Schwingung / Wellen

Schwingungsfrequenz &Wellenausbreitungsgeschwindigkeit

Ausgangspunkt: Newtonsche Bewegungsgleichung

z.B:

aus

d²x/dt²+D/m x =0

$$d^2x/dt^2+D/m\ x=0$$

ɤ =ãD/m

aus

$$\frac{\partial^2\Psi(z,t)}{\partial t^2} = \frac{S_0}{\mu}\cdot\frac{\partial^2\Psi(z,t)}{\partial z^2}$$

v=ãS/ε

Aus kinetischer Energie

Aus potentieller Energie

v=ãp/ɟ

Beispiele:

v =ãE/ɟ

E: Elastizitätsmodul

Kupfer:v=3700m/s

v =ãK/ɟ

K: Kompressionsmodul

v(Flüssigkeiten)=800-1800m/s

Gase: K=p

Luft:v=280m/s

Aber!!

Real:331m/s

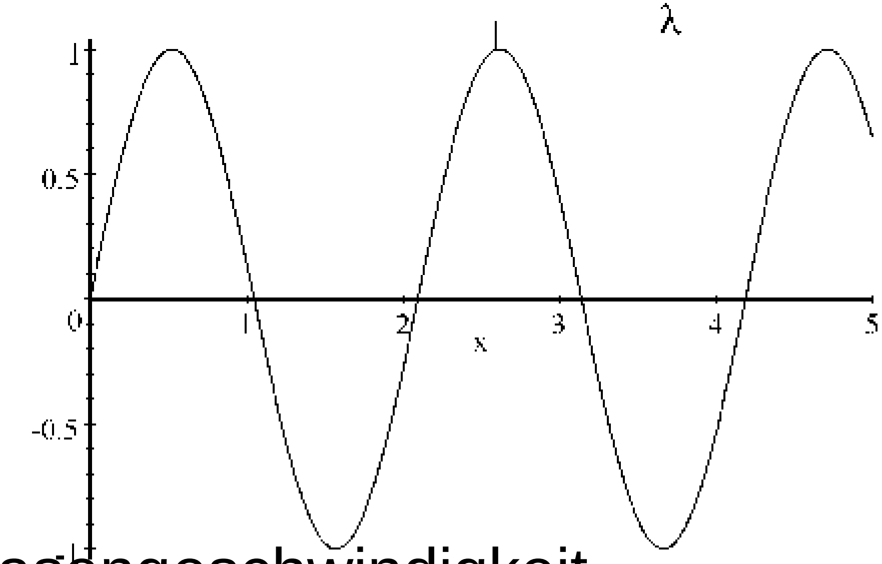
Harmonische Wellen

Sei y = sin $\frac{2\pi}{\lambda}(x - v \cdot t)$

Abkürzung:

$\frac{2\pi}{\lambda} = k; \lambda$:

nächster Abstand gleicher Phasen. Jeder Phasenwert der Welle legt in der Sekunde v Meter zurück



in der Zeit T: $\lambda = v \cdot T$

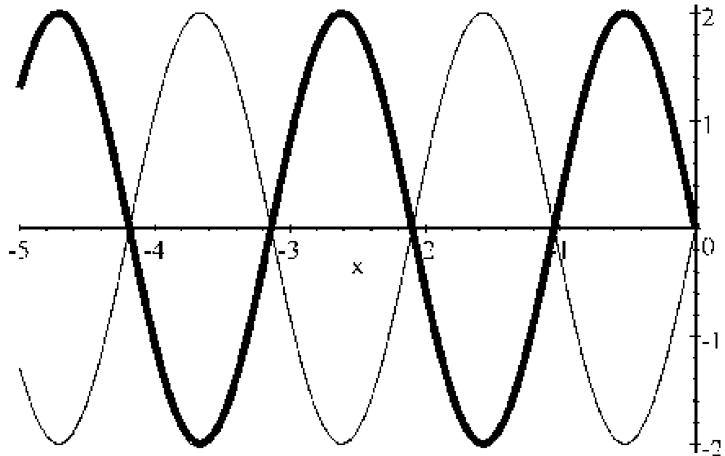
v:Phasengeschwindigkeit

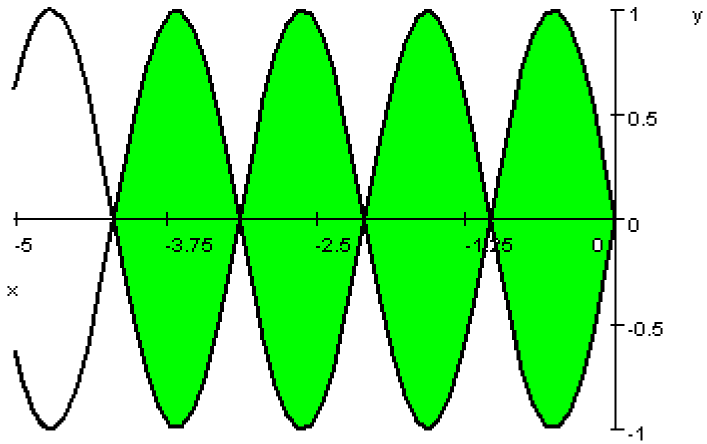
T: Schwingungsdauer $\omega = 2\pi\nu, \nu = \frac{v}{\lambda}$ oder $\omega = v \cdot k \Rightarrow$

