

Gruppengeschwindigkeit:

Spezielle Lösung der Wellengleichung:

$$u(x, t) = Ae^{ikx - i\omega t} + Be^{-ikx - i\omega t}, k = \frac{2\pi}{\lambda}, \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Lineare Überlagerung! $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx - i\omega(k)t} dk$

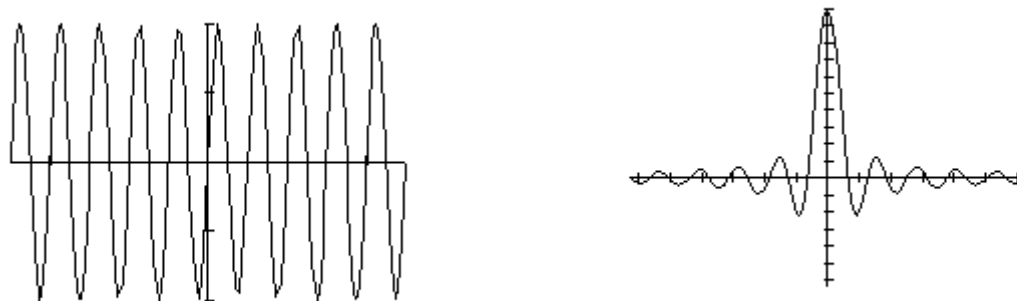
spezieller für $t=0$

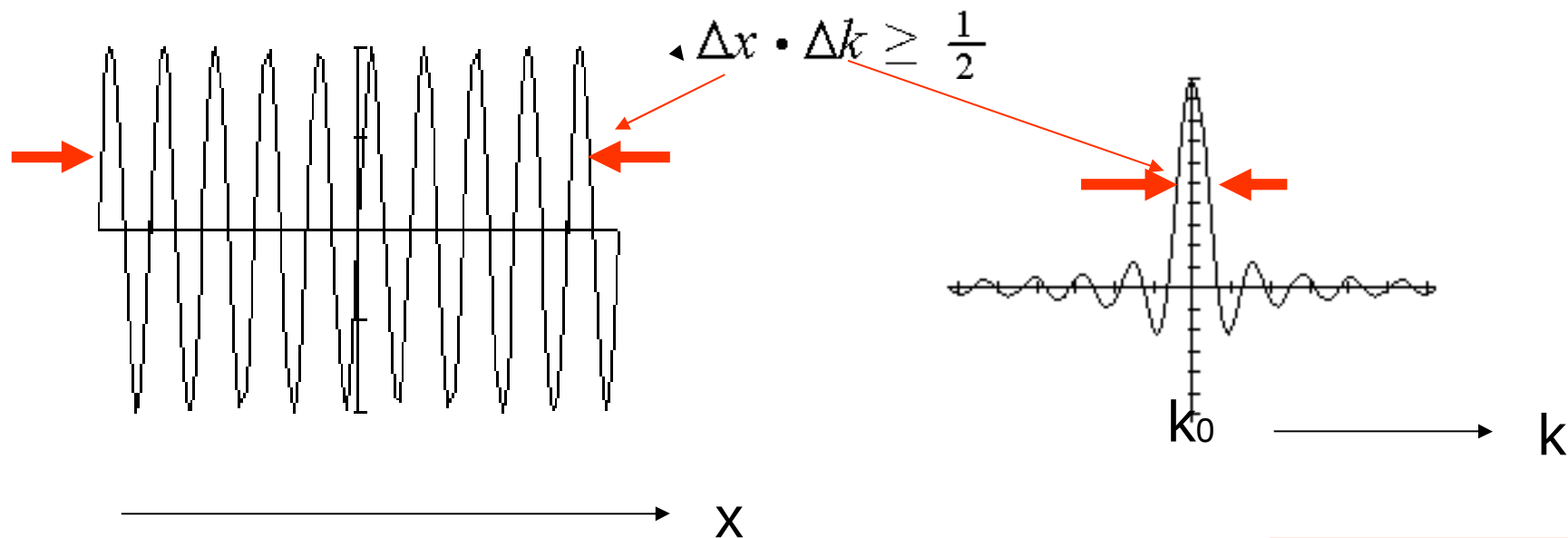
$$u(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cdot e^{ikx} \cdot dk$$

