# 2. Mechanik des starren Körpers

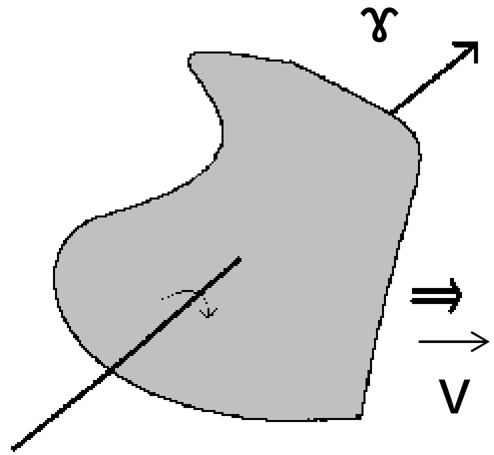
## 2.1. Translation und Rotation

In Kapitel 1: Massenpunkt

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow \; \vec{r}(t)$

In Kapitel 2: Massenpunkte

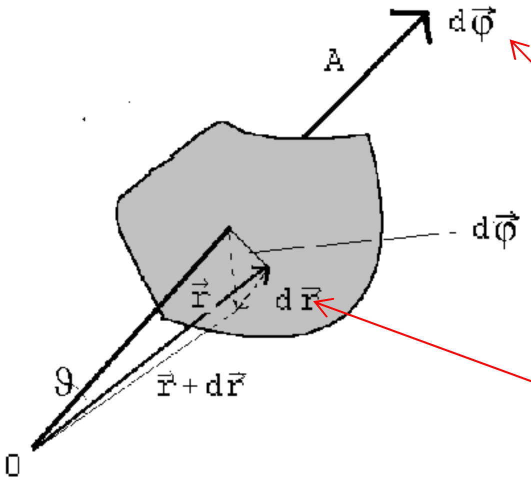
$\rightarrow\rightarrow\rightarrow \; \sum_i \vec{r}_i(t)$




Bewegung eines starren Körpers:

Rotation + Translation

Kinematik der Drehung:




A: Drehachse

$\vec{\varphi}$: Axialer Vektor (In Achsenrichtung)

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r} \qquad dr = d\varphi \cdot r \cdot \sin\vartheta$$

Geschwindigkeit: $\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$

Allgemein für einen Punkt auf einem starren Körper:

Analoga:

| | Translation | Rotation |
|---|---|---|
| Lage | $\vec{r}$ | $\vec{\varphi}$ |
| Geschw. | $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ | $\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$ |
| Beschl. | $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ | $\dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\varphi}}$ |

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

d.h.: Translation
+ Rotation

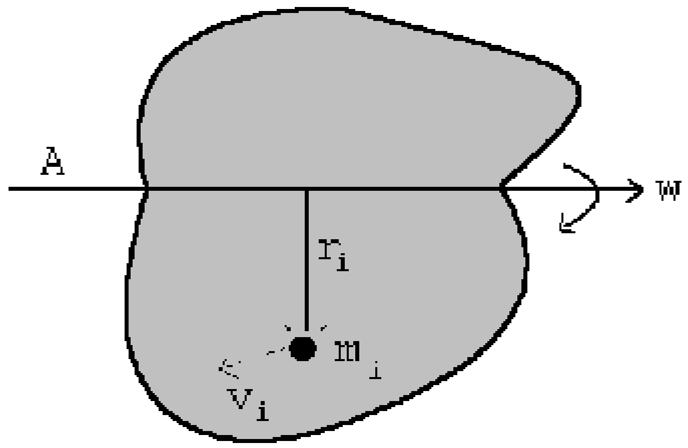
# 2.2. Rotationsenergie und Trägheitsmoment

Massenpunkt m $_i$ im Abstand r $_i$

zur Drehachse A,

Geschwindigkeit v $_i$

und die kinetische Ener




$$\frac{1}{2} m_i \bullet v_i^2$$

$$v_i = \omega_i \bullet r_i \quad \to\to \quad E_{kin_i} = \frac{1}{2}\omega^2 \bullet m_i \bullet r_i^2$$

Gesamte kinetische Energie

Rotationsenergie: $W_{Rot} = \frac{1}{2}\omega^2 \bullet \Sigma_i m_i \bullet r_i^2$

Übergang zur kontinuierlichen Massenverteilung: $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$

$$m_i \to \Delta m_i \to dm = \rho \bullet dV$$

$$\int dm \bullet r^2 \; : \; W_{Rot} = \frac{1}{2}\omega^2 \int dm \bullet r^2;$$

