

## C) Turbulente Strömung realer Flüssigkeiten

Kriterium für den Übergang von laminarer zur turbulenten Strömung

Strömung **idealer Flüssigkeiten**: Trägheitskräfte  $\sim \rho \cdot v^2$

**zäher**

:Reibungskräfte  $\sim \eta \cdot v \cdot d$

d: typische Abmessung

*Folgende Kräfte werden betrachtet:*

$$d\vec{F}_R = \eta \cdot \Delta\vec{u} \cdot dV$$

**Reibung**

$$d\vec{F}_P = -\text{grad } P \cdot dV$$

**Druckkraft**

$$d\vec{F}_g = \rho \cdot \vec{g} \cdot dV$$

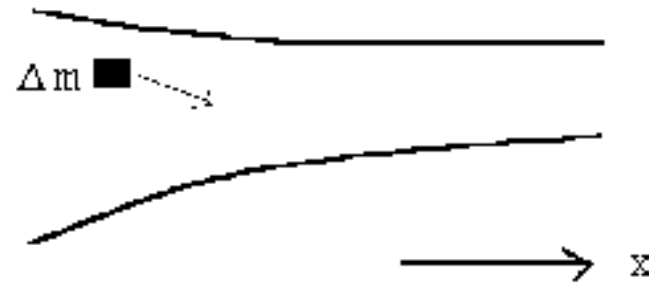
**Schwerkraft**

Diese Kräfte lösen **Beschleunigungen** aus:  $u \Rightarrow \vec{u} + d\vec{u}$

Die totale Änderung der Geschwindigkeit u in dem das Massenelement in der Zeit dt von r-> r+ dr kommt!

Für die x- Komponente:

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$



$\frac{\partial u_x}{\partial t}$  : Änderung am gleichen Ort

$\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$  : Konvektionsbeschleunigung

Allgemein:  $\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \Rightarrow$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \right) \vec{u} = -\text{grad } P + \rho \cdot \vec{g} + \eta \cdot \Delta \vec{u}$$

Es gilt die Vektorrelation:

Navier-Stokes-Gleichung

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \frac{1}{2} \text{grad } u^2 - (\vec{u} \times \text{rot } u)$$

auf beide Seiten **rot**

Mit  $\eta = 0$

(ideale Flüssigkeit)

wegen  $\text{rot}(\text{grad } P) = 0$  und  $\text{rot } \text{grad } u^2 = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{u} - \text{rot}(\vec{u} \times \text{rot } \vec{u}) = 0$$

Ist:  $\text{rot}\vec{u} = 0$  zu einer Zeit  $t \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\vec{u} = 0 \Rightarrow$

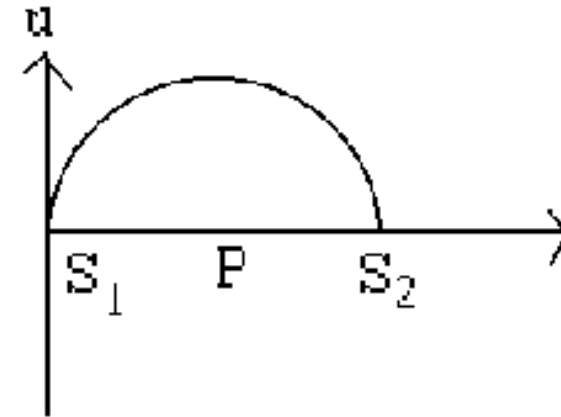
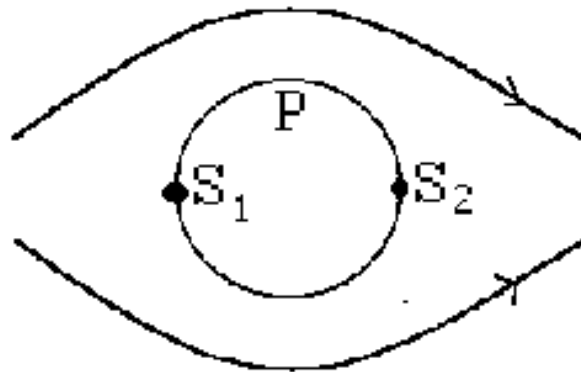
Wird eine **ideale Flüssigkeit** ohne Wirbel in Bewegung gesetzt ,  
bleibt sie wirbelfrei