Es gilt $\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2}$

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-ikx} dx$$

Endlicher Wellenzug:





$\omega(k)$! Ist $A(k)$ relativ eng um k_0 konzentriert

$$\omega(k) = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 (k - k_0) + \dots$$

$$u(k) \approx \frac{e^{i[k_0(d\omega/dk)|_0 - \omega_0] \cdot t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i[x - (d\omega/dk)|_0 \cdot t]k} dk$$

das ist aber $u(x', 0)$
mit

$$x' = x - \left. \left(\frac{d\omega}{dk} \right) \right|_0 \cdot t$$

Zum
Vergleich:

$$0 \leq v_{Phase} \leq \infty$$

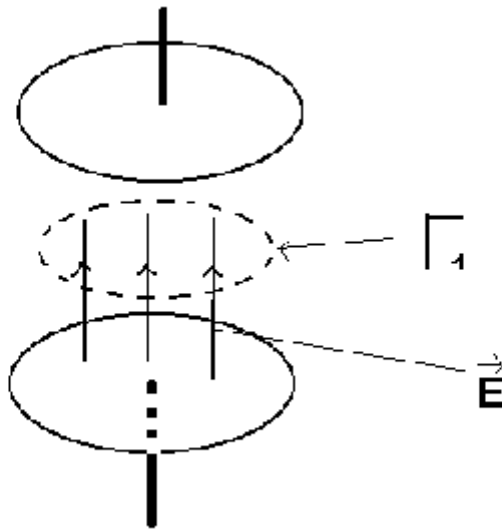
$$\rightarrow \rightarrow \rightarrow v_{Gruppe} = \left. \left(\frac{d\omega}{dk} \right) \right|_0 :$$

Gruppengeschwindigkeit

$v_{Gruppe} \leq c$ gilt immer!

10.11. Hohlraumresonator

Der Grenzfall eines Kondensators bei sehr hohen Frequenzen



Die "Kapazität" ist nicht mehr $\frac{1}{i\omega C}$

Faraday:

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

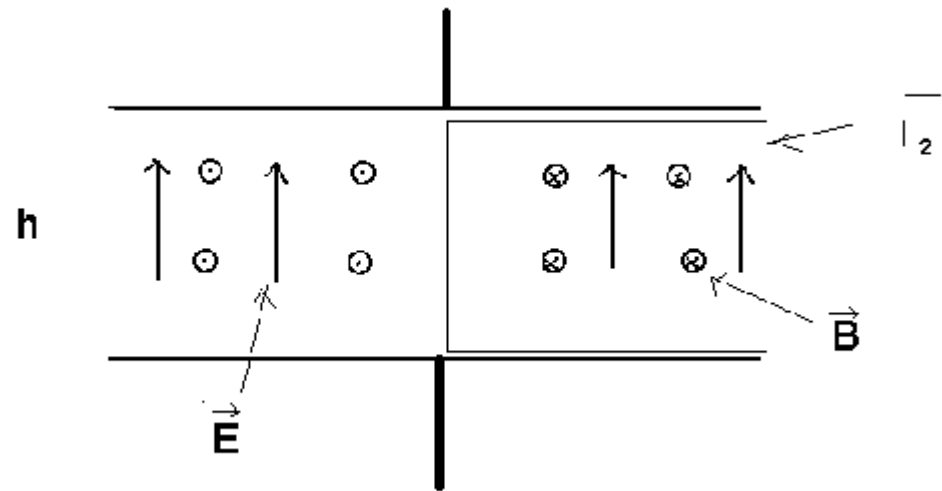
$$c^2 \int_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

