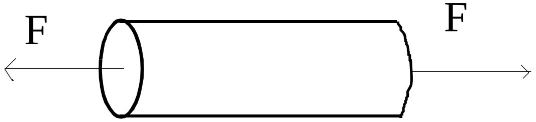
# 3. Mechanik deformierbarer Körper

Ausgedehnte Massenverteilungen, die Konstituenten haben keinen festen Abstand¸ **Änderung der Form**:

a) Volumenerhaltung: Scherung, Biegung , Drillung
b) Volumenänderung: Kompression, Dilatation

## 3.1 Deformation fester Körper




$$\Delta l \sim \frac{l \cdot F}{A}$$

A:Querschnittsfläche

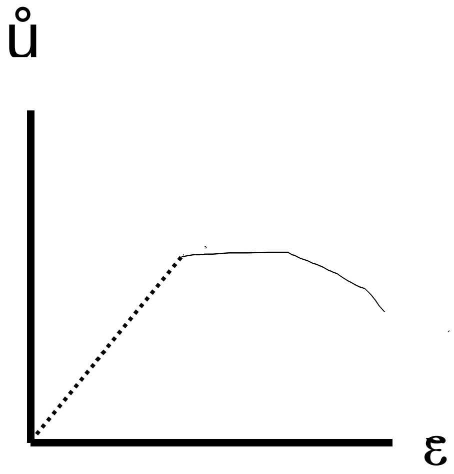
F=Normalkraft
Draht: Länge l, Dicke d

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A}$$

E: Elastizitätsmodul

$$\frac{F}{A} = \sigma$$

ů Normalspannung oder Druck : N/m$^2$ = Pa mit Pa für Pascal

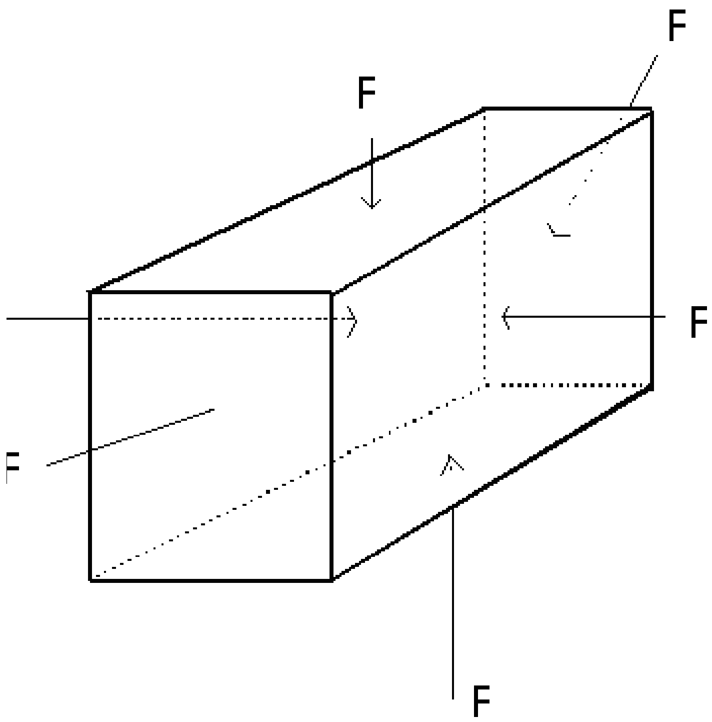


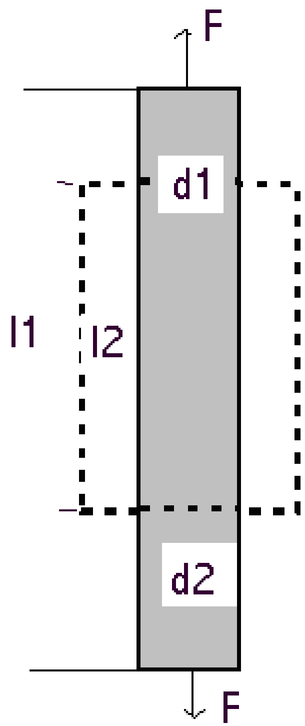

# Hooksches Gesetz (17tes Jahrhundert)

$$\boxed{\sigma = E \bullet \varepsilon}$$

µ :Poisson-Koeffizient