Wirbelstärke ist zeitlich konstant  $\Rightarrow$

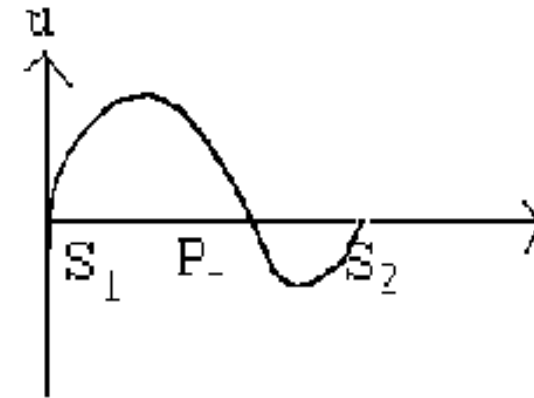
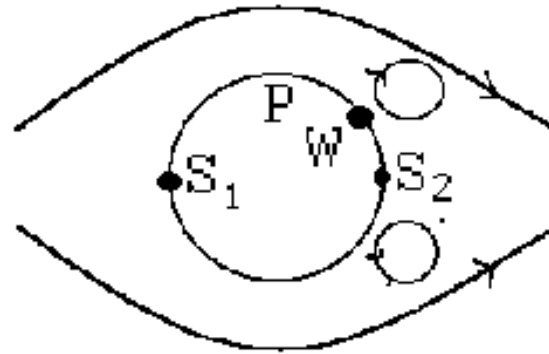
Reibung ist maßgeblich an der Entstehung  
von Wirbeln beteiligt  $\Rightarrow$  **große sScherkräfte%**

### Beispiel: Umströmung einer Kugel

**laminar**



turbulent



schon bei W wird die Geschwindigkeit erreicht, die im laminaren Fall erst am Punkt  $S_2$  erreicht wird!  $\Rightarrow$  *Wirbel*

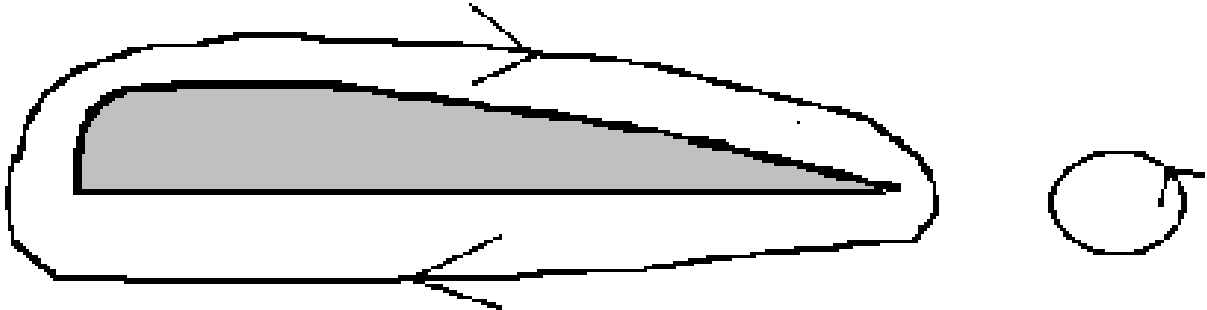
**Wirbelstraßen!** bleiben nicht ortsfest!



Energie kommt aus der kinetischen Energie des strömenden Mediums

### Nochmals Tragflächen!

Wirbel  $\Rightarrow$  Drehimpulserhaltung



laminare Strömung

+

$\Rightarrow$

Auftrieb