(Fläche umrandet von Γ_1)

$$c^2 \cdot B \cdot 2\pi r = \frac{d}{dt} E \cdot \pi \cdot r^2$$

Magnetfeld im Kondensator

$$\Rightarrow B = \frac{i\omega r}{2c^2} E_0 e^{i\omega t}$$



Fläche umrandet von Γ_2

zusätzlicher Beitrag $\vec{E}$:

Aufspaltung in zwei Teile

$$E = E_1 + E_2$$

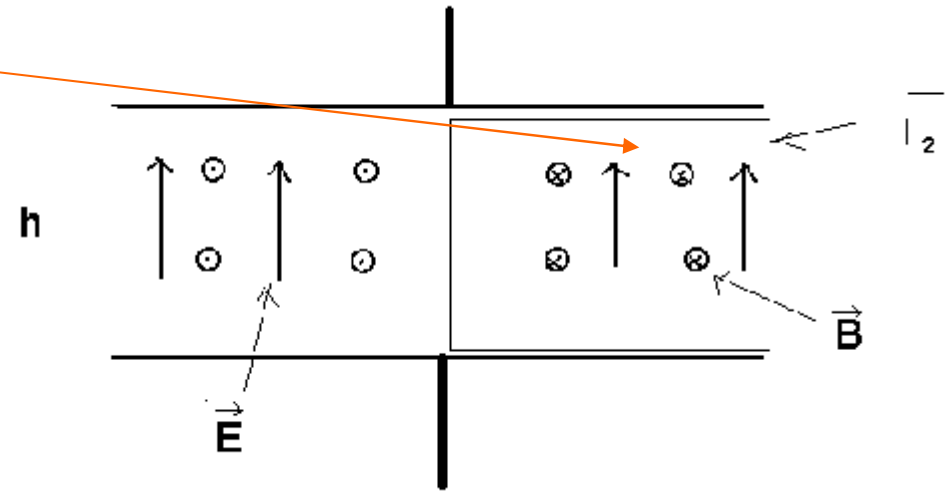
(Korrektur durch das B-Feld) $E_2 = 0$ für $r=0$ (Im Zentrum des Kondensators)

$$\Rightarrow -E_2 \cdot h = -\frac{d}{dt} h \int \vec{B}(r) \cdot d\vec{r}$$

$$E_2(r) = \frac{d}{dt} \frac{i\omega \cdot r^2}{4c^2} E_0 e^{i\omega t}$$

$$E_2(r) = -\frac{\omega^2 \cdot r^2}{4c^2} E_0 e^{i\omega t}$$

$$E = E_1 + E_2 = \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) E_0 e^{i\omega t}$$



E ist die 1. Näherung

$E_2(t)$ ändert auch B $\ddot{}$ $\ddot{}$ $\ddot{}$

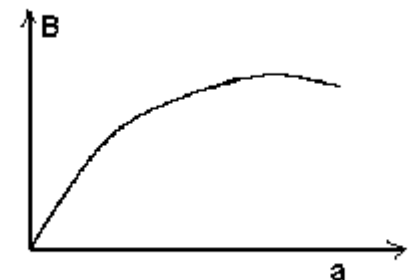
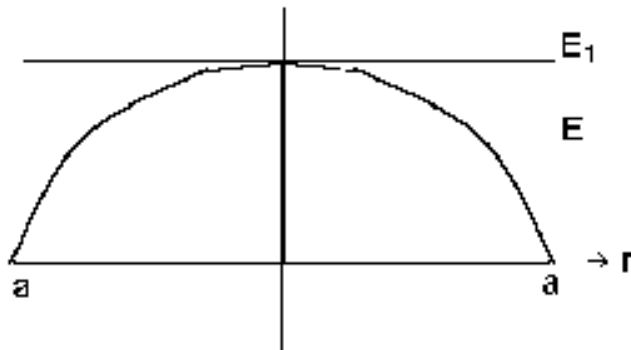
$$E = E_0 e^{i\omega t} \left[1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c} \right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c} \right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c} \right)^6 \dots \right]$$

