

11. Nichtlineare Dynamik und Chaos

Bei den meisten bisherigen Phänomenen z. B:
 Pendelbewegung: Kraft linear als Fkt. der Auslenkung

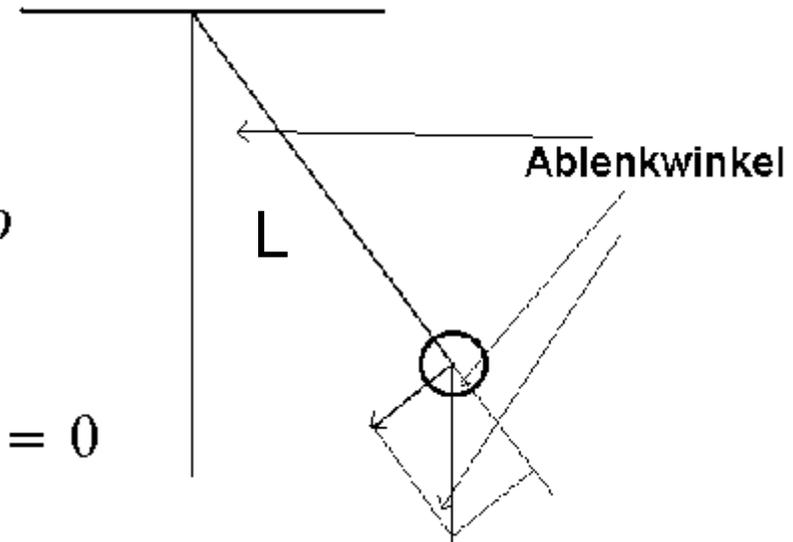
Fadenlänge L , Masse m ,
 Auslenkwinkel

Rücktreibende Kraft: $F_t = -mg \sin \varphi$

Beschleunigung: $L \cdot \ddot{\varphi}$

Kräfte : $m \cdot L \cdot \ddot{\varphi} + \gamma \cdot \dot{\varphi} + m \cdot g \cdot \sin \varphi = 0$

Lösungen mit $\sin \varphi \approx \varphi$



$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + a \cdot \varphi = 0$$

Exakte Lösung:

$$\varphi(t) = C_1 e^{\sqrt{(-a)}t} + C_2 e^{-\sqrt{(-a)}t}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \gamma \cdot \frac{d\varphi}{dt} + a \cdot \varphi = 0$$

Exakte Lösung:

$$\varphi(t) = C_1 \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4a}\right) t\right) + C_2 \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4a}\right) t\right)$$

d.h.: harmonisch ,
 wie gehabt

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + a \cdot \sin\varphi = 0$$

Exakte Lösungen:

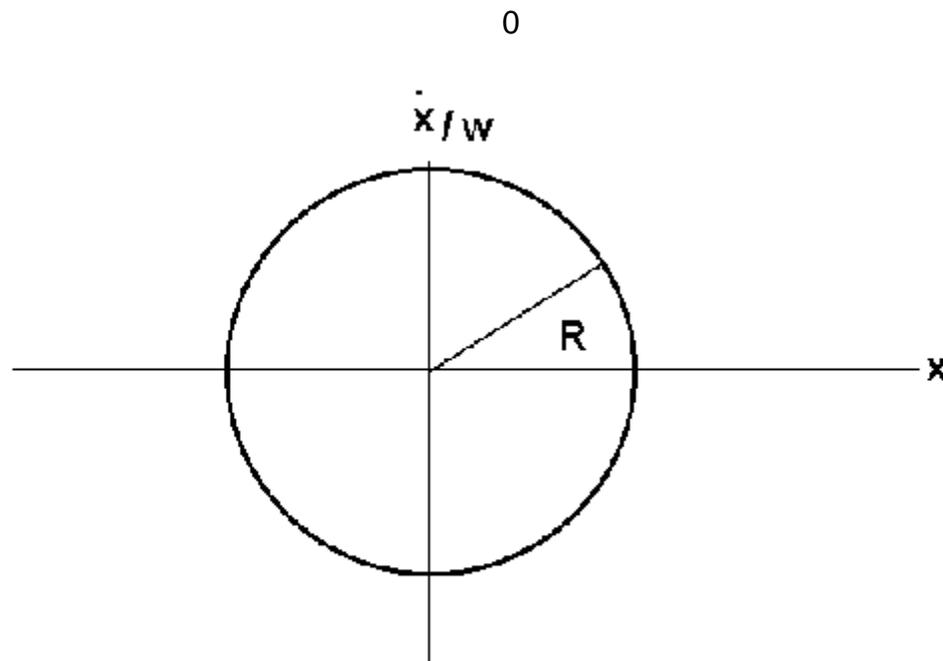
$$t = \int_0^{\varphi(t)} \frac{1}{\sqrt{2(\cos y_2)a + C_1}} dy_2 - C_2, t = \int_0^{\varphi(t)} \left(-\frac{1}{\sqrt{2(\cos y_1)a + C_1}} \right) dy_1 - C_2$$

Der ungedämpfte harmonische Oszillator

mit linearer Rückstellkraft: $F = -D \cdot x \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

Gesamtenergie: $E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{D}{2} x^2 \Rightarrow$

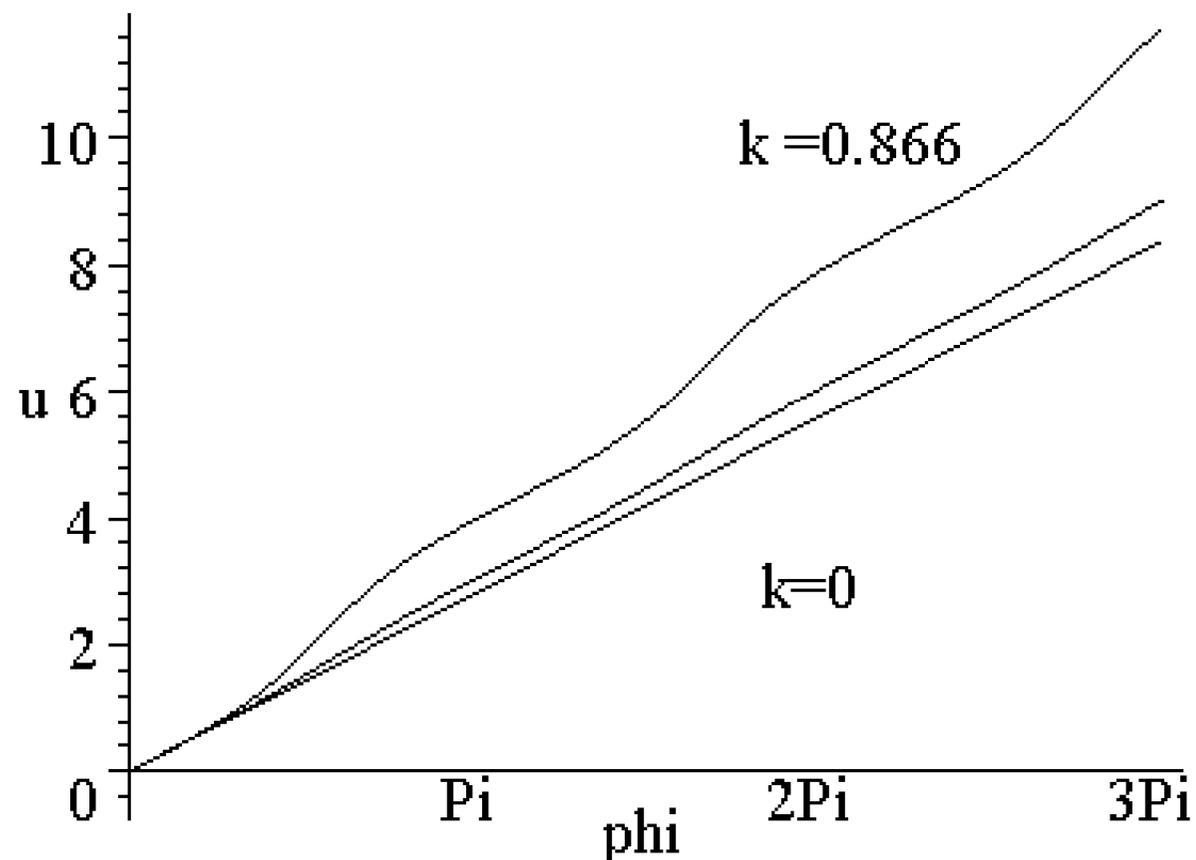
Bewegung im Phasenraum
mit dem Kreisradius $R = \sqrt{\frac{2E}{D}}$



Allgemein: Elliptisches Integral

$$u = F(\Phi, k) = \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \Phi)}}$$

$u=F(k,\text{phi})$ vs phi



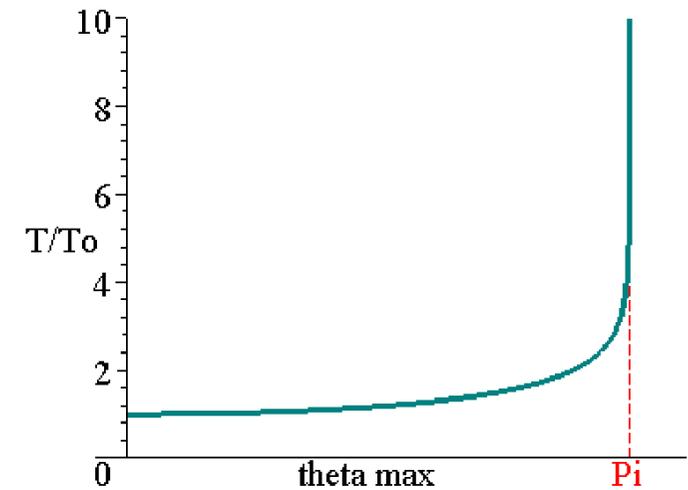
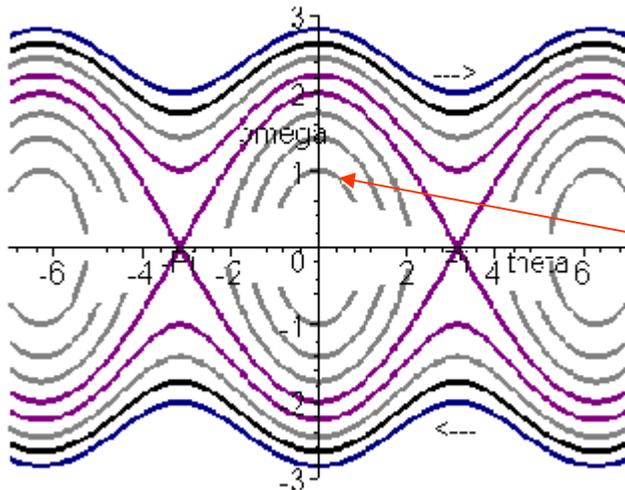
Das Pendel, keine Kleinwinkelnäherung:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l} \sin\theta \quad \text{Schwingungszeit:}$$

Die Energie des Systems bleibt erhalten (keine Reibung):

$$E = \frac{1}{2} m \cdot l^2 \omega^2 - m \cdot g \cdot l \cdot \cos\theta$$

Phasenraumplot:



8 verschiedene Energien!