**Querkontraktion:** $\frac{\Delta d}{d} = \mu \bullet \frac{\Delta l}{l}$




$$\Delta V = V_1 - V_2$$

$$l_2 = l_1 - \Delta l$$

$$d_2 = d_2 - \Delta d$$

$$\Delta V = d_1^2 \bullet \Delta l - 2 l_1 \bullet d_1 \bullet \Delta d$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{d_1^2 \bullet \Delta l}{d_1^2 \bullet l_1} - \frac{2 l_1 \bullet d_1 \bullet \Delta d}{d_1^2 \bullet l_1}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} - \frac{2 \bullet \Delta d}{d} = \varepsilon - 2\mu\varepsilon$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{E}\sigma(1 - 2\mu)$$

Druck von allen Seiten :

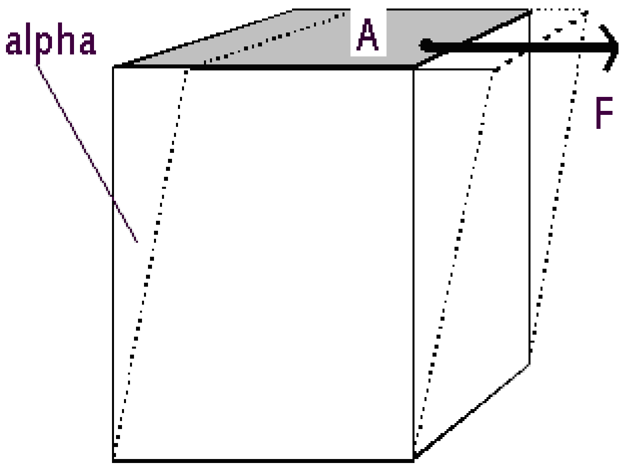
$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\Delta p \rightarrow -\Delta p = k \bullet \frac{\Delta V}{V}$$

[k] = Pa ;   = 1/k    k: Kompressionsmodul

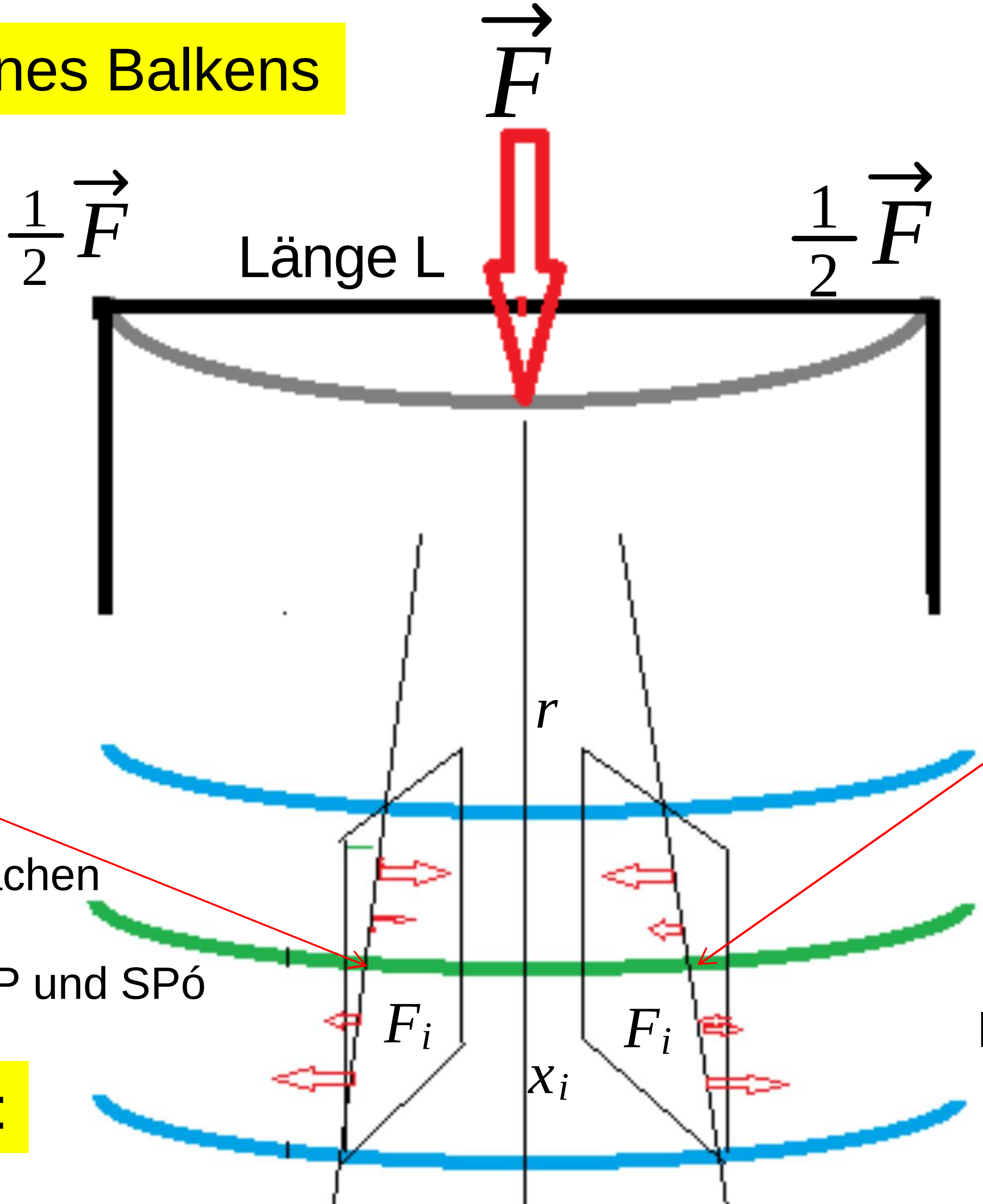
"Kompressibilität"

