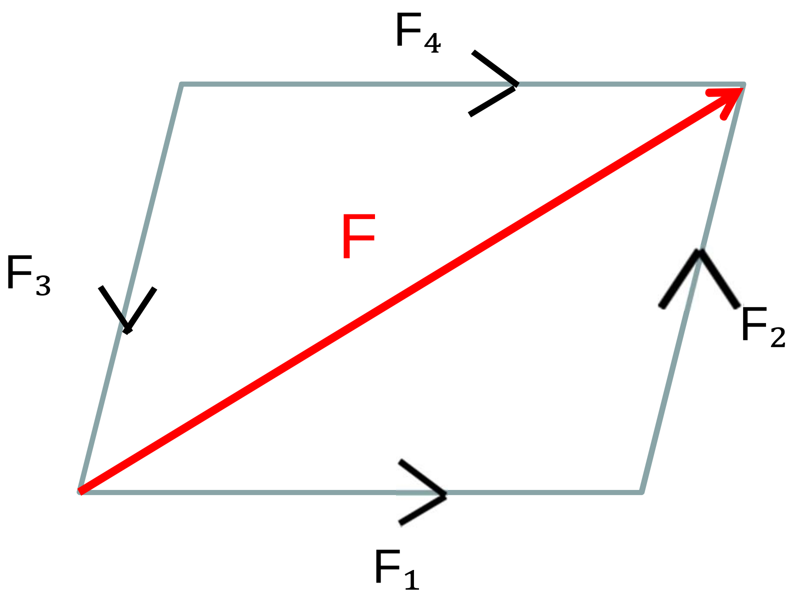
Zerlegung der Kraft in Komponenten

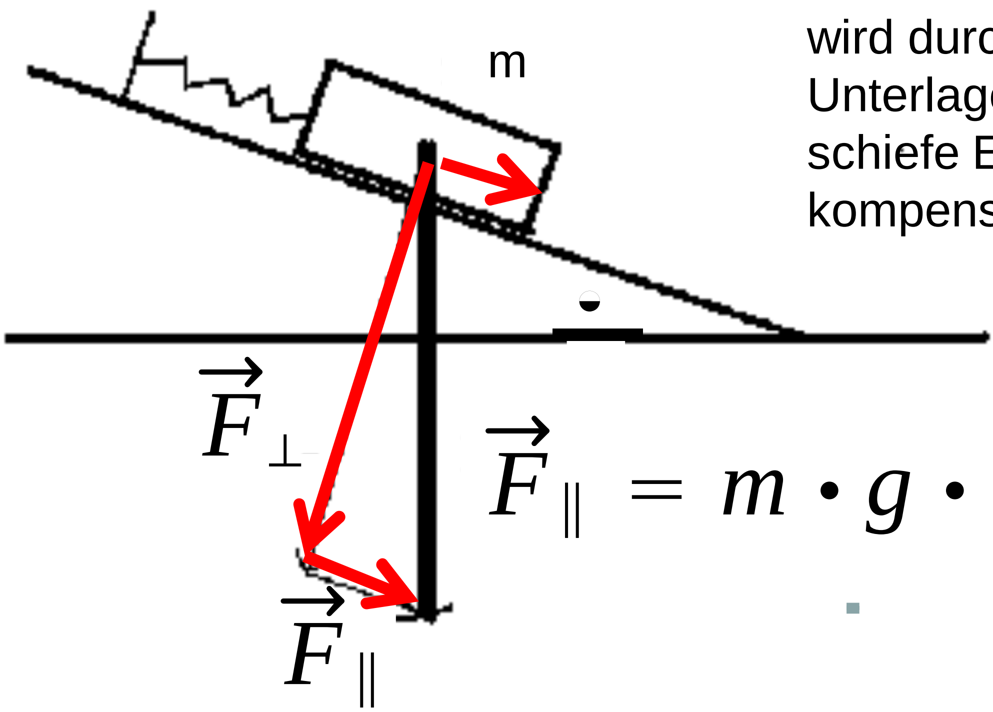


Kann beliebig zerlegt werden

Beispiel: Schiefe Ebene

$\vec{F}_{\perp}$

wird durch die Unterlage, schiefe Ebene, kompensiert



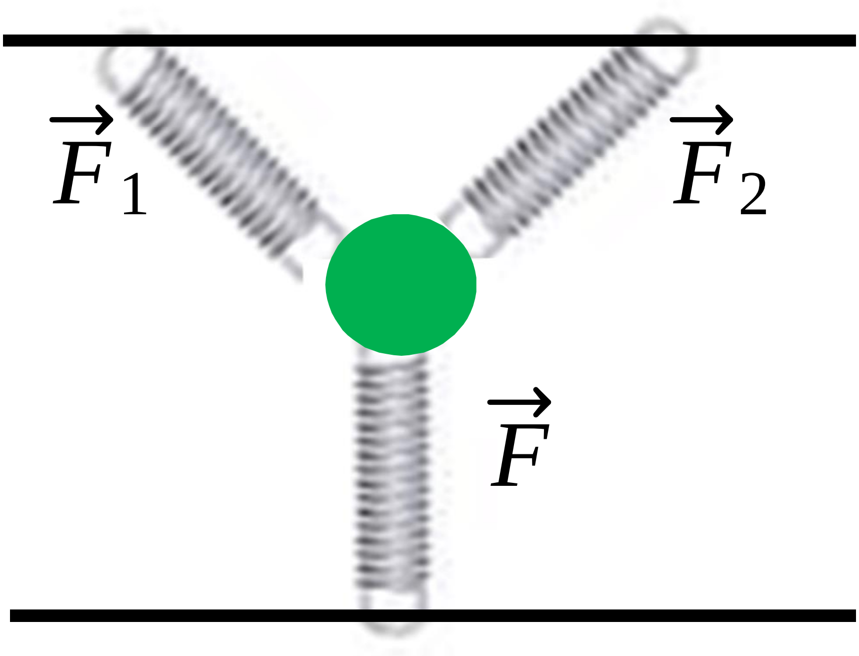
$$\vec{F}_{\parallel} = m \cdot g \cdot \sin \vartheta$$

$$\vec{F}_{\perp} = m \cdot g \cdot \cos \vartheta$$

Für mehrere Kräfte $\vec{F}_i$ ist die resultierende Kraft

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

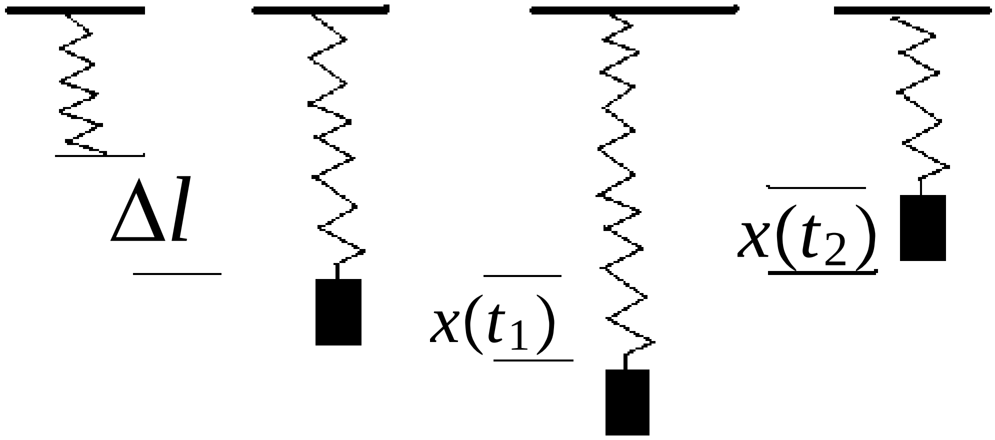
Den Sonderfall $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$



wird Gleichgewicht genannt

Kraft als Ursache der Bewegung

Beispiel: Elastisches Pendel



Geichgewichtslage Δl, Auslenkungen: $x(t_1)$, $x(t_2)$

Zusätzliche Auslenkung bewirkt Zusatzkraft $\overrightarrow{F}$:

$$\overrightarrow{F} = -D\overrightarrow{x};\ [F] = N(Newton)$$

Aus dem 2. Newtonschen Gesetz:

$$m\overrightarrow{a} = -D\overrightarrow{x}$$

a: Resultierende Beschleunigung, m: Widerstand gegen die Beschleunigung

$$m\ \ddot{x} = -Dx \quad \text{lineare Differntialgleichung}$$

Gesucht: x = x(t)

