E_e - E_r); *$$

$$E_e - n \cdot E_e = -E_r - n \cdot E_r$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{E_r}{E_e} = \frac{n-1}{n+1}}$$

Entsprechend: Durchlässigkeitskoeffizient D: $D = \frac{E_d}{E_e}$

$$\boxed{D = \frac{E_d}{E_e} = \frac{2}{n+1} = 1 - R}$$

Reflexionsvermögen $r = R^2$; Durchlässigkeit $d = D^2$

Für Intensitäten

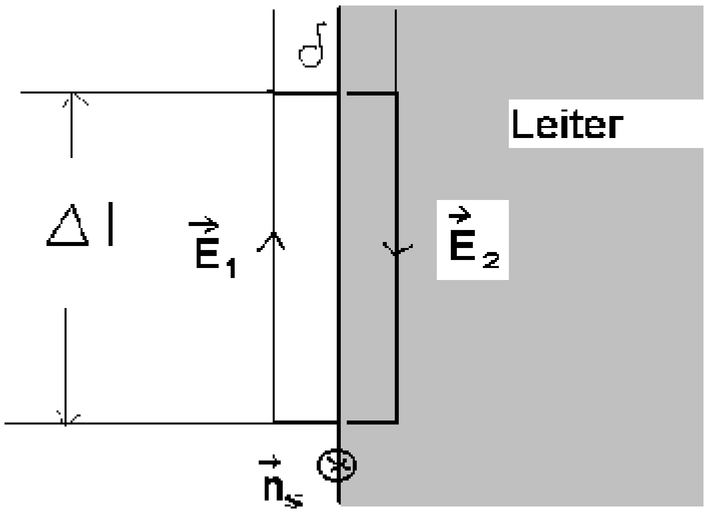
$$R^2 = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = \frac{n^2-2n+1}{n^2+2n+1} \qquad D^2 = \frac{4}{n^2+2n+1} \Rightarrow$$

Glas mit n=1.5 : $R^2 = \frac{.5^2}{2.5^2} = .04$ bei senkrechten Einfall

Allgemein: Fresnelschen Formeln der Optik

10.10 Randbedingungen

Vakuum → perfekter Leiter



da $\vec{B} \cdot \vec{n}_s$ endlich!

Perfekter Leiter:

$$\sigma \to \infty \Rightarrow \vec{E} = 0$$

Zeitabhängigkeit von B:

$$B \sim e^{i\omega t}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -i\omega \int \vec{B} \cdot \vec{n}_s \cdot \underbrace{dA}_{\Delta l \cdot \delta}$$

für $\delta \to 0 \Rightarrow \underbrace{(E_1 - E_2)}_{=0} \cdot \Delta l = 0$

(perfekter Leiter)

Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes verschwindet an der Oberfläche eines perfekten Leiters

Totale Reflexion der Welle

Wie sieht es mit $\vec{B}$ aus? $\vec{B} = 0$ im Leiter , wegen $\vec{E}_2 = 0$

im Leiter

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -i\omega \int \vec{B} \cdot \vec{n}_s \cdot dA$$

mit

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int \sigma \cdot \vec{E} \cdot \vec{n}_s \cdot dA \qquad (B_1 - B_2) \cdot \Delta l = \sigma \cdot E \cdot \underbrace{dA}_{\Delta l \cdot \delta}$$

Grenzwertbetrachtung →
Oberflächenstrom da $B_1 \neq 0$

Gruppengeschwindigkeit:

Mit dieser Geschwindigkeit wird die Energie transportiert!