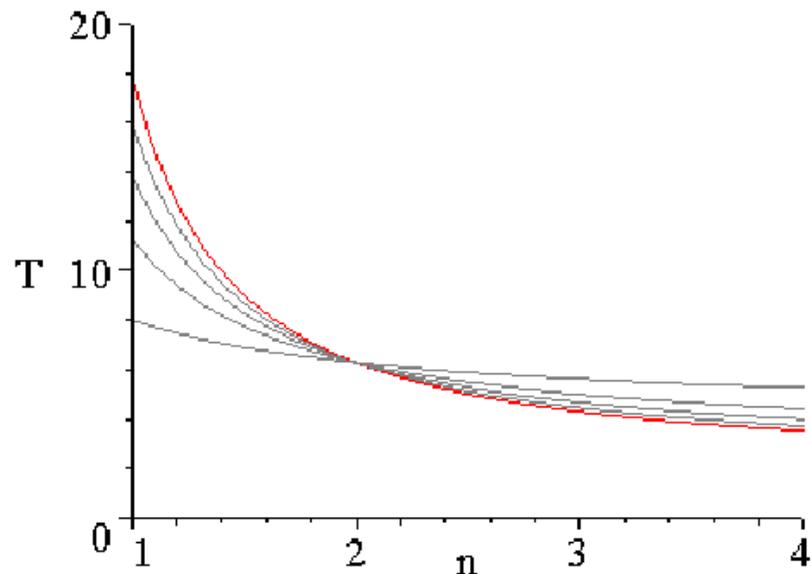
Ist die Kraft linear \rightarrow Potential $\sim x^2$

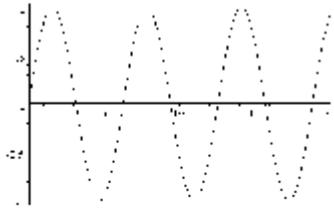
harmonische Bewegung z.B.: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

beim Pendel , $\sqrt{\frac{D}{m}}$ bei der Feder, unabhängig von der Anfangsamplitude!

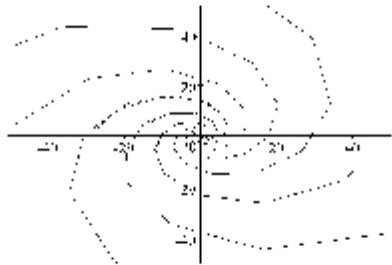
Wie ist es bei einem Potential $\sim x^n$?

Hier das Resultat für die Periodendauer: Jede Kurve hat eine andere Energie

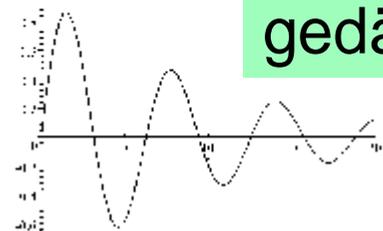




Schwingungen!



läuft gegen den Nullpunkt als stabilen Attraktor
Deterministisch!



gedämpft,

Superpositionsprinzip: (Lsg. lin. Diffglg.)

Sind $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen \Rightarrow
 $a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$ auch Lösungen

Nicht so z.B: bei der Schaukel
 Schwerpunktverlagerung:

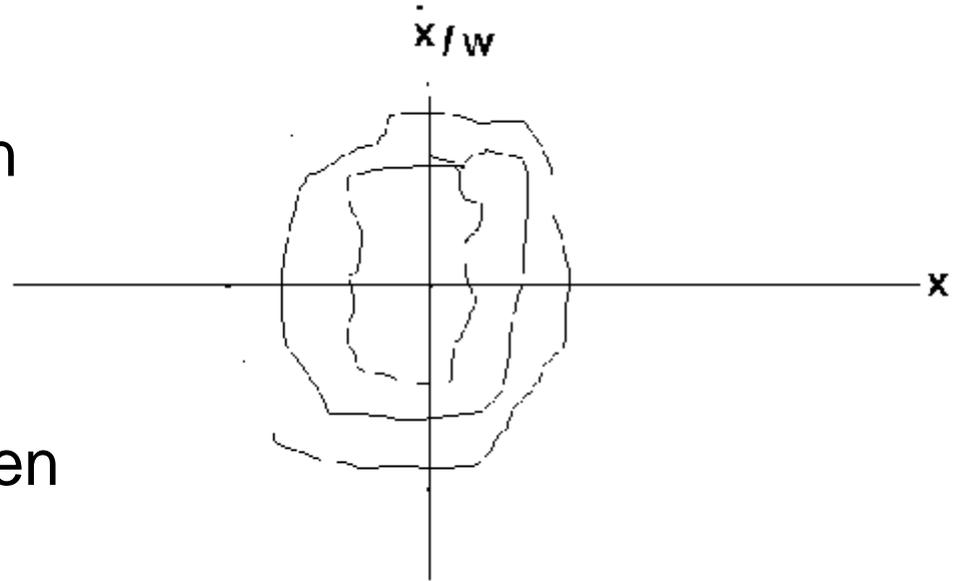
Gilt nicht mehr!

$$m \cdot \underbrace{L(1 + \Delta L \cos(\omega t + \alpha))}_{\text{Schwerpunktverlagerung}} \ddot{\varphi} + \gamma \cdot \dot{\varphi} + m \cdot g \cdot \sin \varphi = 0$$

Schwerpunktverlagerung Amplitude wächst $\varphi > \pi$

Trajektorien im Phasenraum

Stationäre Zustände entsprechen **Fixpunkte (Attraktoren)** im Phasenraum, Konfiguration der ein System zustrebt, können vorhergesagt werden, entsprechen allerdings unvorhersehbaren Bewegungen

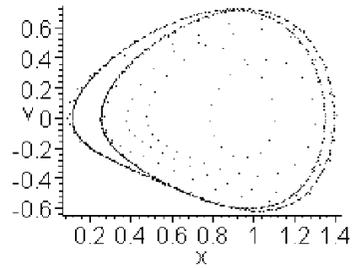


Erzwungene Schwingung:

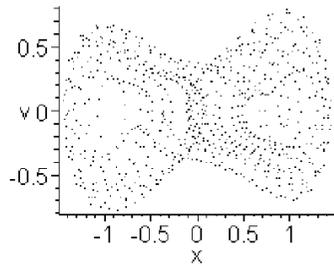
Duffinggleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma \cdot \dot{x} + \alpha \cdot x + \beta \cdot x^3 = F \cdot \cos(\omega t)$$