Harmonische Welle:

$$y = \sin(kx - \omega t)$$

Reflexion von harmonischen Wellen: **Stehende Wellen**





Schwingungsknoten und Schwingungsbäuche

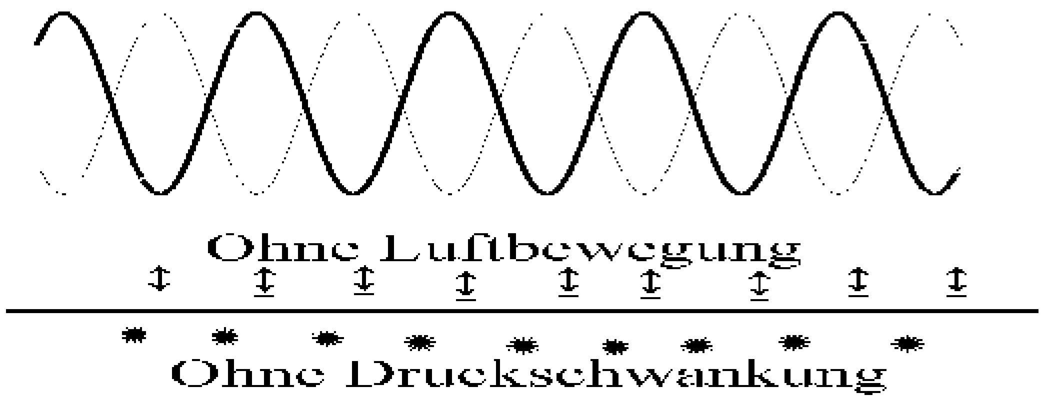
$$y = \sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)$$
$$= \sin kx \cdot \cos \omega t - \cos kx \cdot \sin \omega t$$
$$+ \sin kx \cdot \cos \omega t + \cos kx \cdot \sin \omega t$$
$$= 2 \sin kx \cdot \cos \omega t \Rightarrow$$

Es gibt Zeiten (cos $\omega t = 0)$

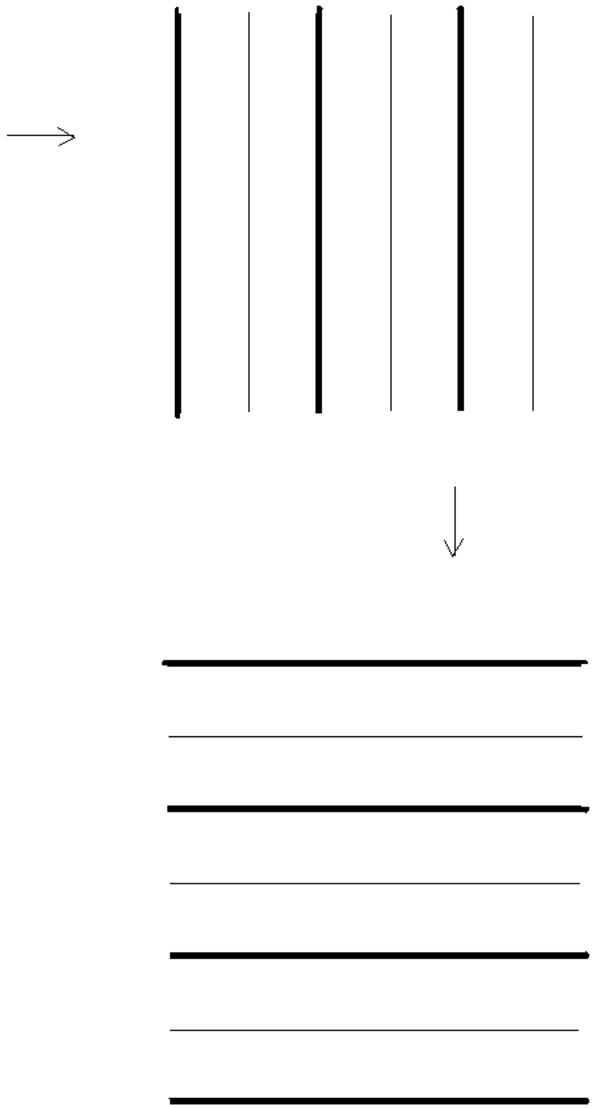
bei denen die Amplitude der Welle überall verschwindet, und es gibt Orte (sinkx=0),Schwingungsknoten, an denen die Auslenkung immer verschwindet: $n \cdot \frac{\lambda}{2}$ von der Wand mit n=1,2,3