Lösung durch Ansatz: $\boxed{x = x_0 \cos\omega t}$

ω = Konstante $[\omega] = s^{-1}$

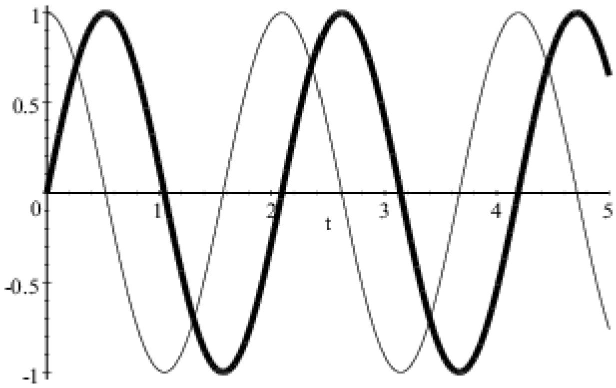
Ableitung nach t: $\dot{x} = -\omega x_0 \sin\omega t$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x_0 \cos\omega t$$

Einsetzen $\longrightarrow -m \cdot \omega^2 \cdot x_0 \cdot \cos\omega t = -x_0 \cdot D \cdot \cos\omega t$

Ansatz ist Lösung, wenn gilt:

$$\omega^2 = \frac{D}{m} \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$



Schwingung

Periode: $\omega \cdot T : T$ = Schwingungsdauer
Zeit zwischen zwei benachbarten Durchgängen
durch den gleichen Schwingungszustand

$$T = \frac{1}{\nu}; \nu = \text{Schwingungsfrequenz}$$

$$\text{Zahl der Schwingungen pro s}$$

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} = \frac{\text{Winkel des Vollkreises}}{\text{Umlaufzeit}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

Folgerung: Lineare Rückstellkraft

(Ist hier die Annahme)

Daraus resultiert eine harmonische Schwingung!

Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude

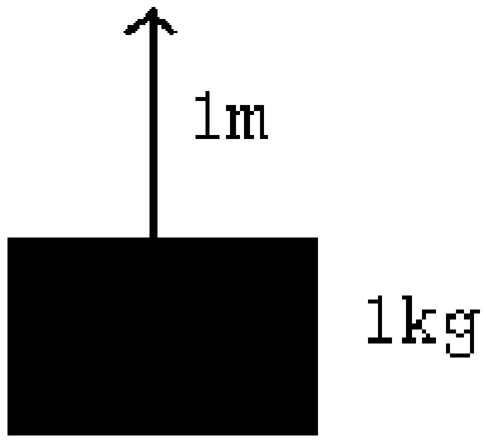
1.3 Arbeit und Leistung

Def.: Arbeit=aufgebrachte Kraft·Wegstrecke

$W = \vec{F} \cdot \vec{S}$ Skalar (W) = Joule =

N·m = W·s Wattsekunde

z.B.: Arbeit gegen die Schwerkraft

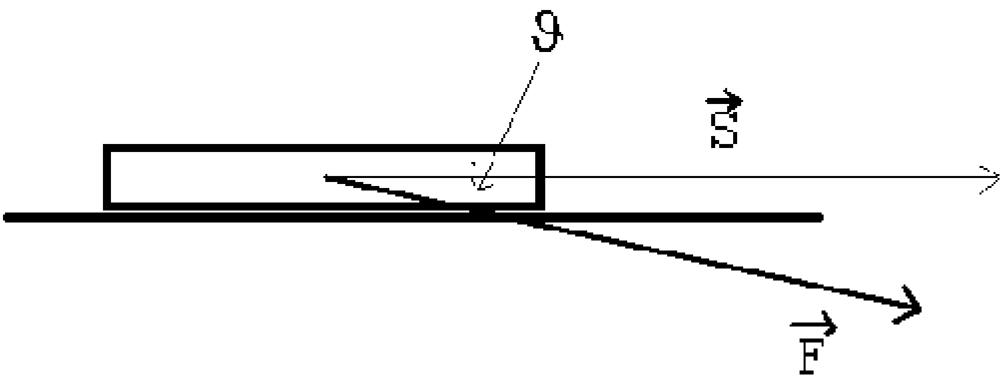


→

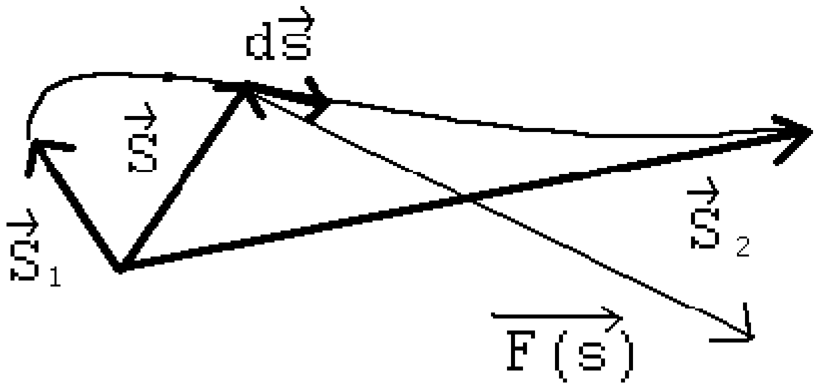
9.81 Joule
Ws
Nm

Zum Vergleich:
2.35 cal
Da cal = 4.18Nm
Calorie:
Einheit in der Wärme-
lehre

Skalarprodukt zweier Vektoren:



Hier Arbeit
geleistet auf
der Strecke S



$$dW = \vec{F}(\vec{s})d\vec{s} \rightarrow W = \int_{S_1}^{S_2} \vec{F}(\vec{s})d\vec{s}$$

(Linienintegral)

$$\boxed{\text{Leistung: } P = \frac{Arbeit}{Zeit} = \frac{dW}{dt} = \dot{W};\ [P] = J \cdot s^{-1} = Watt}$$

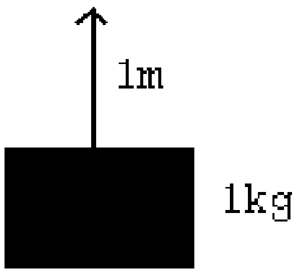
$$\boxed{P = \frac{\vec{F}(t) \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)}$$

1.4 Kinetische und potentielle Energie

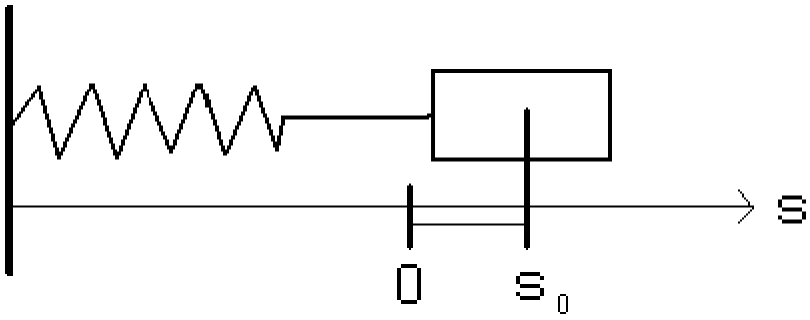
a) Potentielle Energie

Im Erdfeld: $m \cdot g \cdot h$

Die geleistete Arbeit bleibt als potentielle Energie verfügbar: z.B.



Anderes Beispiel: Potentielle Energie in einer Feder

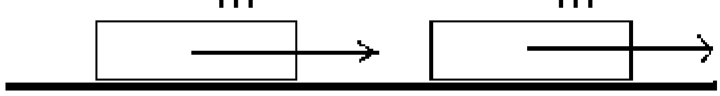


$\longleftarrow$ $-D \cdot s_0$

$$\boxed{E_{pot} = \int_0^{s_0} D \cdot s \cdot ds = \frac{D \cdot s_0^2}{2}}$$

b) Kinetische Energie

Kraft: Ursache der Bewegung



Kraft Kraft

t=0	t
s=0	s
v=0	v

zwischen s=0 und s:

Arbeit: W=F·s

Energie muß in der Bewegung des Körpers stecken!