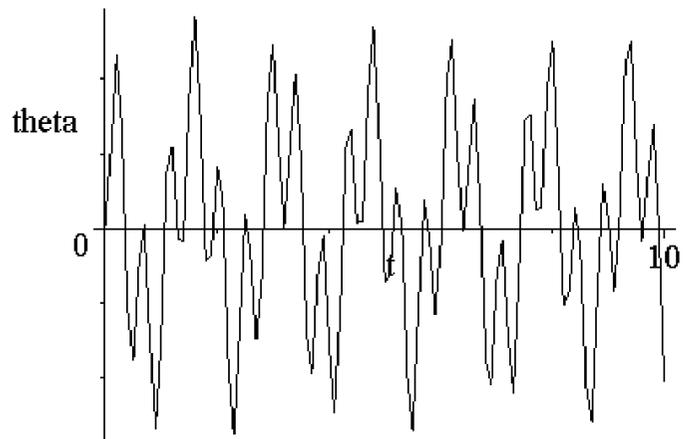
Solution to Duffing's Equation



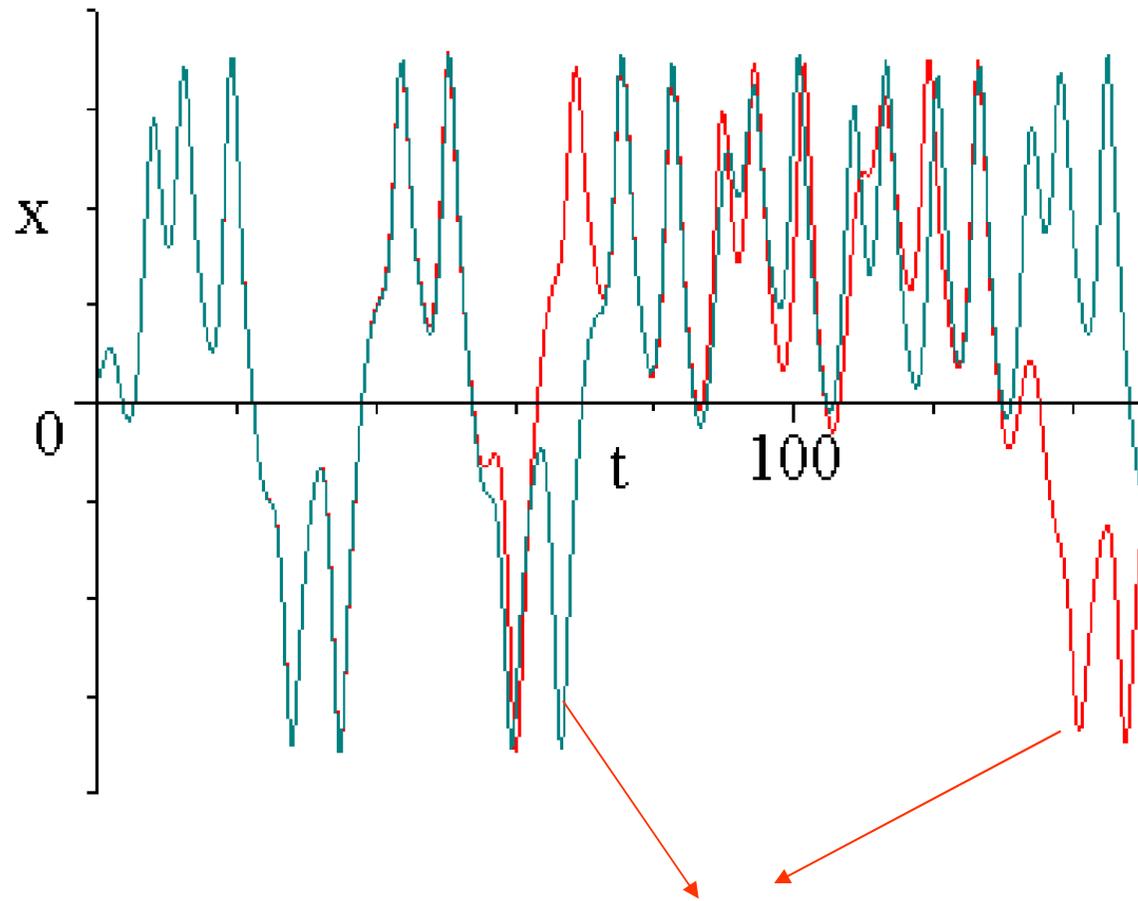
Solution to Duffing's Equation



time vs. amplitude



Forced Duffing

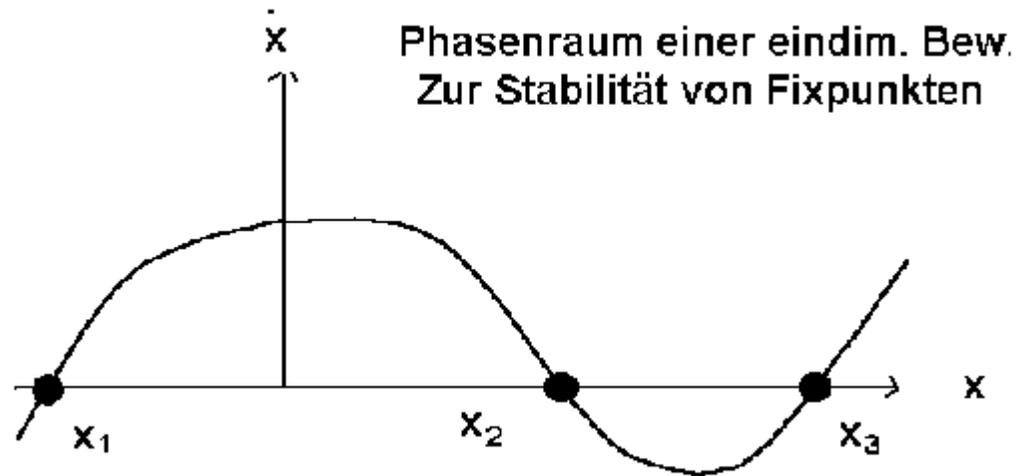


Winzige Änderung der Parameter

Stabilität von Fixpunkten:

Fixpunkte x_1, x_2, x_3 :

x_1 und x_3



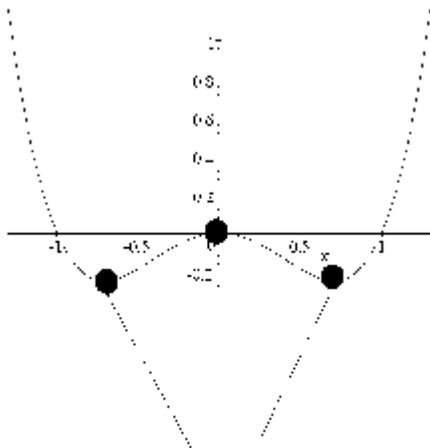
sind **instabile** Fixpunkte,
kleine Abweichungen wachsen
schnell an!

Einzugsgebiet:

x_2 stabil: $x_1 < x < x_3$

Beispiel : Teilchen der Massen m in einem eindimensionalen Potential

$$E_{pot}(x) = -ax^2 + bx^4; F_x = -\frac{dE_{pot}}{dx} = 2ax - 4bx^3$$



Stabil
Attraktoren

Rechenbeispiel: $x_0 \rightarrow x_t$

Messung z.Zt.: $t+1$ ist eindeutig bestimmt durch Messung bei t

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

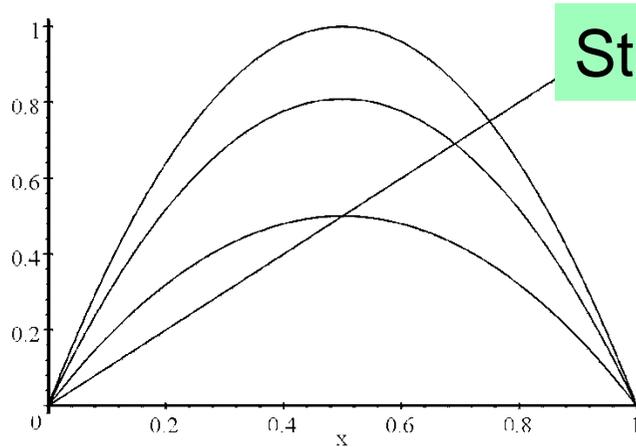
jede Information über das System ist in f enthalten
Spezifischer Prozeß:

$$x_{t+1} = f_\lambda(x_t) = \lambda \cdot x_t(1 - x_t) : \lambda :$$

Rückkopplung

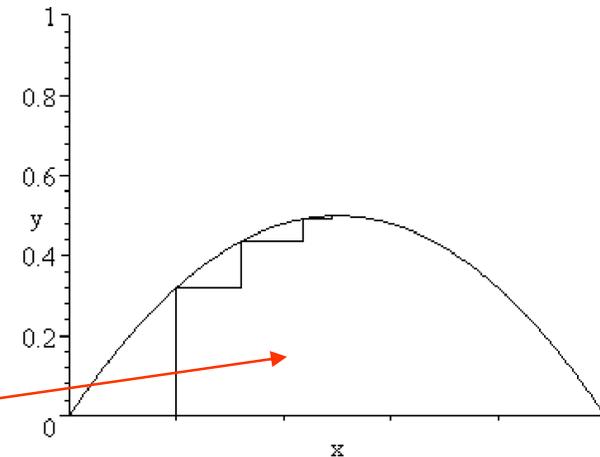
$$x_{t+1} = f_\lambda(x_t) = \lambda \cdot x_t(1 - x_t)$$

Logistische Gleichung



Stationärer Zustand (Fixpunkt) : $x_{n+1} = x_n$

Geometric representation: Logistic Map



Plots:

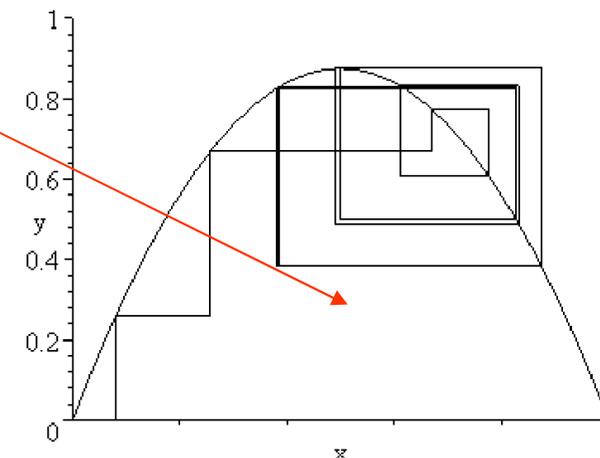
Mit $\lambda=2$ und $\lambda=3.5$

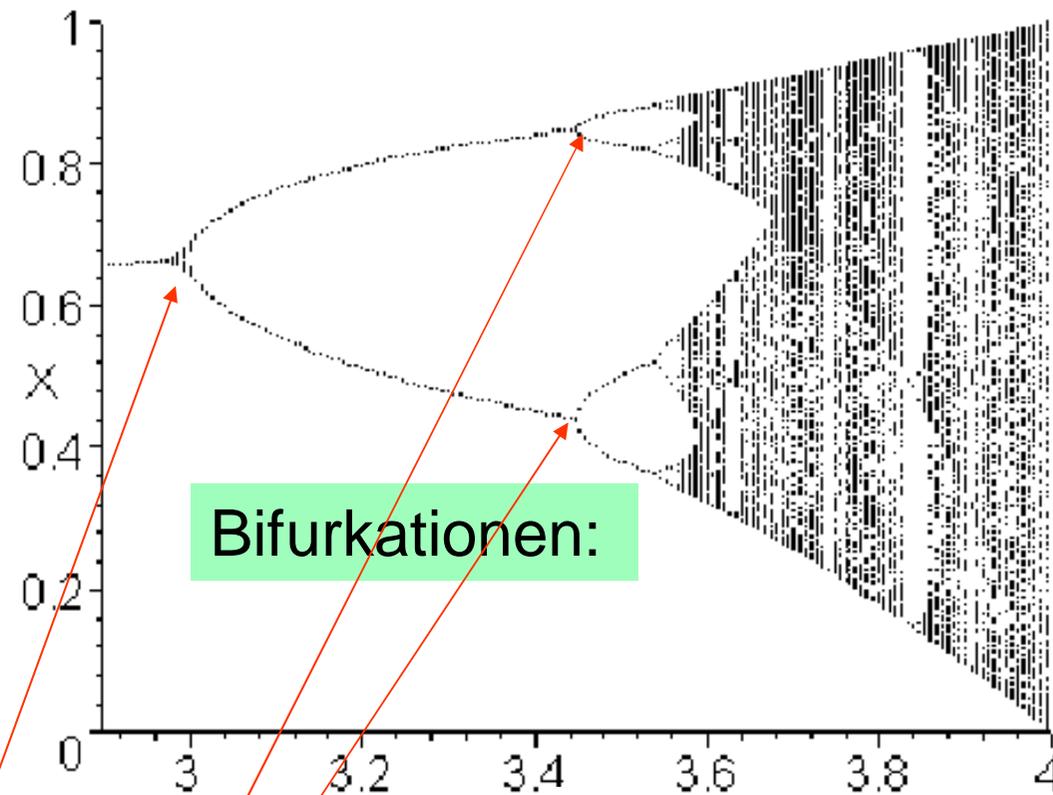
Ergebnis:

Oben, Konvergenz gegen $x_F = 0.5$

Unten, Oszillation zwischen vier
Grenzwerten
von Teilfolgen

Geometric representation: Logistic Map





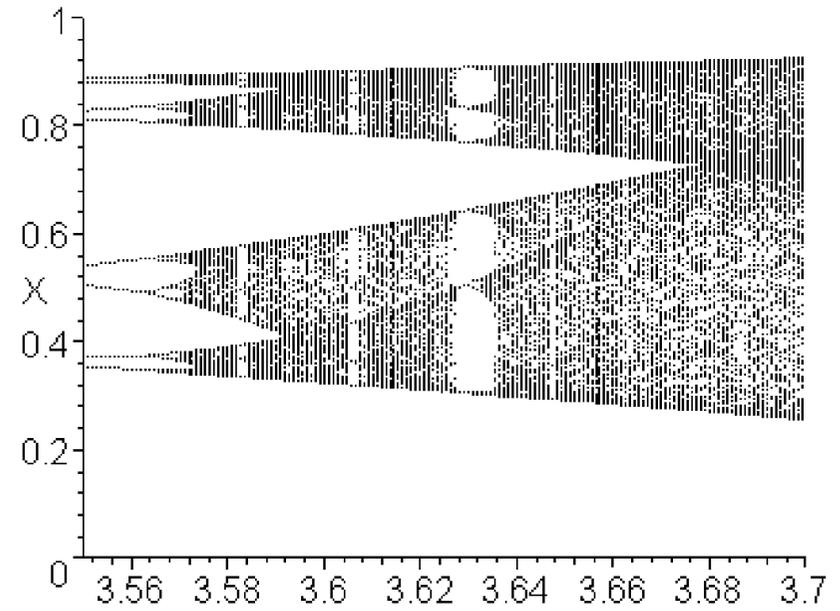
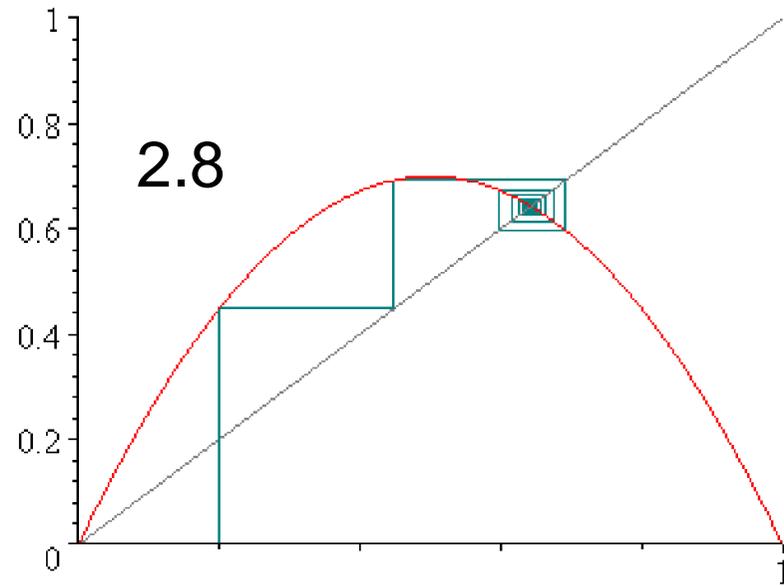
$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3.449 \dots \lambda_8 = 3.5699$$

$\lambda = 2 \rightarrow 1 \text{ Wert}, \lambda = 3.2336 \rightarrow 2 \text{ Werte}, \lambda = 4 \text{ unkorreliert} \rightarrow$

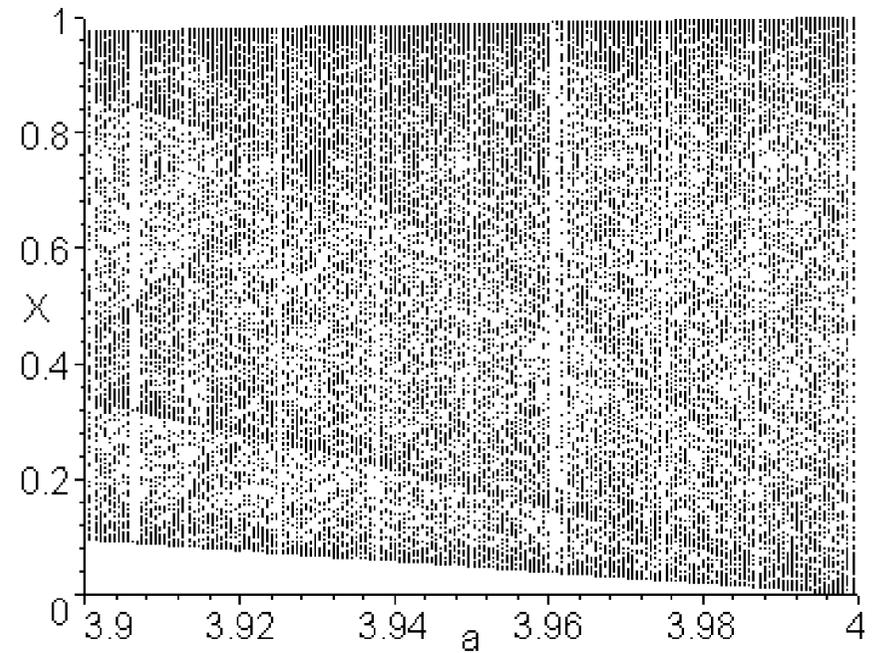
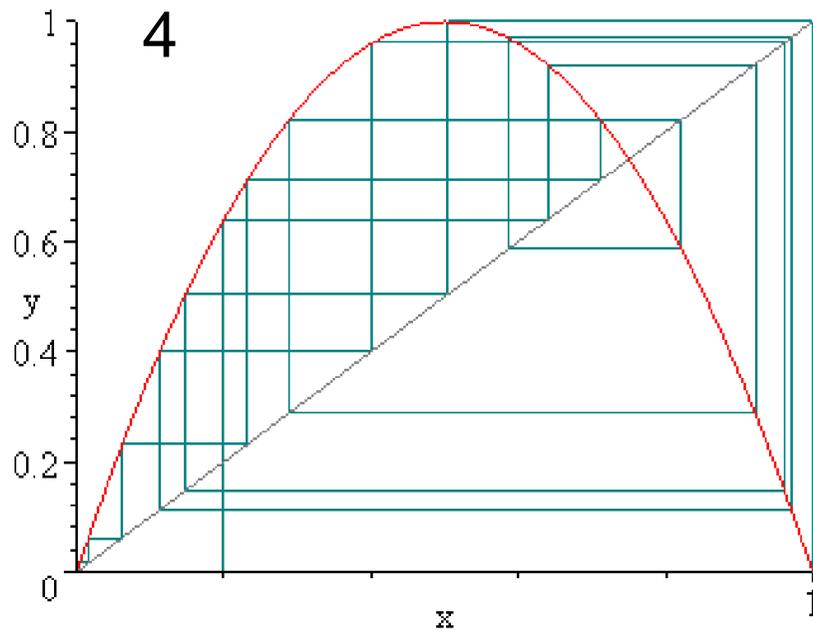
Signatur von Chaos

Extreme Sensitivität auf die Anfangsbedingungen:
Chaotisches System

Geometric representation: Logistic Map



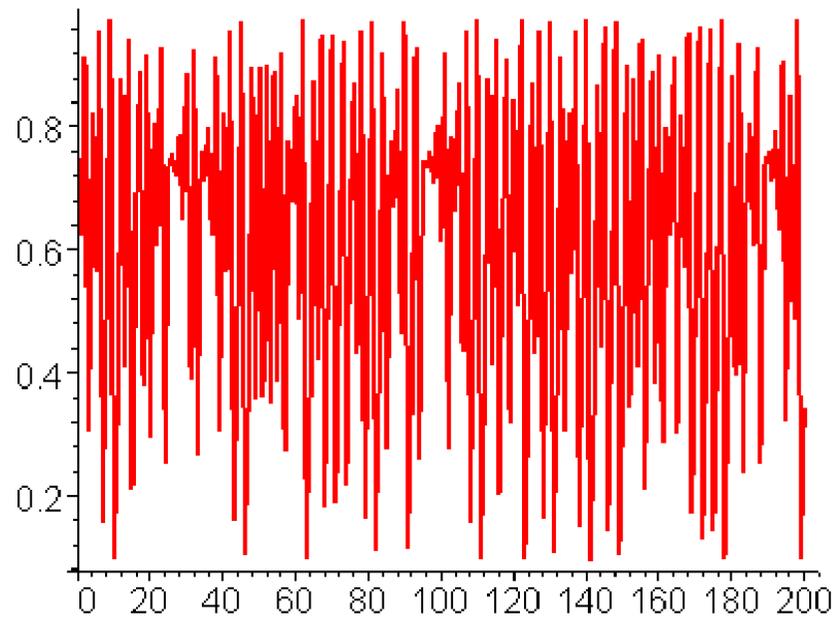
Geometric representation: Logistic Map



Wie unterscheidet man Chaos und Rauschen?

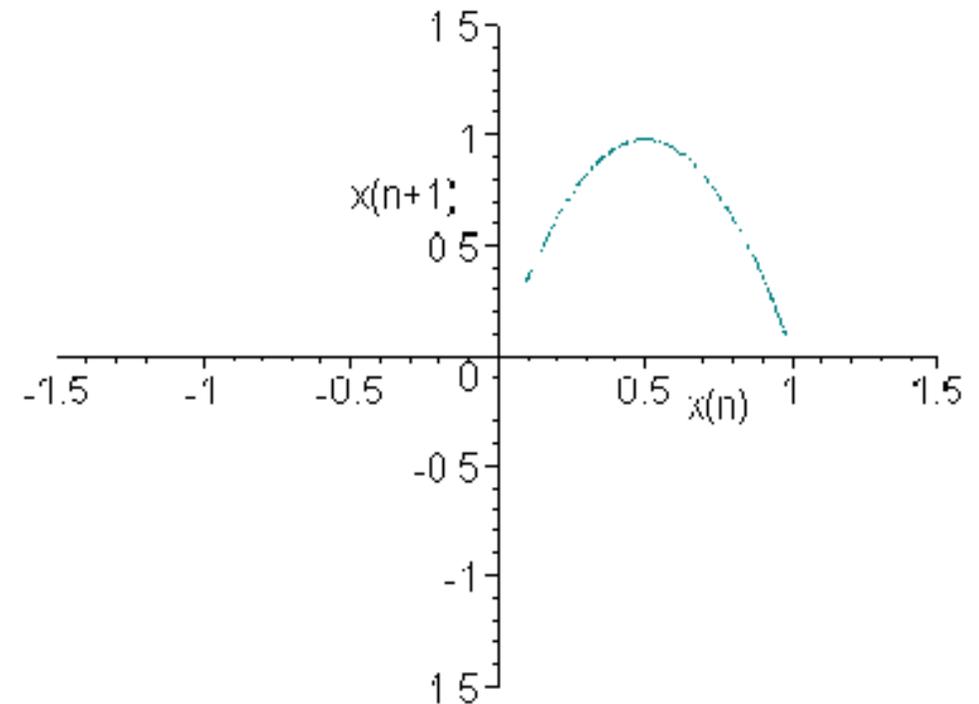
Methode zur Identifikation von Chaos

Zeitplot:

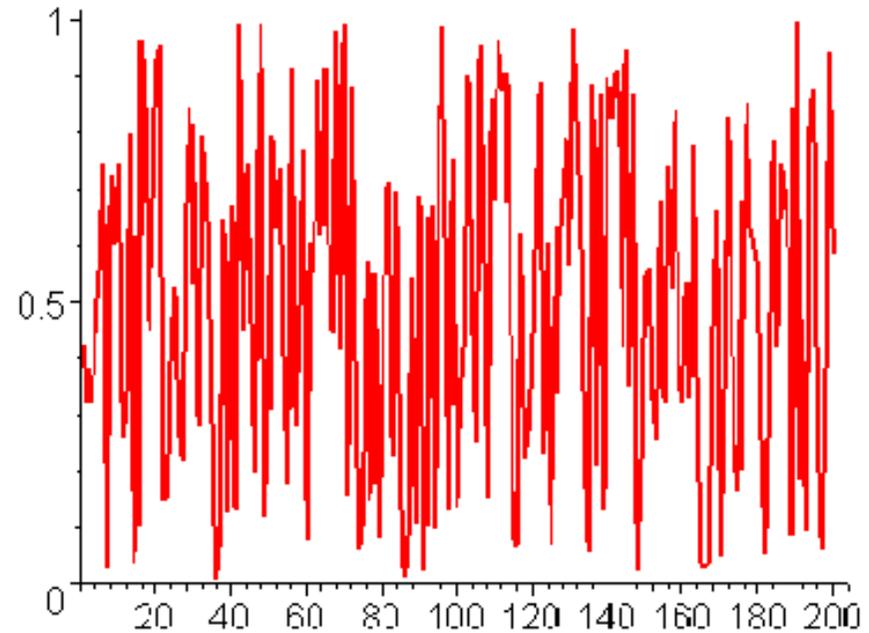


Ergebnis eines Eintrags

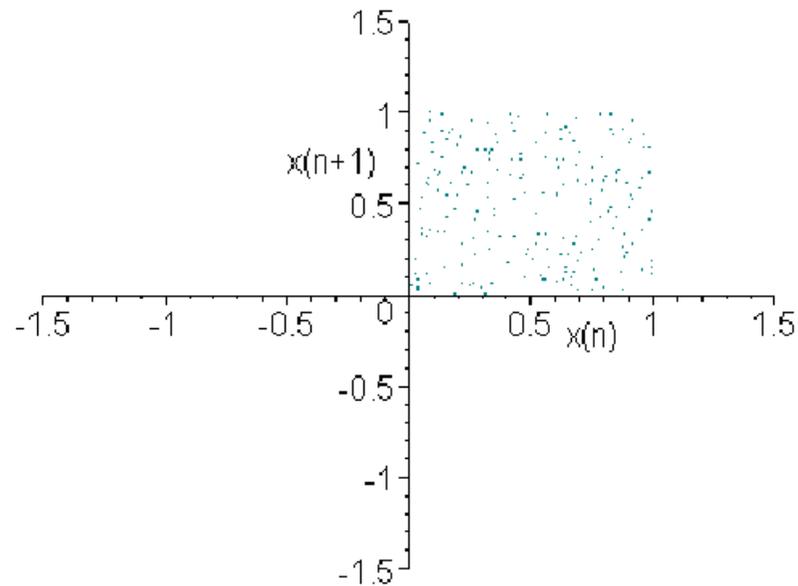
$$x(n \cdot \Delta t + 1) \leftrightarrow x(n \cdot \Delta t)$$



ein anderes Spektrum:



Ergebnis eines Eintrags $x(n \cdot \Delta t + 1) \rightleftharpoons x(n \cdot \Delta t)$

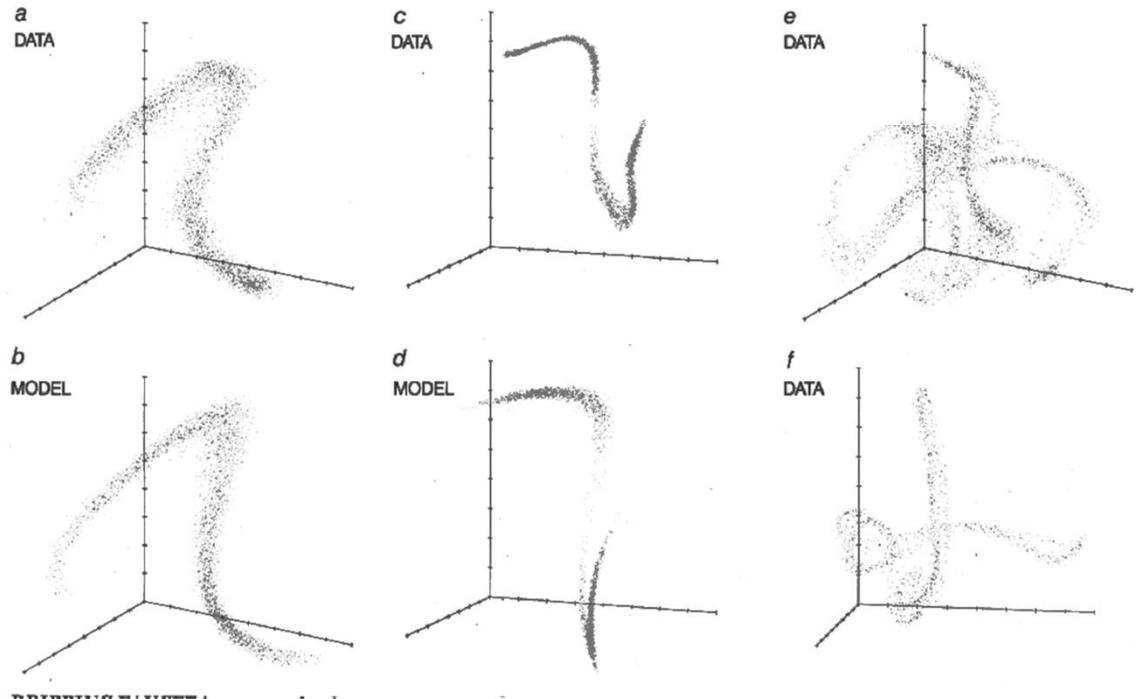
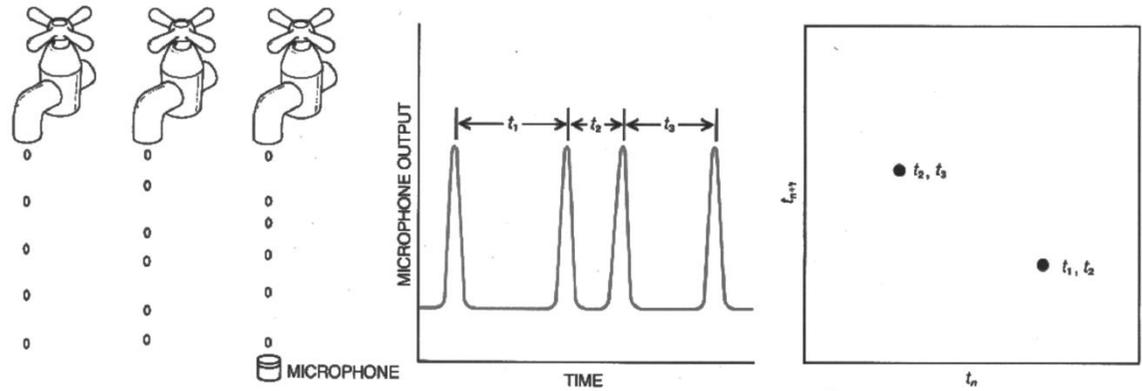


Das letzte Spektrum
ist Rauschen!

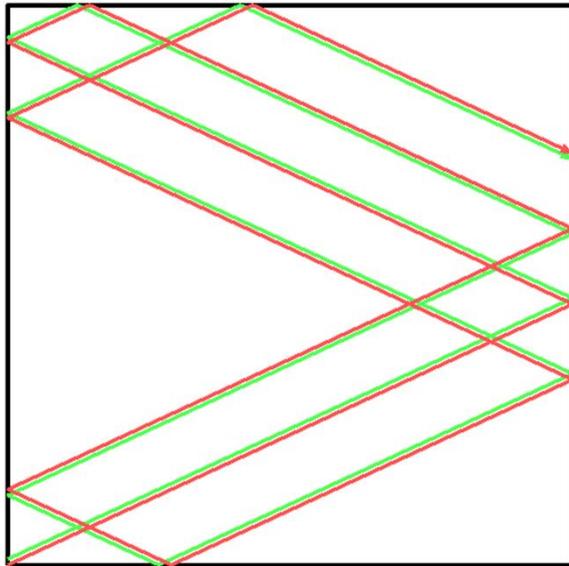
Ein weiteres Beispiel: "Wasserhahn tropft"

$$x(n \cdot \Delta t + 2) \not\leftrightarrow$$

$$x(n \cdot \Delta t + 1) \leftrightarrow x(n \cdot \Delta t)$$

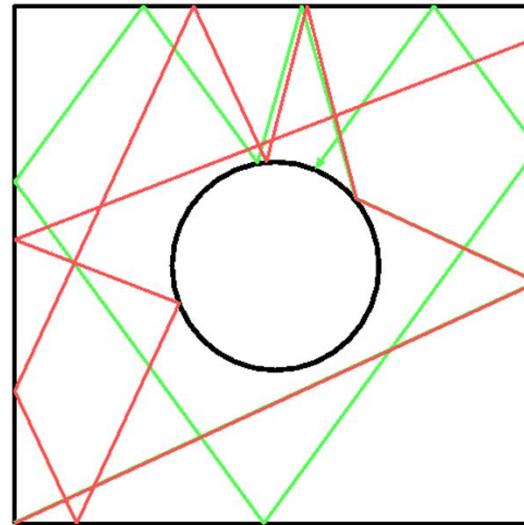


Parallele Bahnen



Liapunovscher
Charakteristischer
Exponent

Chaotische Bahnen Sinai- Billard

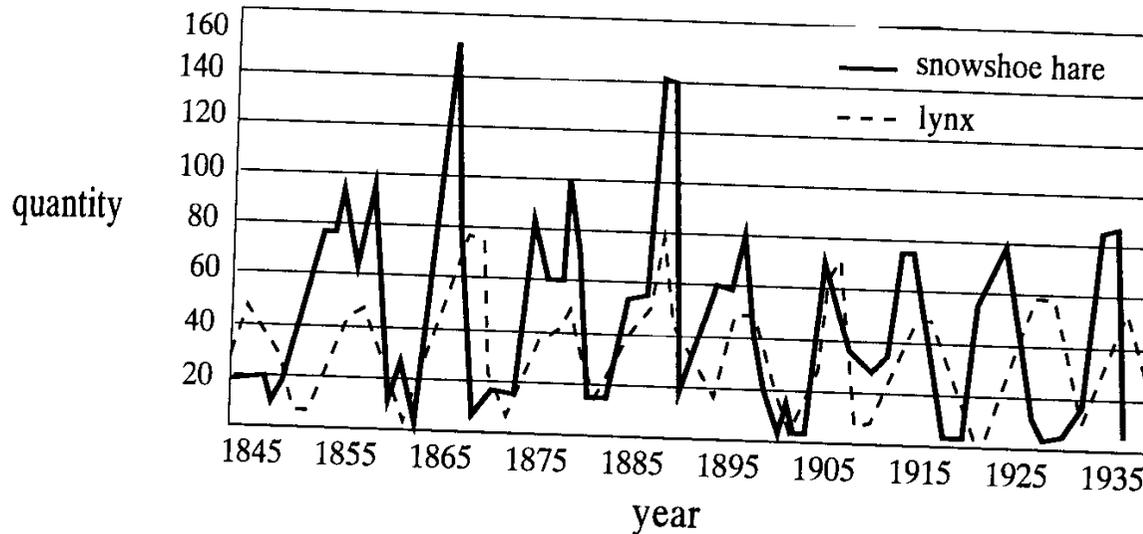


Kennzeichen:

Exponentielles Wachstum
des Abstandes benachbarter
Startpunkte

$$|x'_n - x_n| = e^{\lambda n} |x'_1 - x_1|$$

Weiteres Beispiel



Beobachtung!

Figure 2.4: Trading records of fur catches for the Hudsons Bay Company.

Steht als Beispiel von konkurrierenden Gruppen,
die mit nichtlinearen Gleichungen beschrieben werden. Wie:

Populationen von wechselwirkenden Arten in der Biologie
konkurrierende Parteien, Geschäfte,...

Beispiel für Hasen, r , \Leftrightarrow Fuchs, f , Gleichgewicht

Logistische Gleichung:

$$\dot{r} = 2r - \alpha \cdot r \cdot f$$

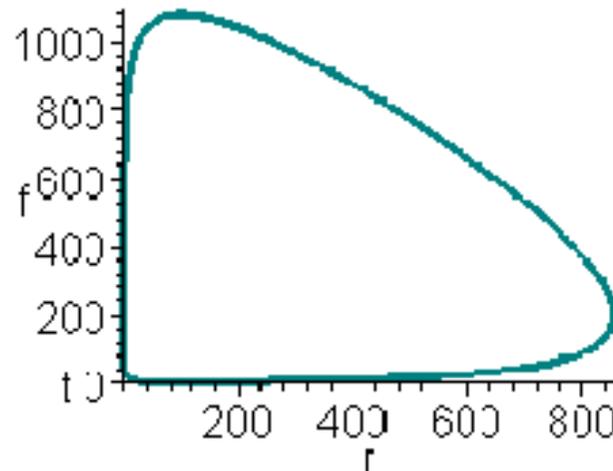
$$\dot{f} = -f + \alpha \cdot r \cdot f$$

α : Stärke der Fuchs-Hase Begegnungen

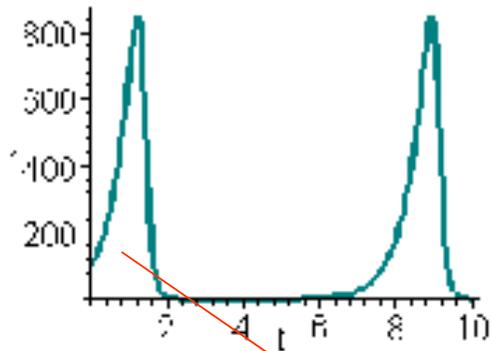
in den folgenden
Rechnungen:

$$\alpha = 0.01$$

A graph of foxes (f) vs rabbits (r)



A graph of foxes (f) vs rabbits (r)



A graph of foxes (f) vs rabbits (r)

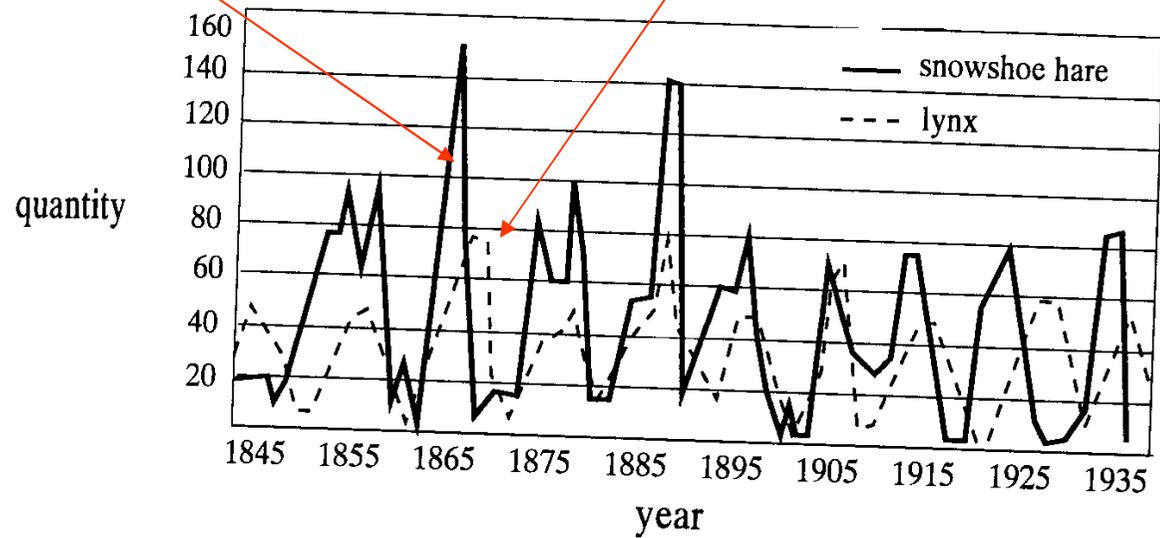
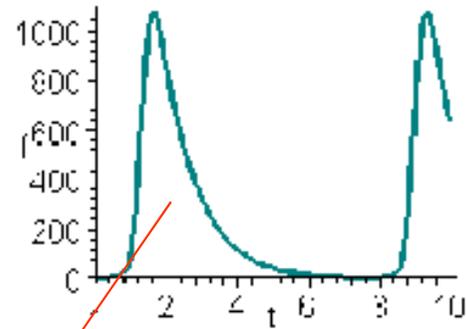
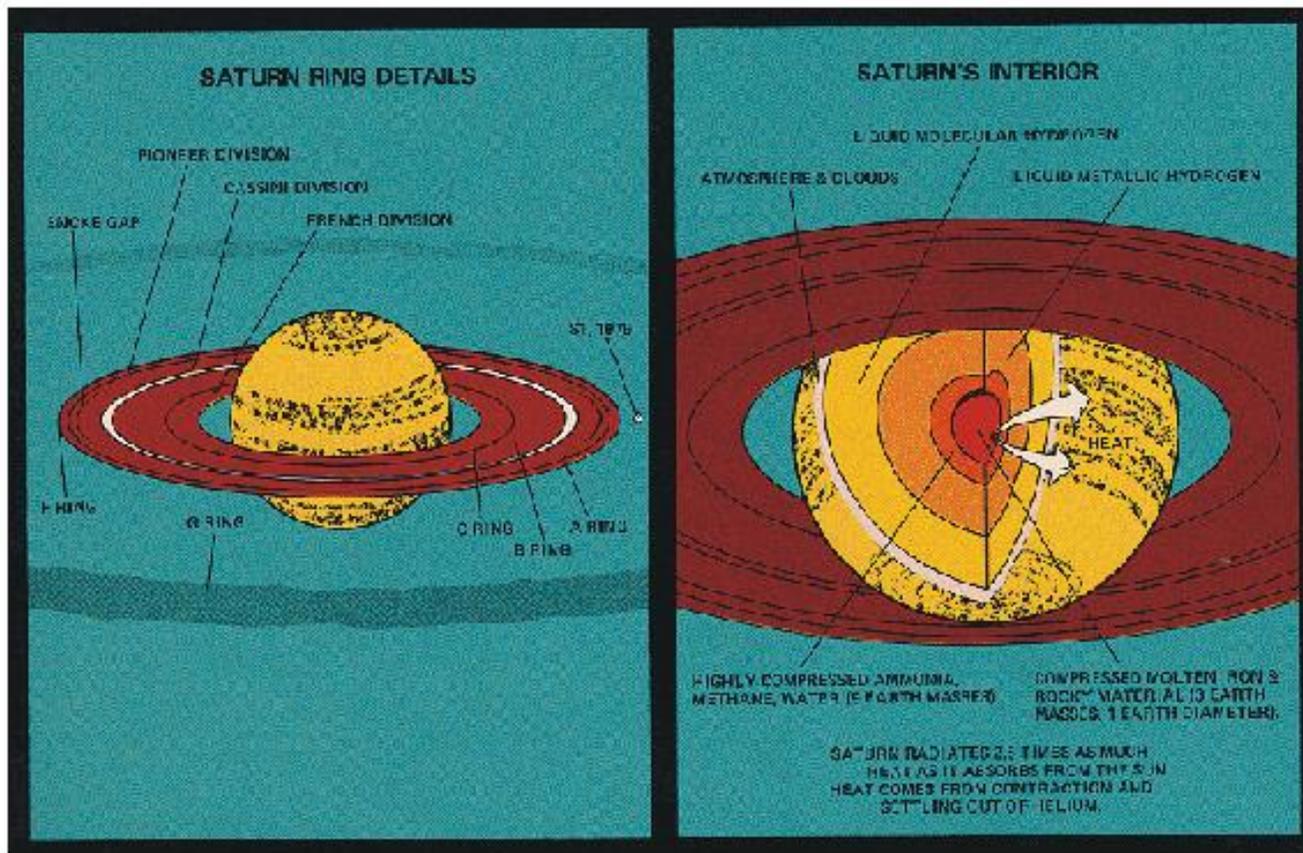
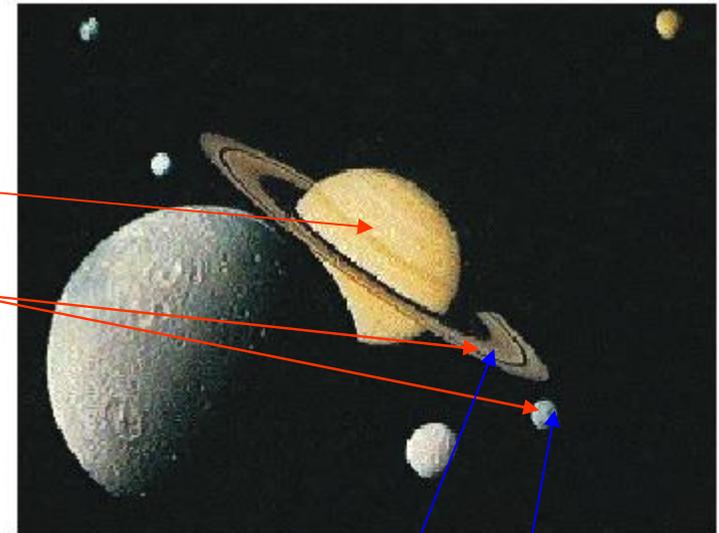


Figure 2.4: Trading records of fur catches for the Hudsons Bay Company.