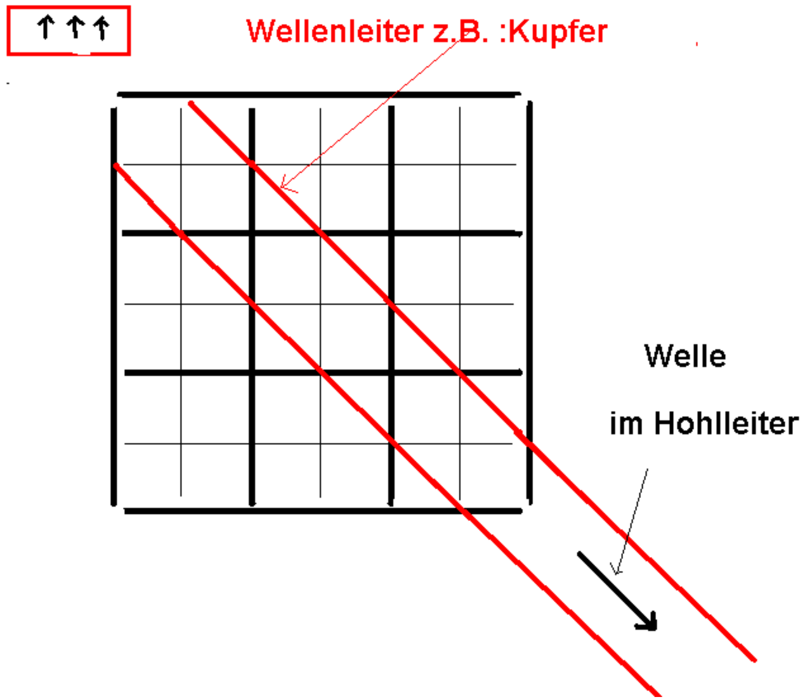
feste Lage im Raum

z.B.: Schallwelle:



Ebene Welle



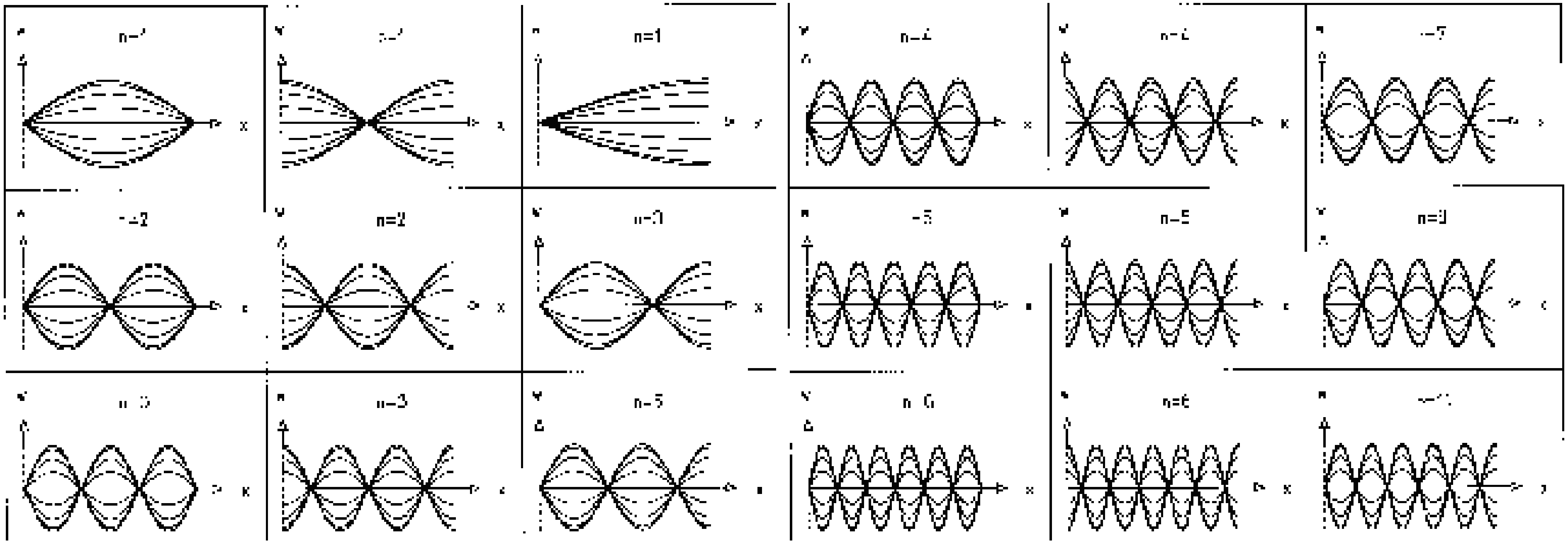


Resonanzen: geschlossenes/offenes Rohr, wenn L=(2n+1) $\frac{\lambda}{4}$

Resonanzfall: $\nu_n = \frac{(2n+1)v_{Phase}}{4L}$ $\omega = 2\pi\nu, \nu = \frac{v}{\lambda}$

geschlossenes/geschlossenes Rohr, wenn L=(n+1) $\frac{\lambda}{2}$

Resonanzfall: $\nu_n = \frac{(n+1)v_{Phase}}{2L}$



Seil oder der Saite: L=n $\frac{\lambda}{2}; n = 1, 2, 3..$ $\lambda = \frac{2L}{n} \Rightarrow$

nur bestimmte Wellenlängen oder Frequenzen!

$$\nu = n \cdot \frac{v}{2L} = n \frac{\sqrt{\frac{S_0}{\rho}}}{2L}$$

Mit S_0 als Saitenspannung

z.B: Geige Beim Streichen der Saite mit dem Bogen werden auch Oberschwingungen angeregt

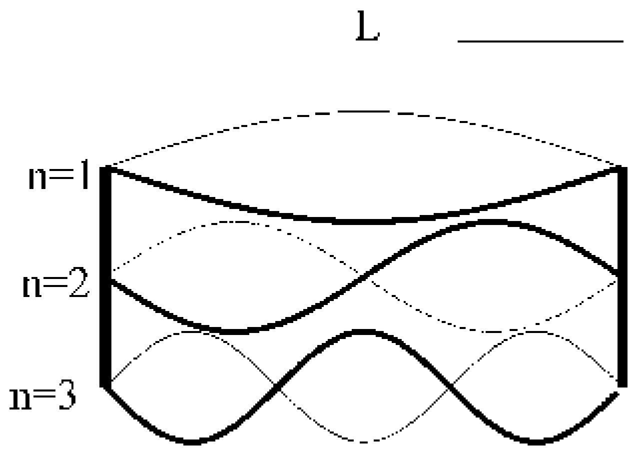
Klangfarbe

L: Variation durch Abgreifen am Griffbrett

Frequenzverdoppelung:1 Oktave

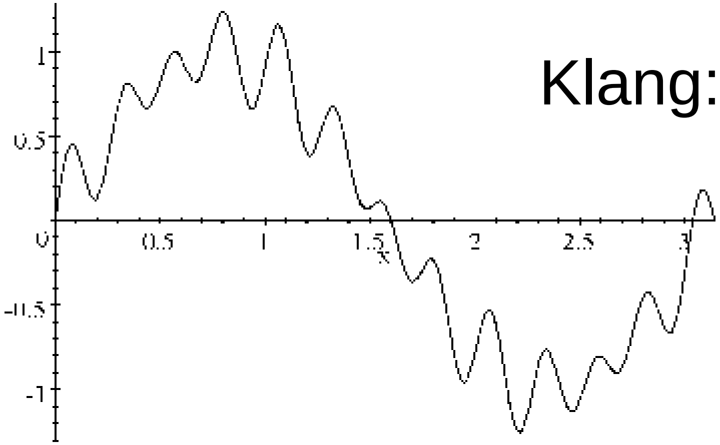
Frequenzmischung $\Rightarrow$ *Klangfarbe*

Beimischung von Obertönen zum Grundton nochmals Oberwellen einer Saite:



1.-3. Oberschwingung

Allgemein aber:



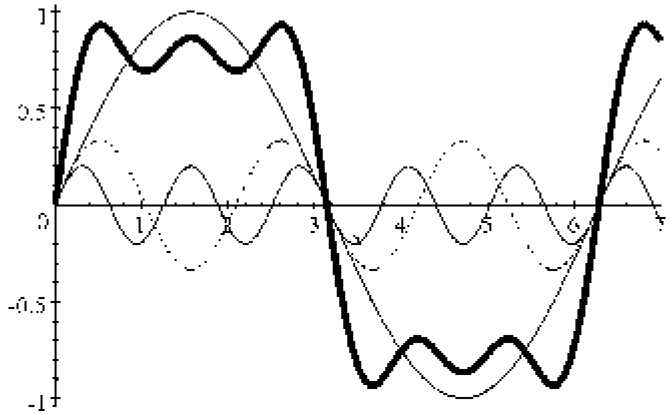
Klang: Oberwellenreich!