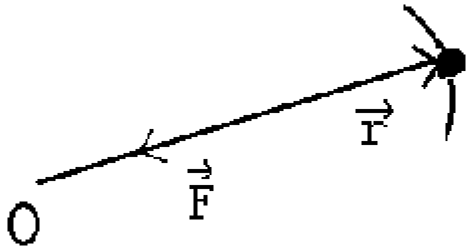
(Massenelement = Dichte x Volumenelement)

Trägheitsmoment I: $[I] = kg \bullet m^2$

Analogie: Translation ï Rotation: v-> $\omega$ ,m-> I

Bei der Drehbewegung um eine Achse A spielt I die gleiche Rolle, wie m bei der Translation

## 2.3.Drehimpuls und Drehmoment




Bewegungsgleichung: $\vec{F} = m \cdot \ddot{\vec{r}}$

Vektorprodukt mit $\vec{r} \rightarrow$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m \cdot \ddot{\vec{r}}$$

Wir betrachten : Zentralkraft: $\vec{F} \parallel \vec{r}$

$$\vec{r} \times \vec{F} = 0$$

$$\rightarrow\rightarrow\rightarrow \vec{r} \times m \cdot \ddot{\vec{r}} = 0$$

Wir können eine neue Größe erkennen: $\vec{L} = \vec{r} \times m \cdot \dot{\vec{r}}$

Denn: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m \cdot \dot{\vec{r}}\right) = \vec{r} \times m \cdot \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \times m \cdot \dot{\vec{r}}$

Aber: $\vec{r} \times m \cdot \ddot{\vec{r}}\ (s.o.)\ = 0 = \dot{\vec{r}} \times m \cdot \dot{\vec{r}}$

Definition: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\rightarrow\rightarrow \vec{L}$

Drehimpuls L zeitlich konstant

Beim starren Körper: $\vec{L} = \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$

Vektorrechnung: $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$

$$\rightarrow\rightarrow \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{\omega}(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i \cdot (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})$$

$$(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) = r_i^2$$

Drehimpuls des starren Körpers

$$\vec{L} = \vec{\omega} \cdot \sum_i m_i \cdot r_i^2 = I \cdot \vec{\omega}$$

$\vec{r}_i \perp \vec{\omega}$ -> $(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})$ =0

$$\left[\vec{L}\right] = kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$$

$\frac{d\vec{L}}{dt}$??

**Drehmoment**

$$\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\overrightarrow{dL}/dt = \sum_i m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \times \vec{v}_i + \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \times \dot{\vec{v}}_i =$$

Kraft $\times$ $\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{a}_i$

Abstand

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I \cdot \vec{\omega}) = I \cdot \dot{\vec{\omega}}}$$

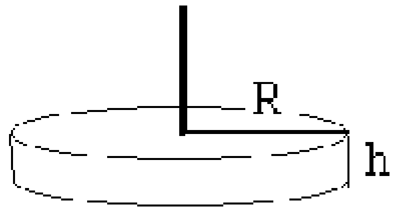
**Grundgesetz der Dynamik der Drehbewegung**

$\vec{T} = \dot{\vec{L}} \rightarrow\rightarrow\rightarrow \vec{T}$ bewirkt Änderung von $\vec{L}$

Für ein abgeschlossenes System: $\vec{T} = 0; \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow \dot{\vec{L}} = 0$

Der gesamte Drehimpuls eines Systems bleibt erhalten, solange kein äußeres Drehmoment angreift

**Beispiele für das Trägheitsmoment:**




$$I = \int dm \cdot r^2 = \rho \cdot \int r^2 \cdot dV; mit$$

$$dV = 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot dh$$

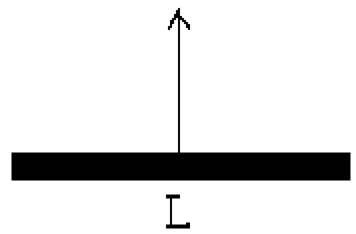
$$I = 2\pi \cdot \varrho \cdot h \cdot \int_0^R r^3 \cdot dr = 2\pi \cdot \varrho \cdot h \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^R$$

$$I = \pi \cdot \varrho \cdot h \cdot \frac{R^4}{2}; da \qquad M = \rho \cdot V = \pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \rho$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 0.5 \cdot M \cdot R^2}$$