Spezielle Lösung der Wellengleichung:

$$u(x,t) = Ae^{ikx-i\omega t} + Be^{-ikx-i\omega t}, k = \frac{2\pi}{\lambda}, \omega = \frac{2\pi}{T}$$

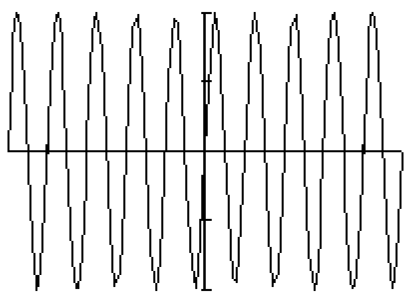
Lineare Überlagerung! $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx-i\omega(k)t}dk$

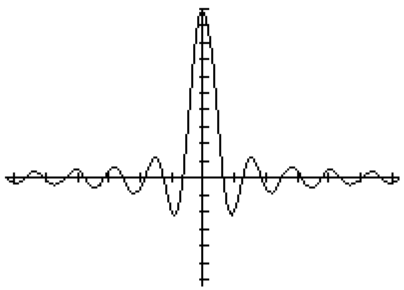
spezieller für t=0 $A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-ikx}dx$

$$u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\bullet e^{ikx}\bullet dk$$

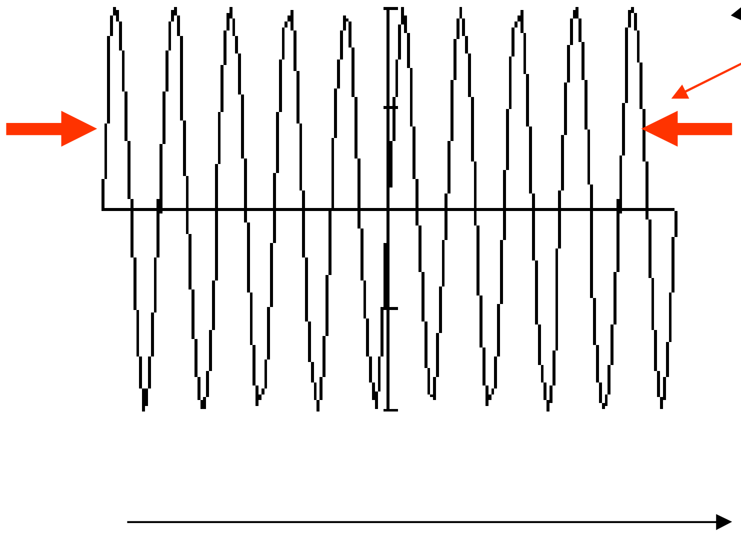
Es gilt $\Delta x \bullet \Delta k \geq \frac{1}{2}$

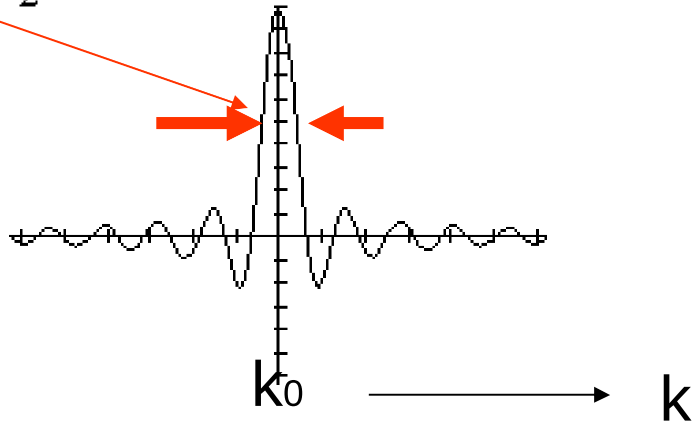
Endlicher Wellenzug:





$$\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2}$$





$\omega(k)!$ Ist A(k) relativ eng um k_0 konzentriert

$$\omega(k) = \omega_0 + \frac{d\omega}{dk}\Big|_0 (k - k_0) + \ldots\ldots$$

$$u(k) \approx \frac{e^{i[k_0 (d\omega/dk)|_0 - \omega_0]\cdot t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i[x-(d\omega/dk)|_0 \cdot t]k} dk$$

das ist aber u(x',0)
mit

$$x' = x - (d\omega/dk)\,|_0 \cdot t$$

Zum Vergleich:

$$0 \leq v_{Phase} \leq \infty$$

$$\rightarrow\rightarrow\rightarrow\ v_{Gruppe} = (d\omega/dk)\,|_0 \ :$$

Gruppengeschwindigkeit

$v_{Gruppe} \lesssim c$ gilt immer!