Quantitativ: Frequenzanalyse (Fourieranalyse):

$$\xi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\xi_{0,n} \sin(n\omega_1 t + \varphi_n) + i\xi_{0,n} \cos n\omega_1 t\}$$

d.h.: Darstellung der Amplitude als lineare Zusammensetzung von Harmonischen!

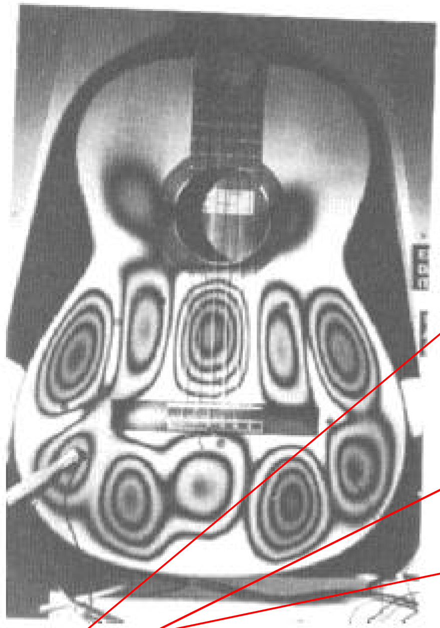
Allgemein für beliebige Funktionen von t:
z.B.: Annäherung einer Rechteckfunktion durch 3 Koeffizienten

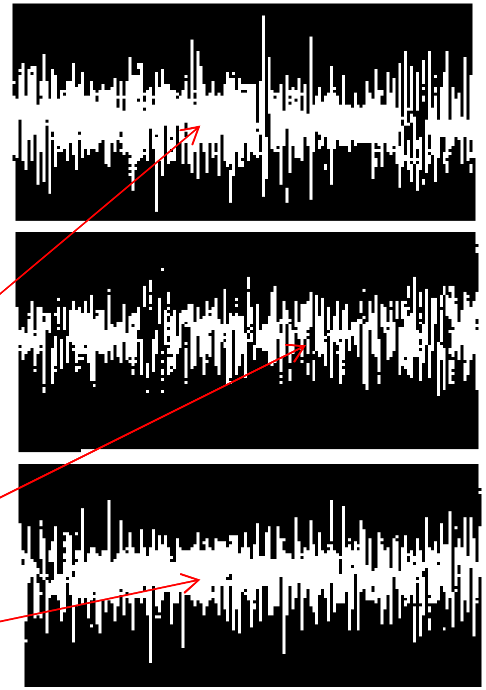


Wie schwingen Musikinstrumente?

Wie sehen Signale in der Realität aus ?

Wie empfindet das menschliche Ohr all dieses?





Vor Beginn der Vorlesung?

Probe eines Orchesters?

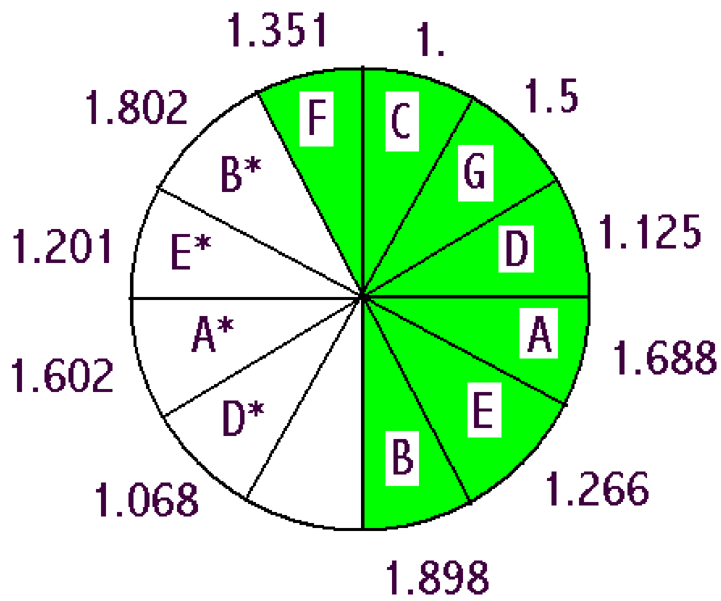
Mendelssohn?

Ordnungsschema der Töne!

Ausgangspunkt!