Scherung $= \frac{F}{A}$ Scherspannung

F = Scherkraft



# Biegung eines Balkens




Gleichgewicht

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

$$\sum_i \vec{T}_i = 0$$

Querschnittsflächen bleiben eben:
Drehung um SP und SPó

Neutrale Faser

Inneres Drehmoment

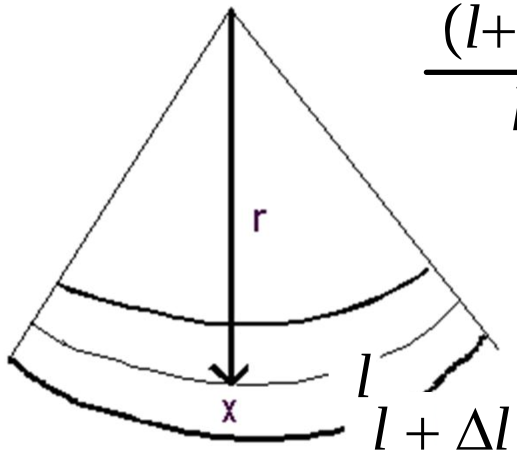
$$= \frac{1}{2} \cdot F \cdot \frac{L}{2}$$

## Drehmoment:

$$\sum_i dF_i \cdot x_i = \sum_i \frac{dF_i}{dA_i} dA_i \cdot x_i = \sum_i \sigma_i \cdot dA_i \cdot x_i$$

Wie groß ist ů
Aus der Geometrie

mit dem Hookschen Gesetz

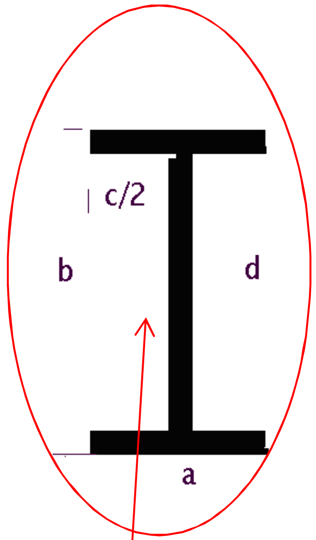


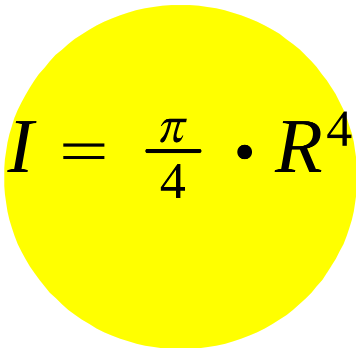

$$\frac{(l+\Delta l)}{l} = \frac{(r+x)}{r}$$

$$\varepsilon = E \cdot \frac{x}{r}$$

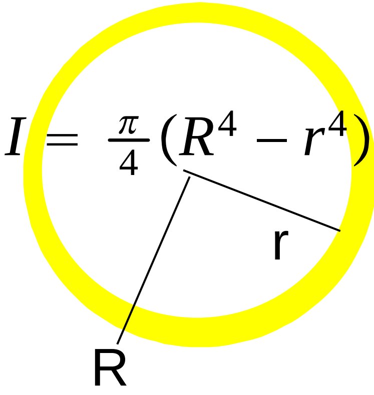
Bei Trägern !
Stabilität mit weniger Masse