Besselfunktion: $J_0(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \dots$

(Immer Lösungsansatz bei Zylindersymmetrie)

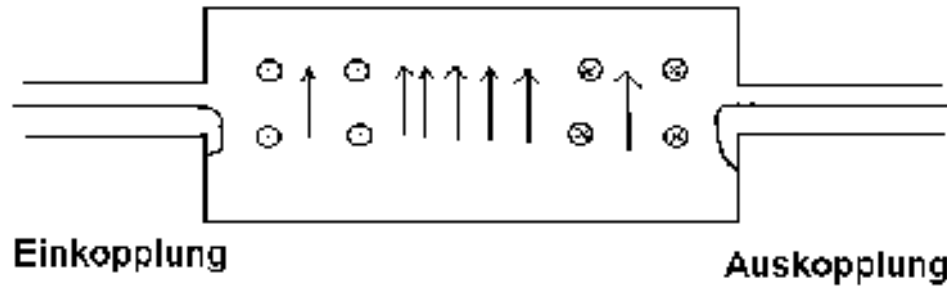
Bei noch höherer Frequenz: bei $r = 2.405 \frac{c}{\omega_0}$

B sieht entsprechend so aus:



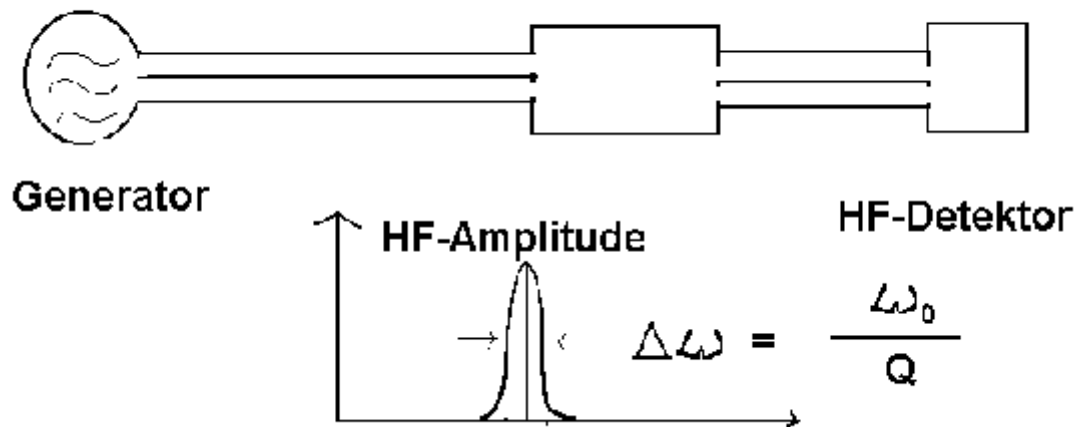
Hohlraumresonator:

bei $r=a$ kann auch eine leitende Wand
angebracht
werden!



Hochfrequenzkreis mit Resonator:

Hohlraumresonator

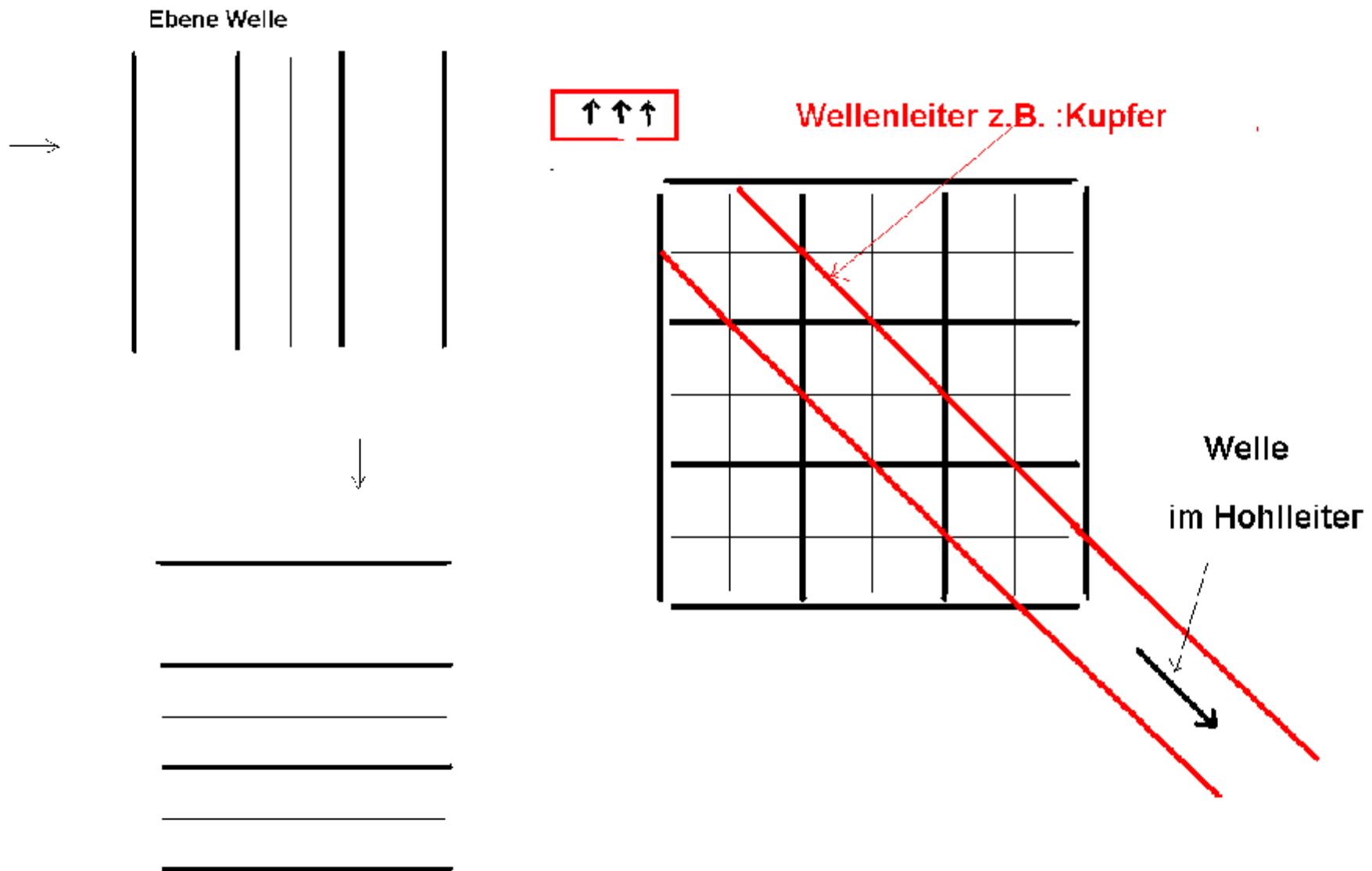


Q=Güte des
Resonators bis

10^{10}

bei supraleitenden
Hohlraumresonatoren!

10.12 Ausbreitung von Wellen im Rechteckhohlleiter



An den Stellen, an denen $E=0$, kann man Metallplatten anbringen

⇒ Wellenleiter!