Kreis des Pytagoras

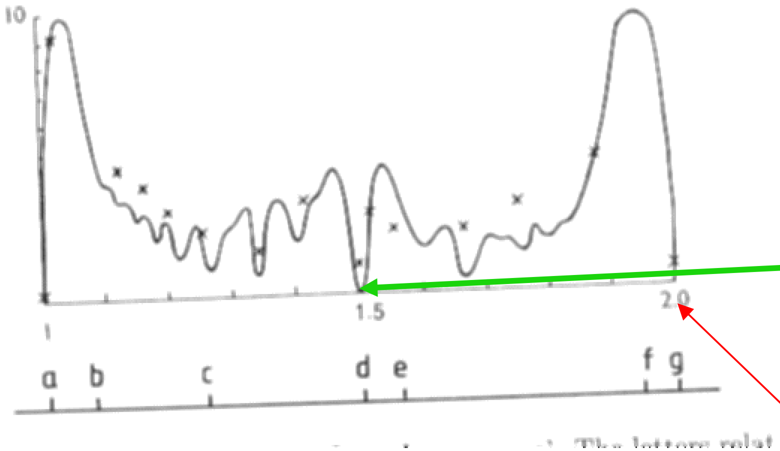
$3^n 2^{-m}$



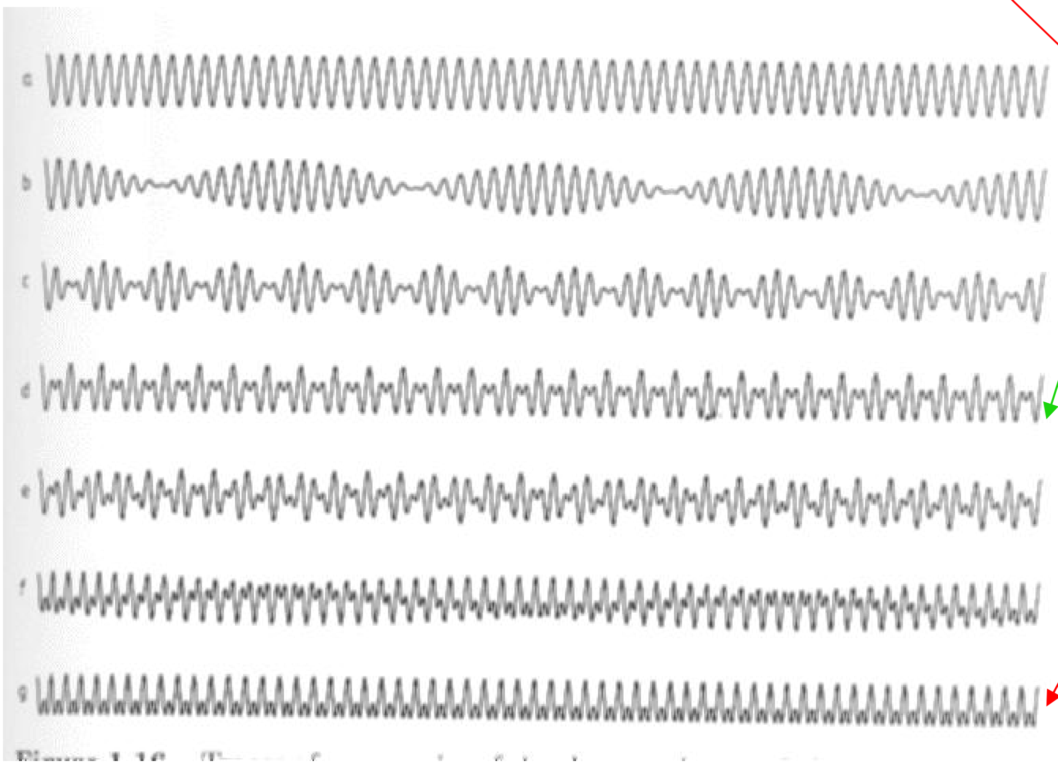
Wie empfindet das menschliche Ohr all dieses?

Rauig-
keit

Nach Helmholtz



Quinte



Oktave

Energie der harmonischen $(\xi = \xi_0 \cdot \sin(kx - \omega t))$ elastischen Welle

In ΔV mit Δm :

$$W = W_{kin} + W_{pot} \qquad W_{kin} = \frac{1}{2}\Delta m \cdot v^2 = \frac{1}{2}\rho \cdot \Delta V \cdot \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -\omega \cdot \xi_0 \cdot \cos(kx - \omega t); \omega \cdot \xi_0 = v_0 :$$

Schallschnelle

$$\boxed{W_{kin} = \frac{1}{2}\rho \cdot \Delta V \cdot \omega^2 \cdot \xi_0^2 \cdot \cos^2(kx - \omega t)}$$

$$W_{pot} = \frac{1}{2}D \cdot \xi^2; \omega = \sqrt{\frac{D}{\Delta m}} \Rightarrow D = \Delta m \cdot \omega^2 = \rho \cdot \Delta V \cdot \omega^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{W_{pot} = \frac{1}{2}\rho \cdot \Delta V \cdot \omega^2 \cdot \xi_0^2 \cdot \sin^2(kx - \omega t)}$$