Siehe auch z.B. Knochen der Vögel

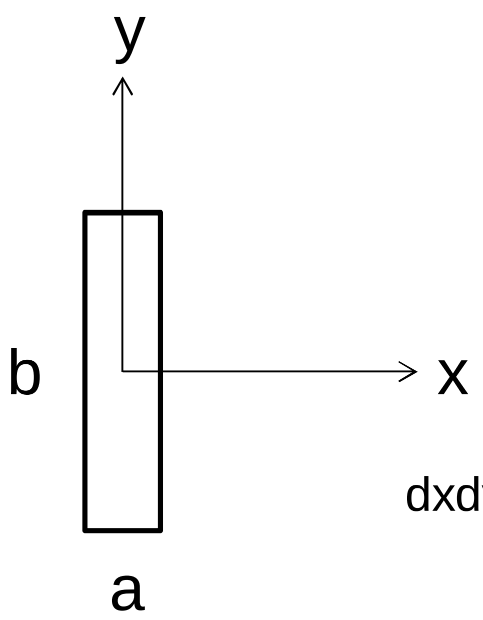


$$I = \frac{\pi}{4} \cdot R^4$$




$$I = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$$




Flächen-
trägheitsmoment

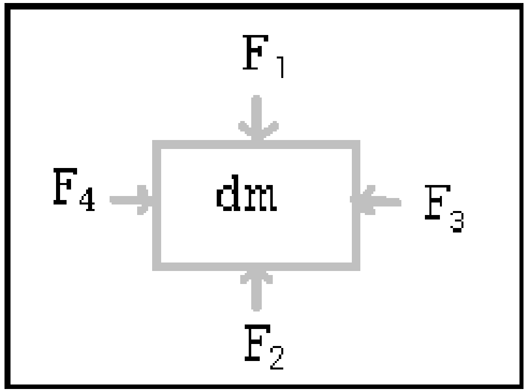
dxdy=dA

$$I = \int dA \cdot x^2$$

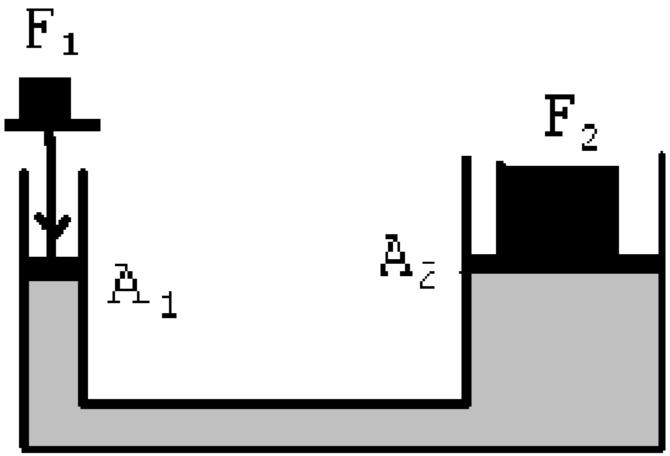
$$I = \frac{1}{12}(a \cdot b^3 - c \cdot d^3)$$

# 3.2. Druck in ruhenden Flüssigkeiten

Flüssigkeit im Gleichgewicht:




Beispiel : Hydraulische Presse




dm Teil der Flüssigkeit mit:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \vec{F}_3 = -\vec{F}_4$$

Andernfalls Bewegung

$P = \frac{F}{A} =$ konstant $\Rightarrow$ $\boxed{F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1}$

Druckarbeit ist für beide Zylinder gleich groß:

$$\Delta W_1 = F_1 \bullet \Delta x_1 = \frac{F_1}{A_1} A_1 \bullet \Delta x_1 = P \bullet \Delta V_1$$

$$\Delta W_2 = F_2 \bullet \Delta x_2 = \frac{F_2}{A_2} A_2 \bullet \Delta x_2 = P \bullet \Delta V_2$$