Beispiel: Zentralplanet mit Satelliten 1 und 2



Gestörter Körper

Störer

Aufschaukelung, wenn $\frac{T_2}{T_3} = \frac{r}{s}, r, s$ natürliche Zahlen

→ Lücken im Ringsystem von Saturn Staubteilchen:2

Monde:3

→ Cassinische Ringe

Rationale Zahlen liegen auf der Zahlengerade dicht,
zwischen zwei rationalen Zahlen liegen \rightarrow viele weitere,
dazwischen liegen noch mehr irrationale

Endliche Genauigkeit:

Fibonacci

Nicht zu entscheiden ob rational oder irrational

Kolgomorov- Arnold- Moser Theorem \rightarrow

Existenz regulärer Bewegungen:

Mann kann die stabilste Bahn
berechnen

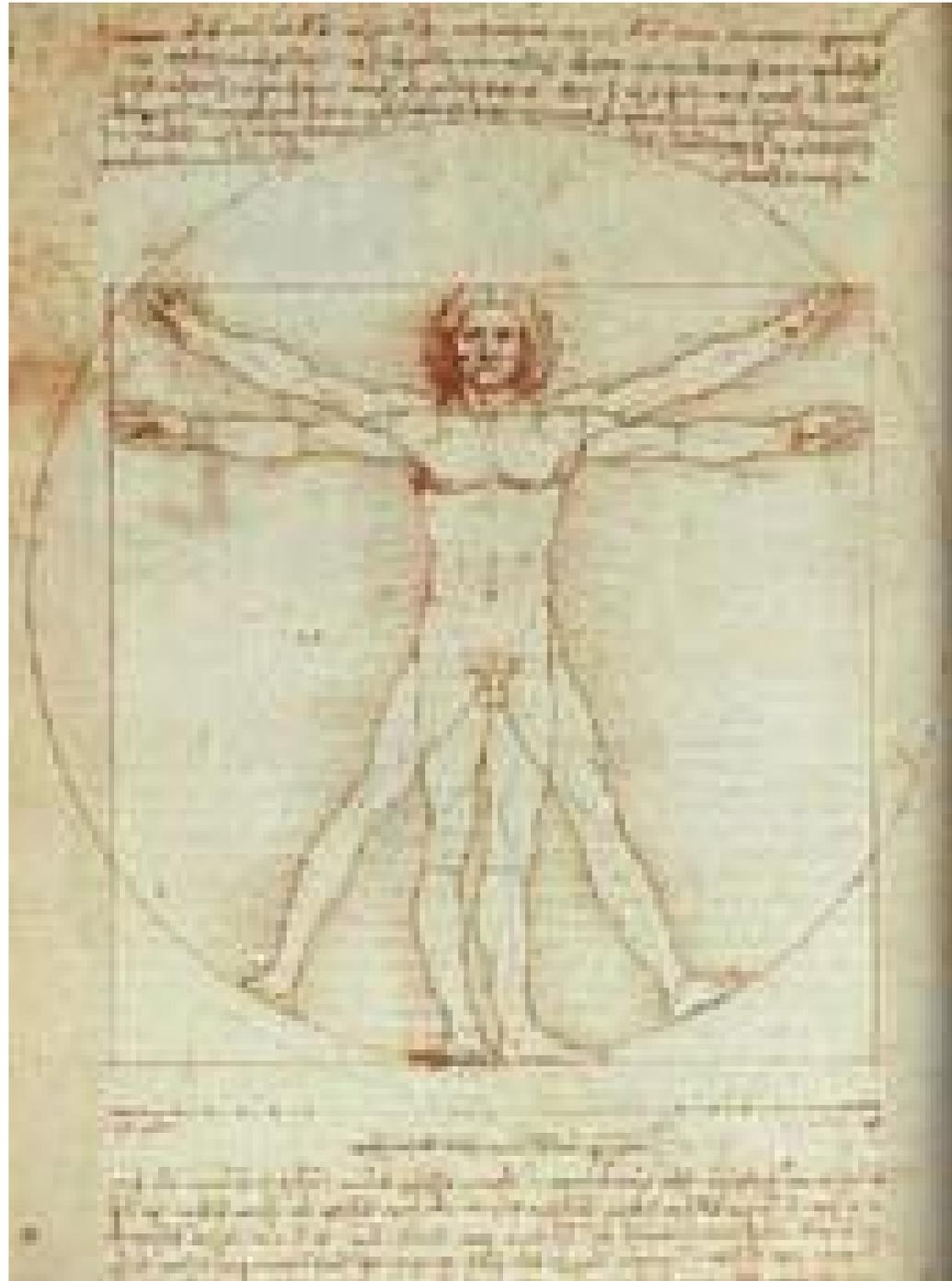
z. B:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} \rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0.618$$
$$\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$$

entspricht dem Goldenen Schnitt:

Leonardo
va Vinci

Goldener Schnitt



Für uns relevant: **Planetoidenbahnen**

Lücken: Rationales Verhältnis zur Periode des Jupiters!

Kirkwoodsche Lücke: Periodenverhältnis:3/1

Rechnungen zeigen: Bei 3:1 auch chaotisches Verhalten →

Exzentrizität der Bahn variiert in ungeordneter Weise
als Fkt. der Zeit. → **Gefahr für Erde**

Zweidimensionale Gleichungen

Ausgangspunkt logistische Gleichung: $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$

kann erweitert geschrieben werden als: $z_{n+1} = z_n^2 + c$

mit z komplex : $z = x + iy$ und $c = p + iq$

Mandelbrot Glg.

Trennung in Real- und Imaginärteil --->

2- dimensionale Darstellung: $x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + p$

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + q$$

für $c=0$

$$|z| < 1 \rightarrow$$

Punkte wandern $\rightarrow 0$

$$|z| > 1 \rightarrow$$

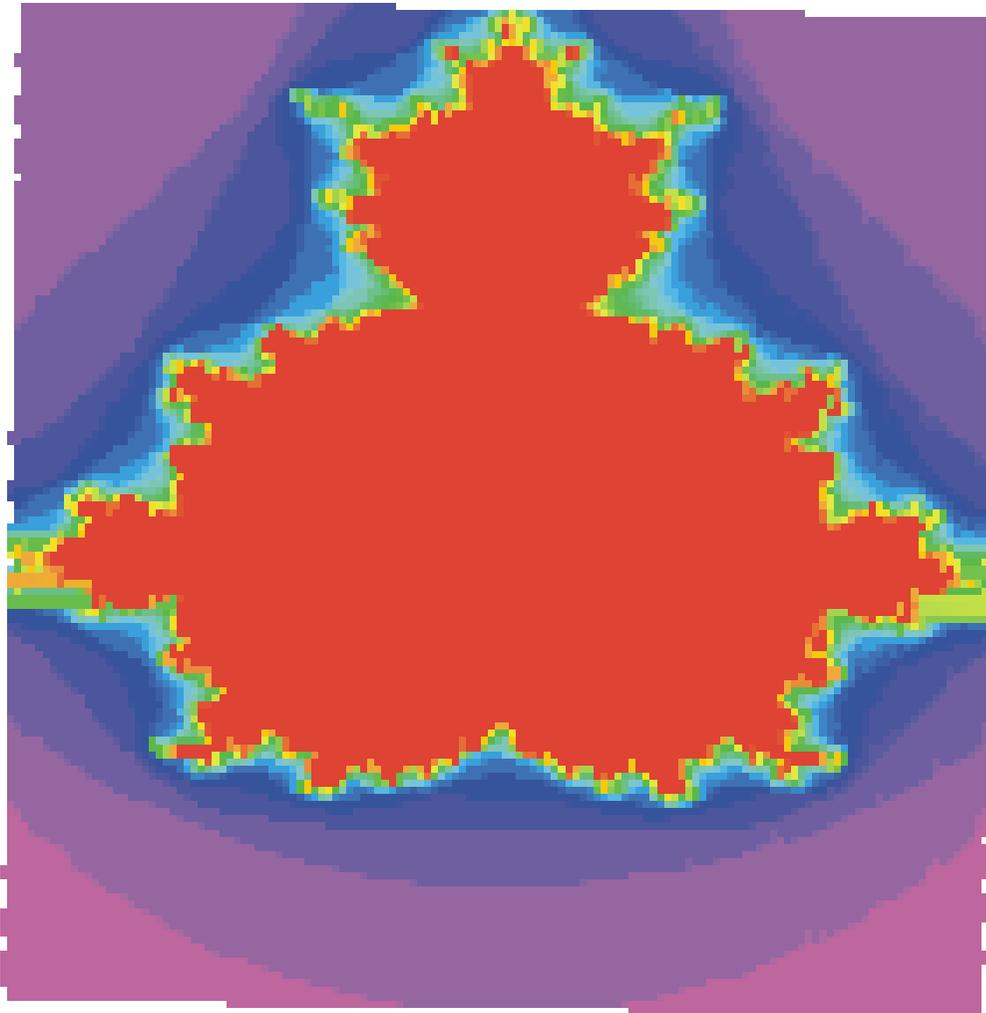
$\rightarrow \infty$

$$|z| = 1 \text{ Einheitskreis}$$



$c \neq 0$

2 Klassen: Zusammenhängende Ränder c



Selbstähnlichkeit

Lineare Differentialgleichung: $\dot{x} = -ax(t)$

Lösung: $x(t) = x_0 \cdot e^{-at}$ $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ eine Lösung, wenn $x_1(t), x_2(t)$ Lösung

Wie ist es bei: $\dot{x} = -ax(t)^2$ Lösung: $x(t) = \frac{x_0}{1+ax_0t}$

$$x_1(t) = \frac{x_{01}}{1+ax_{01}t} \quad \text{und} \quad x_2(t) = \frac{x_{02}}{1+ax_{02}t}$$

$x_1 + x_2$: keine Lösung!