Gesamtenergie:

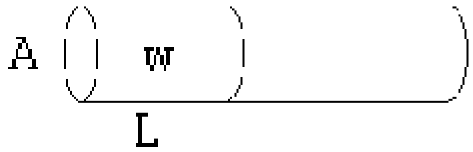
$$W = \frac{1}{2}\rho \cdot \Delta V \cdot \omega^2 \cdot \xi_0^2[\cos^2(kx - \omega t) + \sin^2(kx - \omega t]$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\rho \cdot \Delta V \cdot \omega^2 \cdot \xi_0^2}$$

Energiedichte:

$$w = \frac{W}{\Delta V}$$

Intensität:

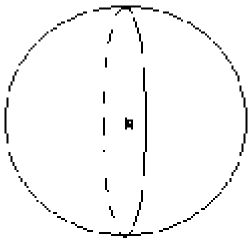


$$L = v_{Schall} \cdot \Delta t$$

$$I = \frac{w \cdot V}{A \cdot \Delta t} = \frac{w \cdot v_{Schall} \cdot \Delta t \cdot A}{A \cdot \Delta t} = w \cdot v_{Schall} \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2}\rho \cdot \omega^2 \cdot \xi_0^2 \cdot v_{Schall}}$$

$$\boxed{[I] = \frac{W}{m^2}}$$

Leistung einer Schallquelle :P



$$P = \int \vec{I} \cdot \overrightarrow{dA}$$

Kugelwelle: $A = 4\pi R^2 \Rightarrow I = \frac{P}{4\pi R^2}$

Intensität nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab!

Beispiele für Leistungen von Schallquellen:

	Leistung (Watt)
Sprache	10^{-5}
Geige	10^{-3}
Blasinstrument	10^{-1}
Lautsprecher	100

Verhältnis von Leistungen:

In Dezibel (db): $x = 10 \log \frac{P_1}{P_2}$

Bei Verstärkern und Abschwächern

Lautstärke:

Die Hörschwelle($\nu = 1000 Hz$) : $10^{-12} W/m^2$

Schmerzschwelle: $10 W/m^2$

Def. der Lautstärke:

$L_N = 10 \log \frac{I}{I_0}$ $\quad I_0 = 2 \cdot 10^{-12} W/m^2 \Rightarrow$

absolute Skala

Maß für die Lautstärke: Phon

Beispiel: $L_N = 20$ Phon

$\Rightarrow 20 = 10 \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow$

$\frac{I}{I_0} = 10^2 = 100$

Schmerzgrenze: ca 130Phon

Dopplereffekt

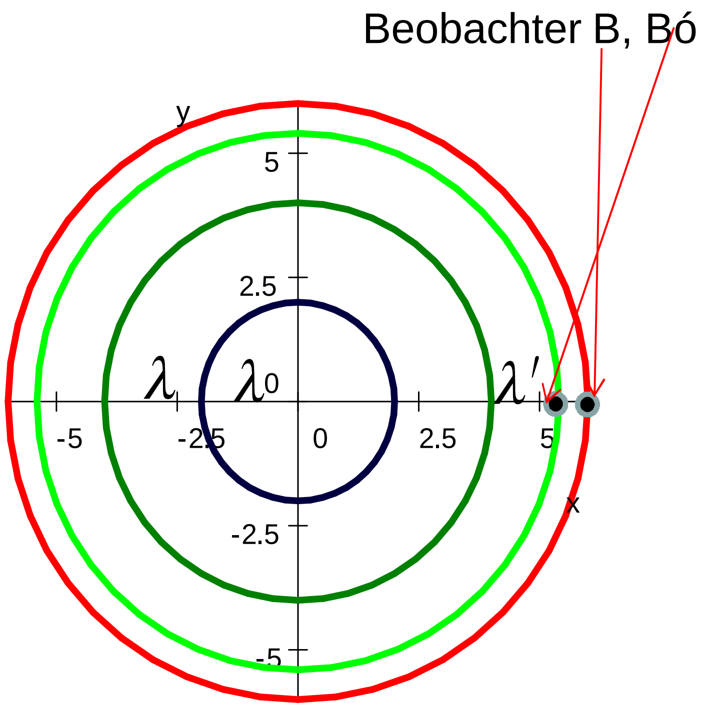
a) Schallquelle Q ruht, Beobachter B
bewegt sich mit Geschwindigkeit v nach B'