$$F = a \cdot m = \frac{dv}{dt} \cdot m = m \cdot \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = m \cdot v \cdot \frac{dv}{ds}$$

$$F \cdot ds = m \cdot v \cdot dv$$

$$\int_0^s F \cdot ds = dW = \int_0^v m \cdot v' \cdot dv'$$

Konstante Kraft $\rightarrow$ $$F \cdot \int_0^s ds = m \cdot \int_0^v v' \cdot dv'$$

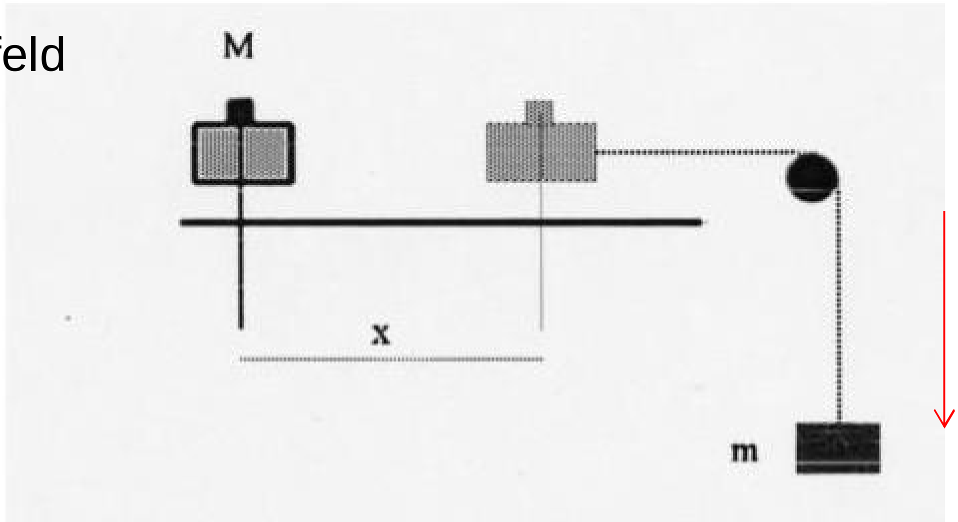
$$F \cdot s = \frac{m}{2} v^2$$

Eingebrachte Arbeit wird kinetische Energie

$$\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2}$$

Experiment im Schwerefeld

$M=200g, m=10g$



1m

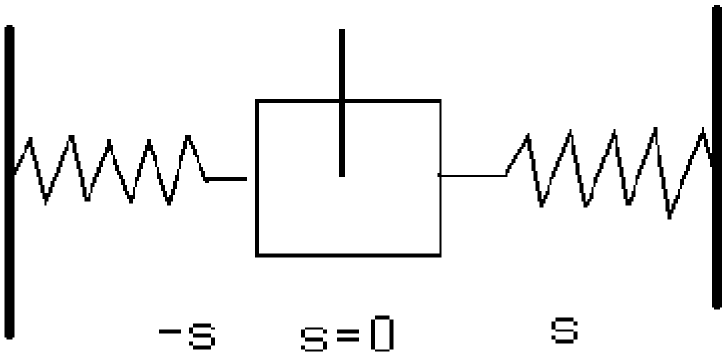
$x(m)$	Δt	v	v^2	$0.21 \cdot v^2$
1	1.065	0.939	0.882	$\boxed{0.0926}$

Zu vergleichen mit:

$$m \cdot g \cdot x = 0.01 \cdot 9.81 \cdot 1 = \boxed{0.0981}\ (Nm)$$

Abweichung: Reibung

Experiment mit Energiespeicherung in Feder anstatt im Schwerefeld :



S= Δx

$E_{kin} = \frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2$ $\quad E_{pot} = \frac{1}{2} D \cdot s^2$

Δt **(s)**	$\pm\,\Delta x$ **(m)**	**m (kg)**	E_{kin} **Joule**
0.277	0.01	0.205	0.013

Aus Schwingungsdauer $\longrightarrow$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 1.7s$$

$D = 2.8kg \cdot s^{-2}$ und s=0.01m

$$\boxed{E_{pot} = 0.014J}$$

Fazit: Energieerhaltung:

In einem abgeschlossenen System gilt:

$$\mathrm{E}_{kin} + \mathrm{E}_{pot} = \mathrm{konstant}$$

Leistung: s.o.

$$\boxed{\mathrm{P} = \frac{\vec{F}(t) \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)}$$

Beispiele für Leistungsgrößen:

Sonneneinstrahlung auf Erdatmosphäre: 1.367 kW/qm
ankommen auf der Oberfläche ca 1 kW/qm
Kraftwerk: $1\ \mathrm{GW} = 10^9\, Watt$

Auto: z.B. : 50 kW

Herdplatte: 2 kW

Weitere Beispiele:

Mensch, 80kg steigt in 10s eine Treppe 5m hoch.

$$\Longrightarrow P = \frac{W}{t} = \vec{F} \cdot \vec{S}/t = m \cdot \vec{g} \cdot \vec{S}/t$$

$$= \frac{80 \cdot 9.81 \cdot 5}{10} = 392.4 N \cdot m/s = 0.53 PS$$

Masse m vom Stillstand mit konstanter Leistung beschleunigt: (z.B. E-Lok.)

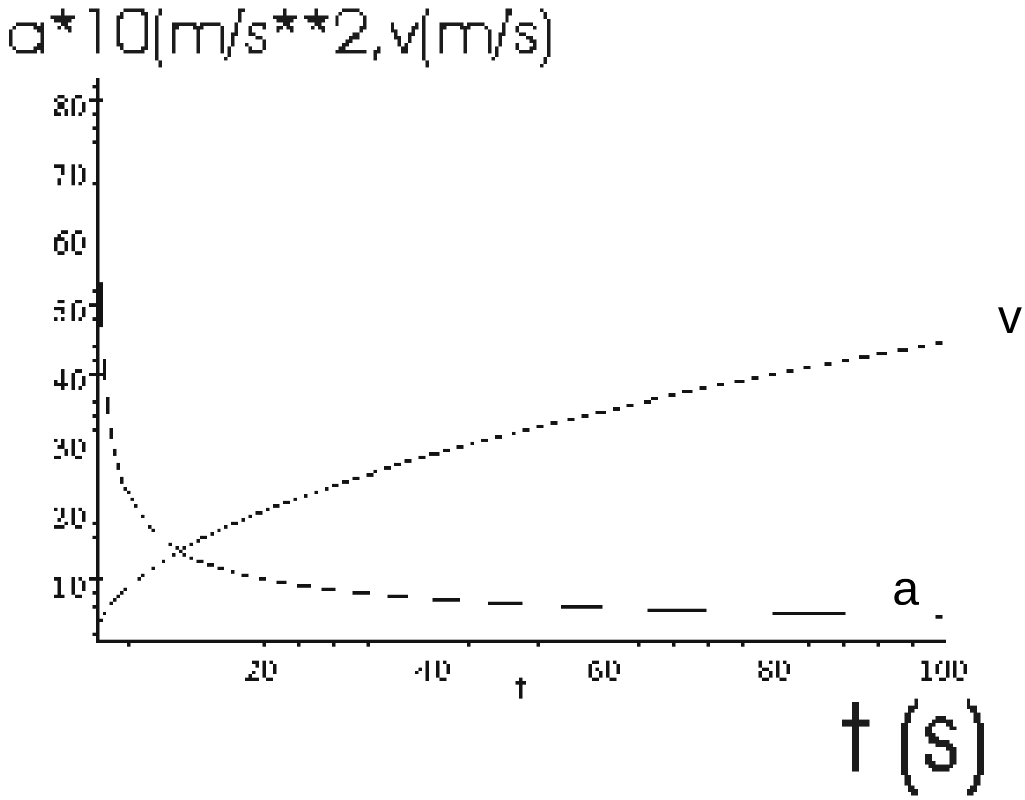
$$\vec{F} \parallel \vec{v} \quad v?, a?$$

$$F = \frac{P}{v}; F = m \cdot a \Longrightarrow \frac{P}{v} = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\Longrightarrow v \cdot dv = \frac{P}{m} dt \Longrightarrow$$