λ_0, λ_g :

Wellenlänge ohne,
Wellenlänge im Hohlleiter

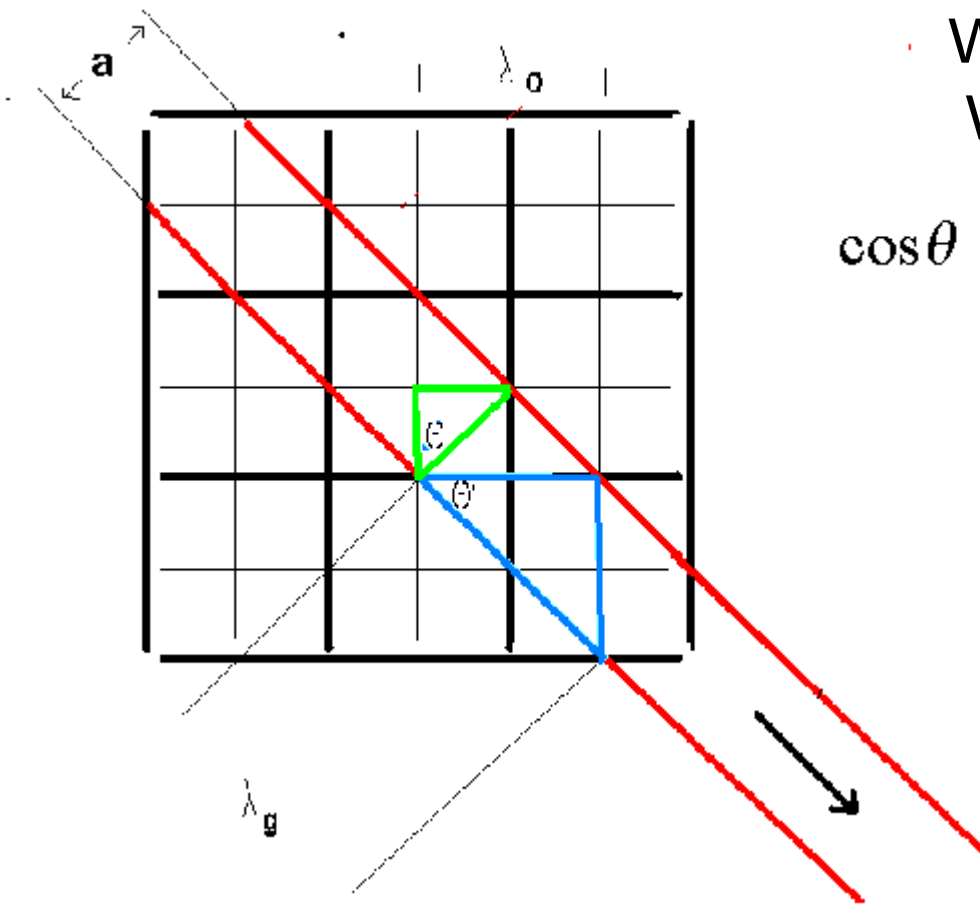
$$\cos \theta = \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \rightarrow \lambda_g = \frac{\lambda_0}{\cos \theta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}$$

$$\text{da } \sin \theta = \frac{\frac{\lambda}{2}}{a} = \frac{\lambda}{2a}$$

⇒

nur Ausbreitung wenn

$$\lambda_0 < 2a$$



Schönes Beispiel für Phasengeschwindigkeit:

immer $> c$, z sei Ausbreitungsrichtung

$$v_{Phase} = \frac{\omega}{k_z} = \lambda_g \cdot \nu \quad \text{für} \quad \lambda_0 \rightarrow 2a \rightarrow v_{Phase} \rightarrow \infty$$

$$v_{Gruppe} = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{d\omega}{dk} \frac{dk}{dk_z} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda_0}; k_z = \frac{2\pi}{\lambda_g} \quad \text{und} \quad \omega = c \cdot k$$
$$\frac{dk}{dk_z} = \frac{k_z}{k}$$

damit

$$v_{Gruppe} = \frac{c^2}{v_{Phase}} < c \implies v_{Gruppe} \cdot v_{Phase} = c^2$$