Bemerkenswert: $x(t(\text{gro } \beta)) \approx \frac{1}{at}$ d.h.: unabhängig von x_0

Wechselt man die Zeitskala: $t \rightarrow \lambda t \Rightarrow x(\lambda t) = \frac{1}{\lambda at} = \frac{x(t)}{\lambda}$

Skalenähnlich!

Allgemein: $x(\lambda t) = \lambda^k x(t) \rightarrow$ Zeitabhängigkeit: $x(t) \sim t^k$

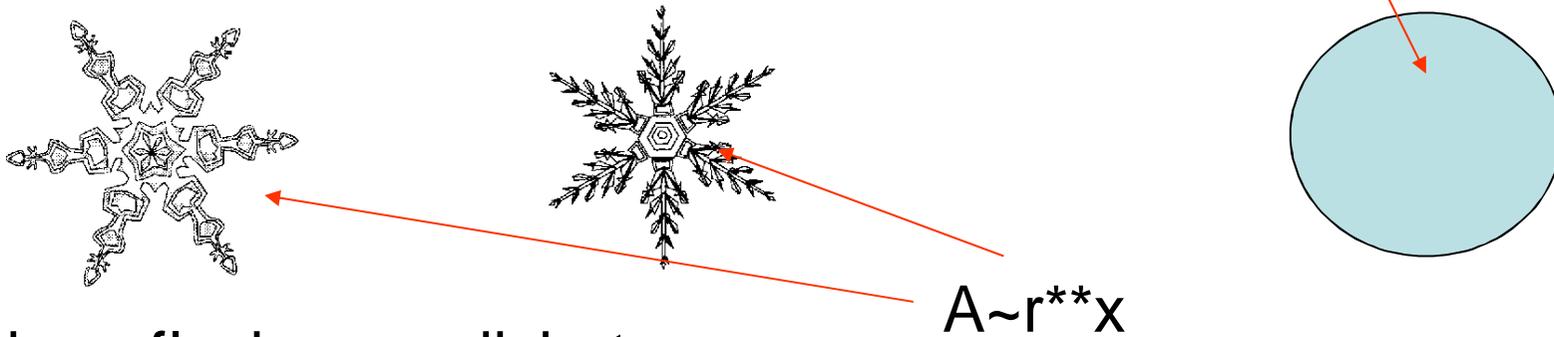
Weil dann gilt: $x(\lambda t) \sim \lambda^k t^k = \lambda^k x(t)$

Für lineare Glg.: $x(t' = \lambda t) = x_0 e^{-a\lambda t} = \frac{(x(t))^\lambda}{x_0^{\lambda-1}}$ man müsste

$a \rightarrow \frac{a}{\lambda}$ ändern Hier ist $\tau = \frac{1}{a}$ natürlicher Zeitmaßstab

Lösungen nichtlinearer Glg. fehlt ein natürlicher Maßstab!

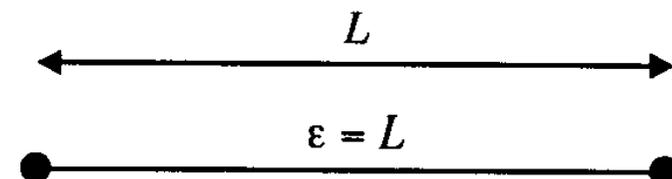
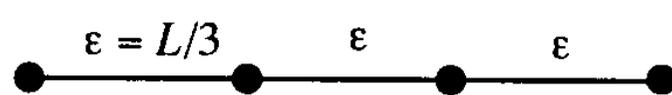
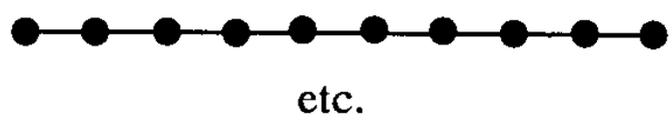
Sieht man sich folgende Flächen an: Fläche $A \sim r^{**2}$



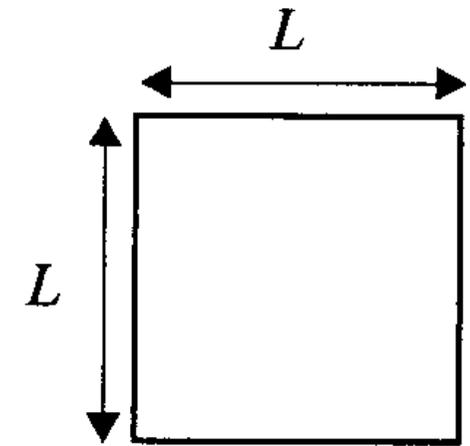
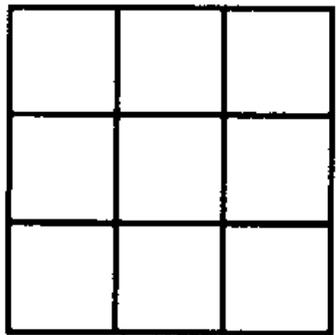
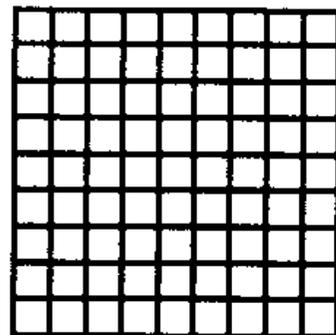
Schneeflocken, projiziert

$A \sim r^{**x}$

Fraktale

	$\frac{\epsilon}{L}$	$\frac{N(\epsilon)}{1}$
	L	1
	$L/3$	3
	$L/9$	9

In 2 Dimensionen :

		
$\epsilon = L$ $N(\epsilon) = 1$	$\epsilon = L/3$ $N(\epsilon) = 9$	$\epsilon = L/9$ $N(\epsilon) = 81$

$$N(\epsilon) = \frac{L^2}{\epsilon^2}$$

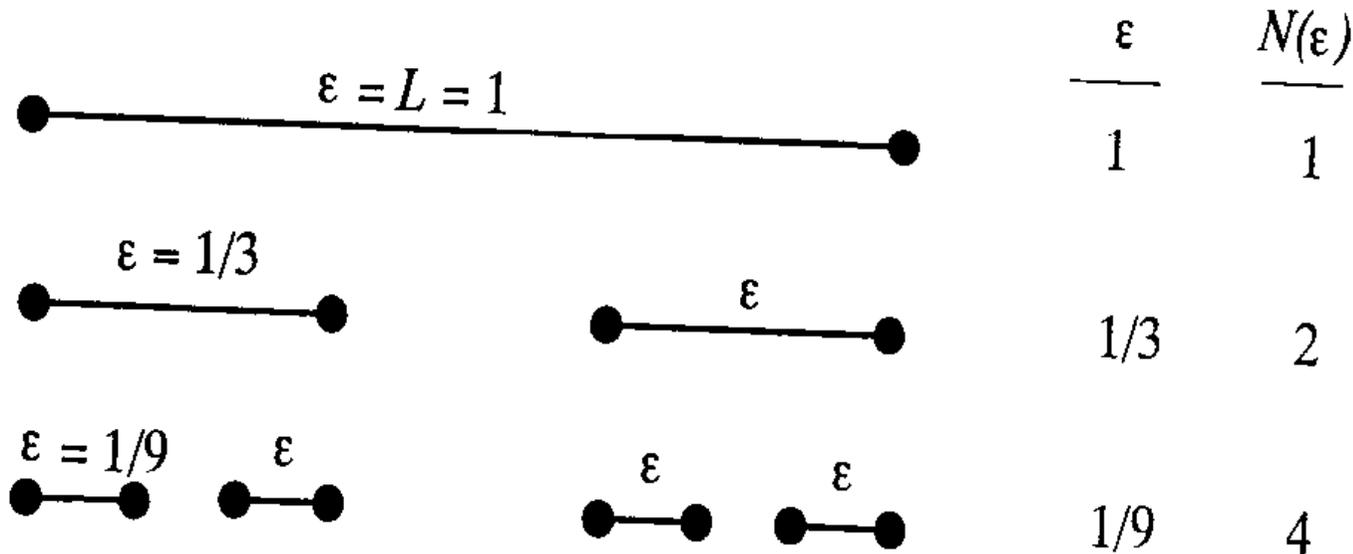
In 3 Dimensionen :

$$N(\epsilon) = \frac{L^3}{\epsilon^3}$$

oder: $D = \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln L + \ln(1/\varepsilon)}$ für $\varepsilon \rightarrow 0, \ln(1/\varepsilon) \gg \ln L$

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

Beispiel: Cantor Set

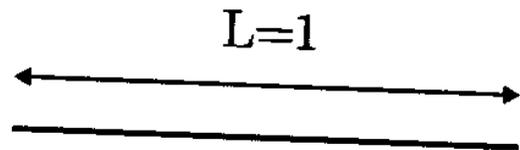


Im k-ten Schritt: $\varepsilon = (1/3)^k$ und $N(\varepsilon) = 2^k$

$$D_C = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^k} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.63093$$

Dimension zwischen Punkt(0-dim.) und kontinuierlicher Geraden.

Beispiel: Kochs triadische Kurve



1: $\varepsilon = 1, N(\varepsilon) = 1$



2: $\varepsilon = 1/3, N(\varepsilon) = 4$



3. $\varepsilon = 1/9, N(\varepsilon) = 16$

$$\rightarrow \varepsilon = (1/3)^k, N(\varepsilon) = 4^k \quad D_C = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^k}{\ln 3^k} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2619$$

Man sieht also, wie die Fläche einer Schneeflocken-Projektion im Prinzip mit einer fraktalen Dimension angenähert werden kann.

Regenrinne/ Wasserrad

Drehmoment

Gleichungen:

$$\frac{d(r^2 \bar{m} \omega)}{dt} = -g \cdot r \cdot \bar{m} \cdot \cos \varphi - k \cdot \omega$$

Drehimpuls

Massenveränderung

Reibung

$$A(r + r \sin \varphi)$$

Massengewinn

$$h \cdot m(\varphi)$$

Massenverlust

$$\frac{dm}{dt} = 2\pi A r - h \cdot \bar{m}$$

Führt zu den Lorentz-Gleichungen

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \dot{y} = R \cdot x - y - xz, \dot{z} = xy - z$$

$$\sigma = \frac{k}{2\pi A r^3} \quad R = \frac{g \cdot \pi \cdot A \cdot r^2}{k \cdot h^2}$$

Geschwindigkeit über Zeit