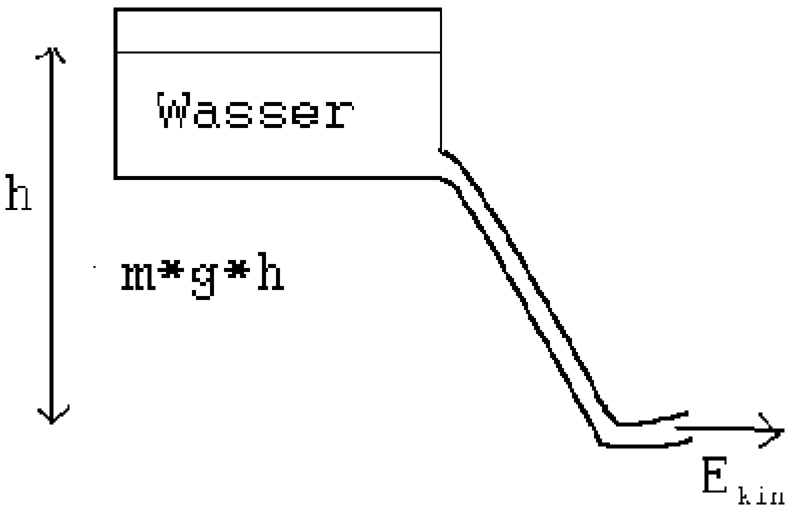
$$\int_0^{v(t)} v \cdot dv = \frac{P}{m} \cdot \int_0^t dt' \Longrightarrow \quad v^2(t) = \frac{2 \cdot P \cdot t}{m} \Longrightarrow$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{2 \cdot P \cdot t}{m}} \quad a(t) = \sqrt{\frac{0.5 \cdot P}{m \cdot t}}$$



Staudamm: Umwandlung potentielle Energie in kin. Energie

$$\boxed{v=\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}$$



Kaprun: h=800m

v=125m/s=
451km/h

1.5 Kraftfeld und Potential

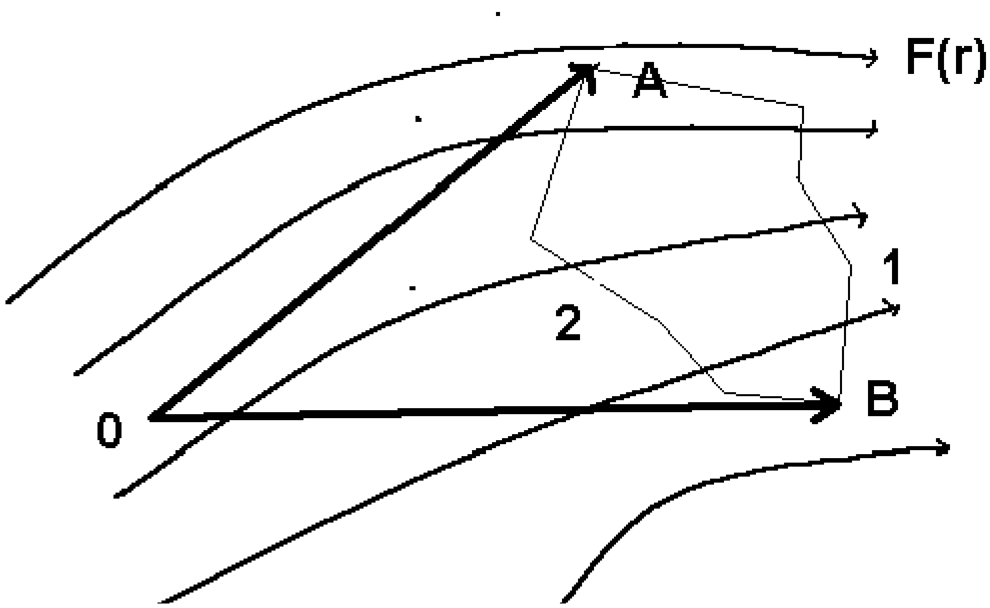
Kraftfeld Gebiet, in dem auf den Massenpunkt eine Kraft wirkt!

$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$

Massenpunkt verschieben von A→B

$\rightarrow Arbeit : W(r_1, r_2) = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$

Wege 1,2,.....