C: Schallgeschwindigkeit

$$\boxed{\overbrace{c \cdot T'}^{\lambda'} + v \cdot T' = \lambda}$$

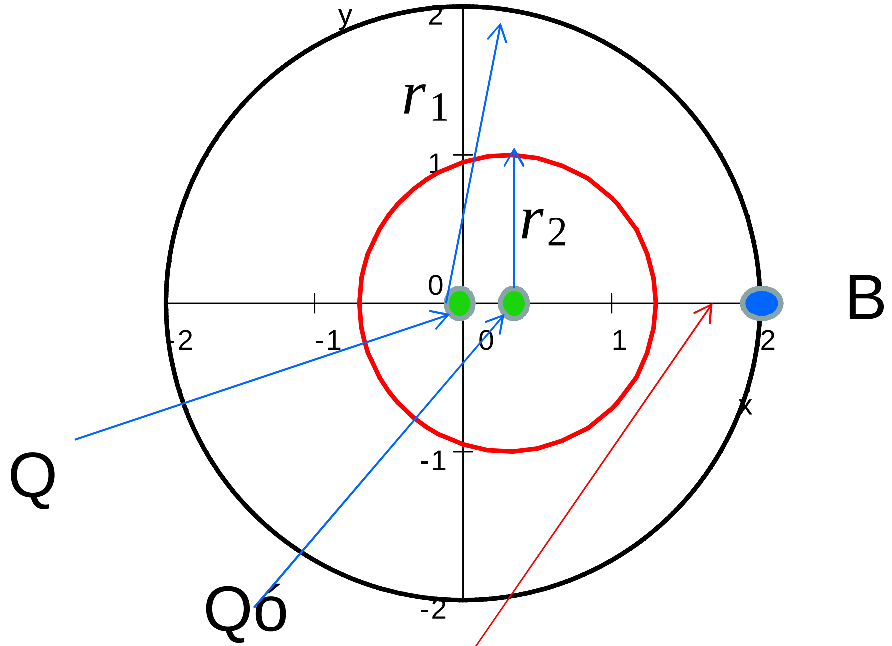
$$\frac{c}{\nu'} + \frac{v}{\nu'} = \frac{c}{\nu} \Longrightarrow$$

Der Beobachter in Tóvon B nach Bó sieht:



$$\boxed{\nu' = \nu \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right)}$$

b) Q bewegt sich mit v auf den ruhenden Beobachter B



dabei ist

$$\boxed{\lambda' = r_1 - (r_2 + v \cdot T)}$$

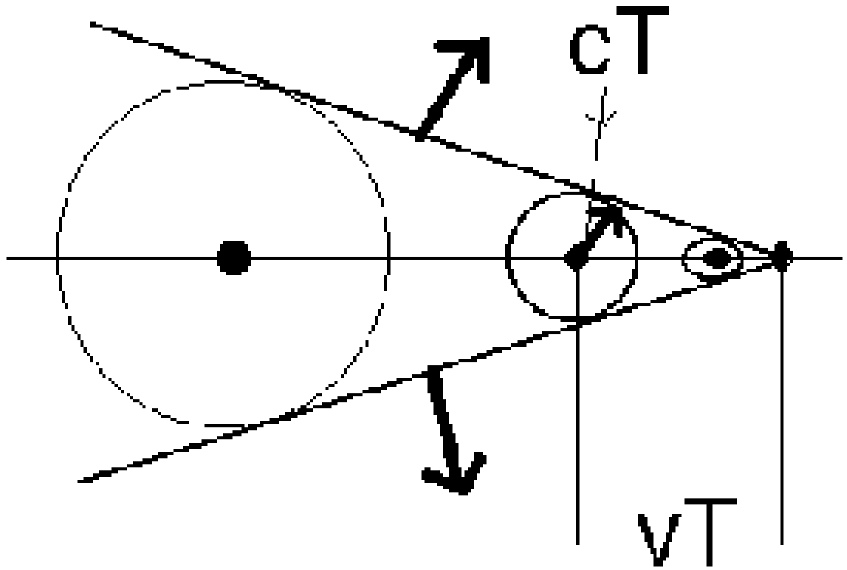
$$r_1 - r_2 = cT$$

$$= c \cdot T - v \cdot T$$

$$\frac{c}{\nu'} = \frac{c}{\nu} - \frac{v}{\nu} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\nu' = \nu\left(\frac{1}{1-\frac{v}{c}}\right)}$$

c) Kopfwellen $\boxed{v \succ c}$



Man beobachtet den Machschen Kegel
Man kann einen Überschallknall hören!

Quantifiziert: Machsche Zahl: $\boxed{\frac{v}{c}}$