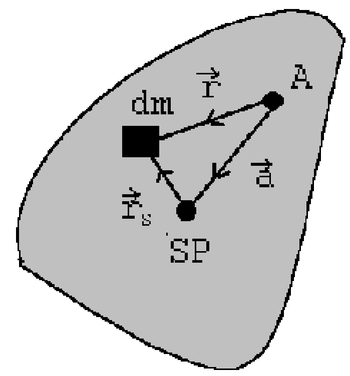
Ähnliche Rechnungen: I(Kugel)=2*M*R$^2$ */5

I(Stab)=M*L$^2$/12




Wie ist es , wenn die Drehachse A nicht durch den Schwerpunkt SP geht?

$$\vec{r} = \vec{r}_s + \vec{a}$$



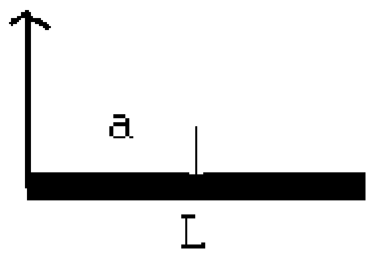

$$I = \int dm \bullet r^2 = \int dm \bullet \left(\vec{r}_s + \vec{a}\right)^2$$

$$= \int dm \bullet r_s^2 + 2 \bullet \vec{a} \bullet \int dm \bullet \vec{r}_s + a^2 \int dm$$

$$= \int dm \bullet r_s^2 + 2 \bullet \vec{a} \bullet \int dm \bullet \vec{r}_s + a^2 \int dm$$

I=I$_{SP}$+a$^2$M   Steinersche Satz

Trägheitsmoment um eine beliebige Achse!




Beispiel, wiederum Stab:

$$I = \frac{1}{12} M \bullet L^2 + M \bullet \frac{L^2}{4}$$

$$I = \frac{1}{3} M \bullet L^2$$

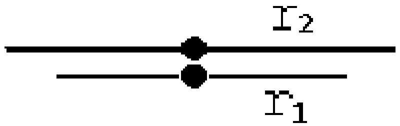
# 2.4. Energieumwandlung

Maxwellsches Rad

Rotationsenergie $\frac{1}{2} I \bullet \omega^2$

Potentielle Energie :mgh

Energie im rotierenden System, z.B. Drehschemel




I wird kleiner $\vec{L} = \vec{\omega} \bullet I$ r2Ÿ r1 ϒ1 >ϒ2

$\Rightarrow E_{rot_1} \succ E_{rot_2}$

Rotationsenergie? $E_{rot} = \frac{1}{2} I \bullet \omega^2$

Denn $L_1$=$L_2$

$E_{rot} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I}$

## 2.5. Gegenüberstellung: Translation- Rotation

| Translation | Rotation |
|---|---|
| Weg: $\vec{s}(\vec{r})$ | Winkel $\vec{\phi}$ |
| Geschw. $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ | Winkelgeschwindigkeit $\dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\phi}}$ |
| Beschl. $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$ | Winkelbeschl. $\dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\phi}}$ |
| Masse: m | Trägheitsmoment $I = \int dm \cdot r^2$ |
| Kraft $\vec{F}$ | Drehmoment $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$ |

**Grundgesetz der Dynamik**

| | |
|---|---|
| $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ | $\vec{T} = I \cdot \dot{\vec{\omega}}$ |
| $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ | $\vec{T} = \frac{d\vec{T}}{dt}$ |

**Gleichförmige Bewegung** $\vec{a} = 0, \vec{s} = \vec{v} \cdot t \qquad \vec{\omega} = 0, \vec{\phi} = \vec{\omega} \cdot t$

**Gleichmäßig beschleunigte Bewegung:**

$$\vec{v} = \vec{a} \cdot t, \vec{s} = \vec{a} \cdot \frac{t^2}{2} \qquad \vec{a} = \overrightarrow{konstant}, \; \dot{\vec{\omega}} = \overrightarrow{konstant}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\omega}} \cdot t, \vec{\phi} = \dot{\vec{\omega}} \cdot \frac{t^2}{2}$$

Impuls: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Kin. Energie: $E_{kin} = m \cdot \frac{v^2}{2}$

Rotat. Energie: $W_{rot} = I \cdot \frac{\omega^2}{2}$

Drehimpuls: $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$

**Arbeit und Leistung:** $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} \qquad W = \int \vec{T} \cdot d\vec{\phi}$

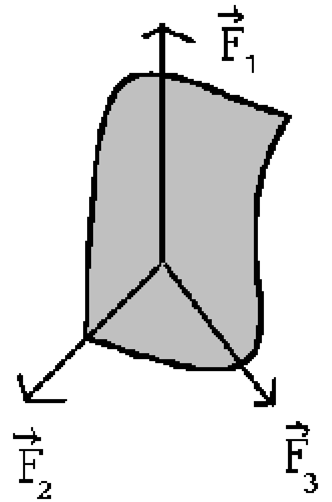
$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad W = \vec{T} \cdot \vec{\omega}$$