In vielen Fällen

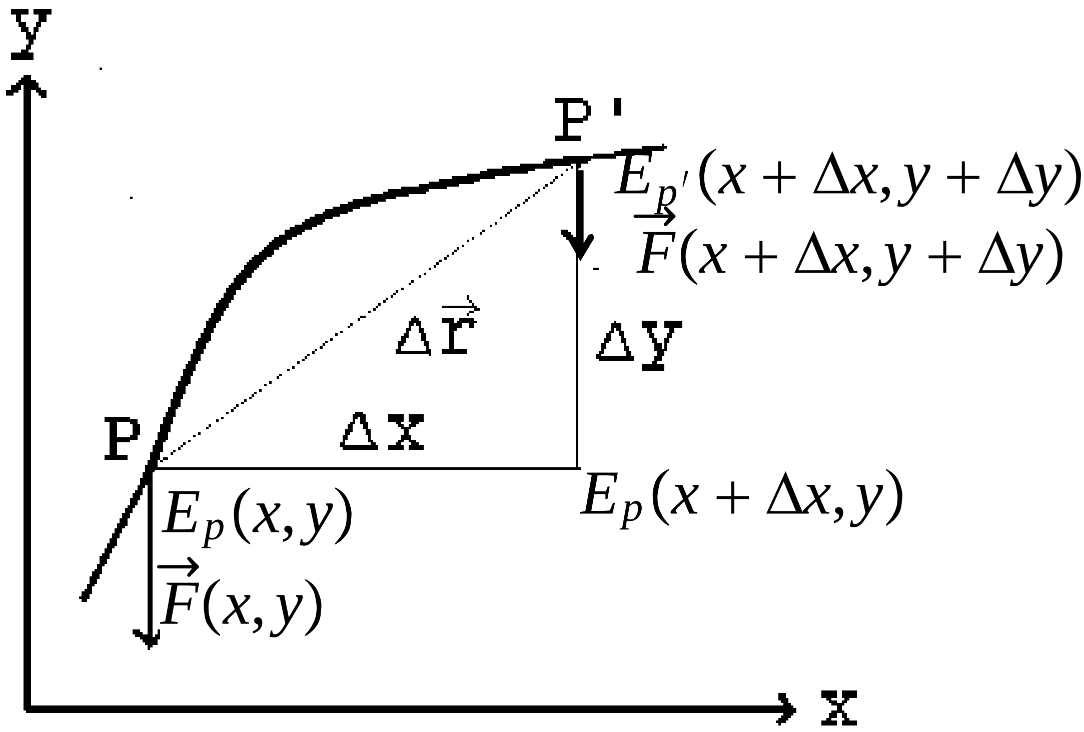
$W(r_1, r_2)$ unabhängig vom Weg!

Man spricht von konservativen Kräften (Feldern).

$$\Longrightarrow \int_A^B \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} \text{ (Weg1)}=\int_A^B \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} \text{ Weg 2)}$$

$$\oint \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = 0$$

Im konservativen Kraftfeld:



E_p :potentielle Energie

P'$\rightarrow\rightarrow\rightarrow$P Änderung der potentiellen Energie

$$E_p(x,y) \rightarrow E_p(x+\Delta x, y+\Delta y)$$

$$E_p(x+\Delta x, y+\Delta y) - E_p(x,y) = \Delta E_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\Delta y$$

P'$\longrightarrow\longrightarrow$P wird Arbeit geleistet:

$$\Delta W = \overrightarrow{F} \cdot \Delta \overrightarrow{r} = -\Delta \mathrm{E}_p \longrightarrow\longrightarrow$$

$$F_x \cdot \Delta x + F_y \cdot \Delta y = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial E_p}{\partial y}\Delta y$$

$$\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\ F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$$

Oder allgemeiner:

$$\boxed{F = -grad\ E_p = -\nabla E_p}$$

Vorgriff au die theoretische Mechanik

$$m\ \ddot{x}\ - F(x,t) = 0$$

$$m\ \ddot{x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$$

Newton

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{x}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$$

mit $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{x}}$ und $\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$

Lagrange Funktion: $L(\dot{x}, x) = E_{kin}(\dot{x}) - E_p(x)$

Damit kann man das Newton´sche Gesetz schreiben zu:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x} = 0$$

Zum Vertiefen!!

Feynman II,19

Das Prinzip der kleinsten Wirkung!

That is,how nature works!