Abgeschlossenes System:

$$\Rightarrow \Delta V_1 = \Delta V_2$$

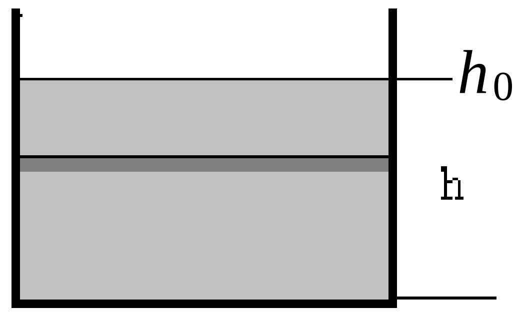
## Hydrostatischer Druck= Schweredruck

$$P(h) = \frac{\rho \cdot (h_0 - h) \cdot A \cdot g}{A};$$

Am Boden(h=0):

$$\rho \cdot (h_0 - h) \cdot A \cdot g$$

$$P = \rho \cdot h_0 \cdot g$$




$$= \rho \cdot (h_0 - h) \cdot g$$

Z.B.: Wassersäule 10m:

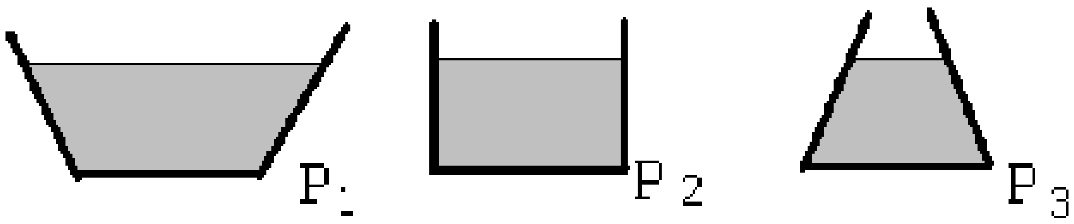
$$\rho = \frac{10^3 kg}{m^3}$$

Gewicht über h

$$\Rightarrow P_0 = 10^3 \cdot 10 \cdot 9.8 = 98000.0 Pa$$

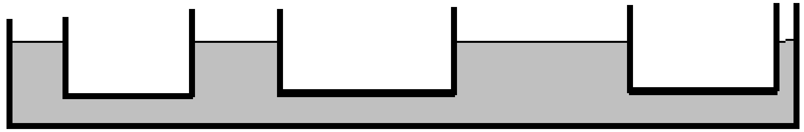
oder 980 hecto-Pascal

Beispiele: Hydrostatisches Paradoxon:

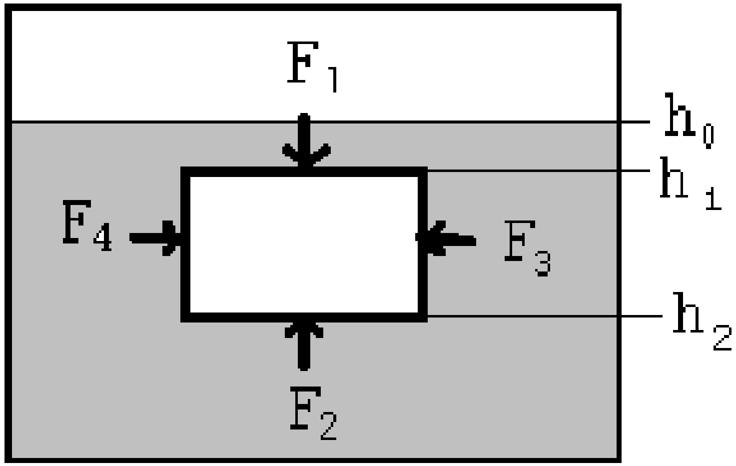



$$P = \rho \cdot h \cdot g \Rightarrow P_1 = P_2 = P_3$$

Kommunizierende Röhren



Auftrieb:Kraft $F_A$




$$\vec{F}_1 \neq -\vec{F}_2, \vec{F}_3 = -\vec{F}_4 \Rightarrow$$

$$\vec{F}_A = \vec{F}_2 - \vec{F}_1$$

$$P(h_1) = \rho \cdot g \cdot (h_0 - h_1)$$

$$P(h_2) = \rho \cdot g \cdot (h_0 - h_2) \Rightarrow$$

$$F_A = \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2) \cdot A$$

$F_A = g \cdot \rho \cdot V$ Gewichtskraft

## Archimedische Prinzip:

*Jeder Körper erfährt in einer Flüssigkeit einen Auftrieb, der gleich ist der Gewichtskraft, der von ihm verdrängten Flüssigkeit*