## 2.6. Gleichgewicht des starren Körpers

Gleichgewicht: $\vec{F} = 0; \vec{T} = 0$

Keine Translation: $\vec{F} = 0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

$$|\vec{F}_3| = |\vec{F}_2| + |\vec{F}_1|$$

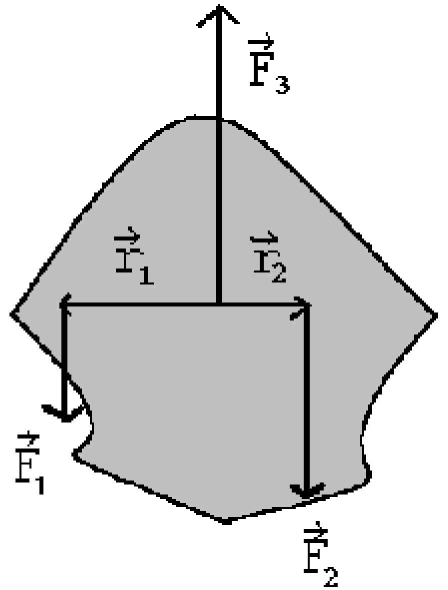



Keine Rotation: $\vec{T} = 0; \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$

$$\vec{F}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \times \vec{r}_2 = 0$$

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

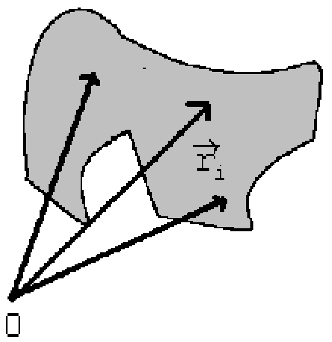
$$\Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2}{r_1}$$




Hebelgesetze (Archimedes 250 v.Chr.)

## Ausgedehnter Körper:

Wann ist $\vec{T} = 0$




Drehmoment aufgrund der Schwerkraft:

$$\vec{T}_g = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \times \vec{g}$$

$$\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{g};$$

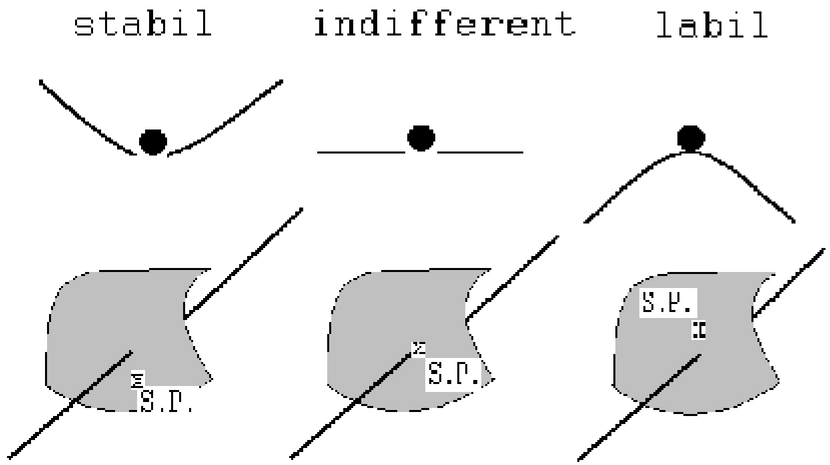
wann 0 ? Dann , wenn $\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i = 0$

$$\vec{T} = 0$$

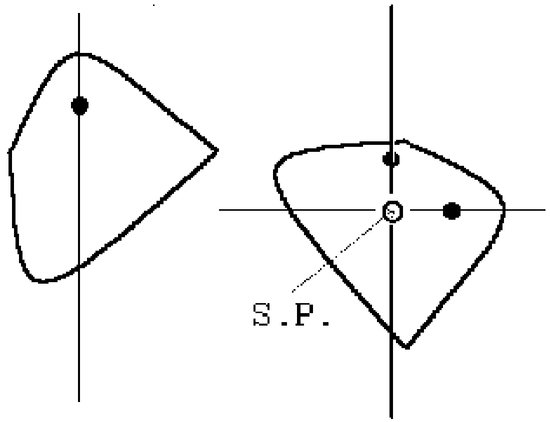
$$\vec{r}_{SP} = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

wenn Koordinatenursprung= Schwerpunkt

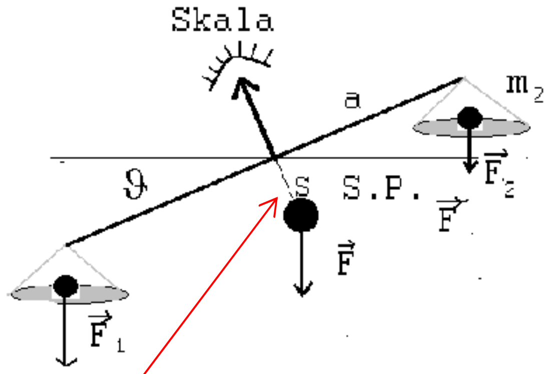
## Gleichgewichtsarten:



# Experimentelle Bestimmung des Schwerpunkts im Schwerefeld




## Waage:




$$\sum_i \vec{T}_i = 0$$

M: Gesamtmasse

Empfindlichkeit der Waage:

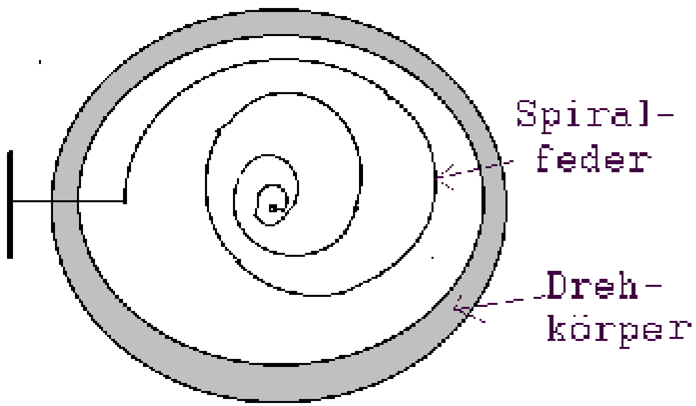
$\vartheta$ : "klein" $\rightarrow \sin\vartheta \approx \vartheta$

$$m_1 + m_2 \neq M; m_1 - m_2 = \Delta M;$$

$$\Rightarrow a \bullet \Delta M = s \bullet \vartheta \bullet g \bullet M \qquad a \bullet \cos\vartheta (m_1 - m_2) \bullet g = s \bullet \sin\vartheta \bullet g \bullet M$$

$\frac{\vartheta}{\Delta M} = \frac{a}{s \bullet M} \Rightarrow$ je kleiner s, desto größer die Empfindlichkeit

## 2.7. Drehschwingungen




Bei Auslenkung: Drehmoment $\approx \vartheta$

$\vec{T} = -D^* \cdot \vec{\vartheta}$; Winkelrichtgröße

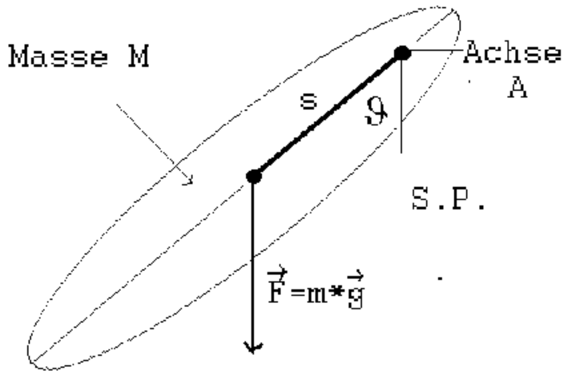
Bewegungsgleichung: $I \cdot \ddot{\vartheta} = -D^* \cdot \vartheta$

$$I \cdot \ddot{\vartheta} = -D^* \cdot \vartheta$$

Lösung: $\vartheta(t) = \vartheta_0 \cdot \cos\omega_0 \cdot t$ $\quad \vartheta_0$ : max.Auslenkung

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{I}} \quad I = I_{sp} + M \cdot s^2$$

## Physikalisches Pendel




Drehmoment: $-M \cdot g \cdot s \cdot \sin\vartheta$

$$\sin\vartheta \approx \vartheta \quad \Rightarrow T = -M \cdot g \cdot s \cdot \vartheta$$

$$I \cdot \dot{\omega} = I \cdot \ddot{\vartheta} \quad \Rightarrow I \cdot \ddot{\vartheta} = -M \cdot g \cdot s \cdot \vartheta$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{M \cdot g \cdot s}{I_{sp} + M \cdot s^2}}$$ mit $I = I_{sp} + M \cdot s^2$ $\quad \frac{s}{I_{sp} + M \cdot s^2} =$ Reduzierte Pendellänge