# 3.3. Druck und Volumen ruhender Gase

Gase sind "viel" kompressibler als feste Körper und Flüssigkeiten

Boyle-Mariottsches Gesetz:

Bei konstanter Temperatur:

$$P \bullet V = \text{konstant}$$

wenn dies erfüllt ist, spricht man von einem idealen Gas

Isotherme Kompressibilität:

$$\kappa = -\frac{\frac{\Delta V}{V}}{\Delta p}$$

$$P \bullet V = \text{Konstant} = b$$

$$\Rightarrow V = \frac{b}{p} \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta P} \backsimeq \frac{dV}{dP} = -\frac{b}{P^2}$$

$$\Rightarrow \kappa = -\frac{1}{V}\left(-\frac{b}{P^2}\right) = \frac{b}{V \bullet P^2} = \frac{b}{b \bullet P} = \frac{1}{P}$$

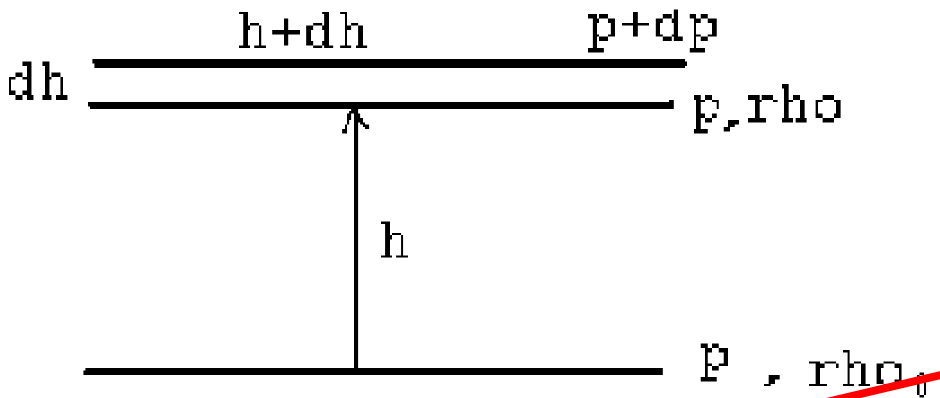
Für alle Gase gleich!

# Barometrische Höhenformel:

Ann.: $\rho_0$ überall gleich, wie am Erdboden $\Rightarrow h_{\max} = \frac{P_0}{\rho_0 \cdot g}$

$$\approx \frac{10^5\,Pa}{1kg/m^3 \cdot 10m \cdot s^{-2}} = 10000.0m$$

aber $\rho$ nimmt mit der Höhe ab!




Schweredruck nimmt mit der Höhe ab!

$$dP = -\rho \cdot g \cdot dh$$

$$\frac{\rho}{P} = \frac{\rho_0}{P_0} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{P_0} P$$

$$dP = -\rho \cdot g \cdot dh = -\frac{\rho_0}{P_0} P \cdot dh \text{ g}$$

$$\int_{P_0}^{P(h)} \frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0}{P_0} g \int_0^h dh \Rightarrow$$

$$\ln \frac{P(h)}{P_0} = -\frac{\rho_0}{P_0} \cdot g \cdot h$$

$$P = P_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0}{P_0} gh}$$

denn setzt man

$$V = \frac{M}{\rho}$$

in das Boyle- Mariottesche Gesetz ein

$$\Rightarrow P = \frac{\text{konstant}}{M} \rho \Rightarrow P \sim \rho$$

# Barometrische Höhenformel

$$\boxed{P(h) = P_0 \bullet e^{-\frac{\rho_0}{P_0} g h}}$$

$$P(h) = 10^5 \bullet e^{-\frac{1}{10^5} 10 \bullet h}$$

Störungen:
Wirbelung, Druckschwankung,
Temperatur nicht konstant,
Luftfeuchte!