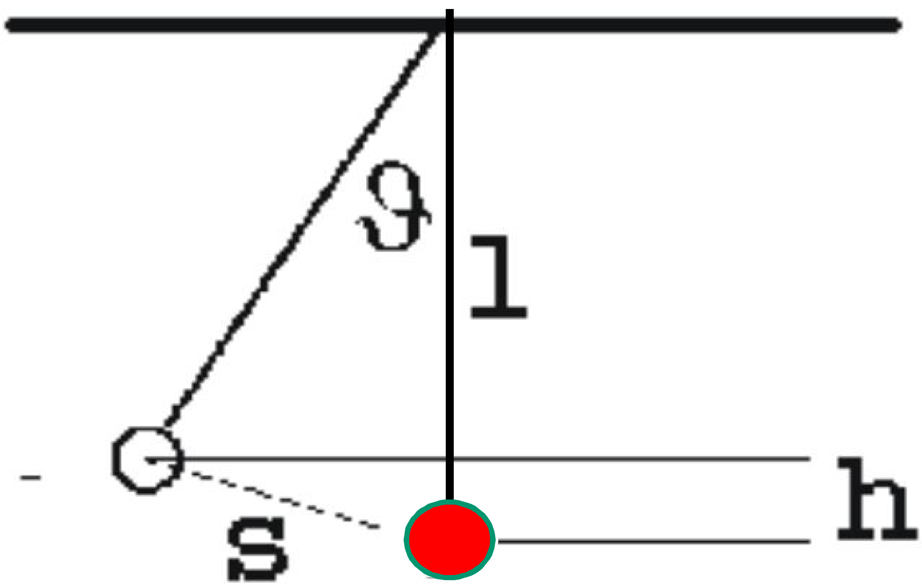
Pendel

Mathematisches Pendel d.h. ein Massenpunkt hängt am gewichtlosen Faden



Gesucht: Auslenkung als Funktion der Zeit

$$s = s(t), \vartheta = \vartheta(t)$$

$$s = l \cdot \vartheta$$

Ausgangspunkt: Energieerhaltung

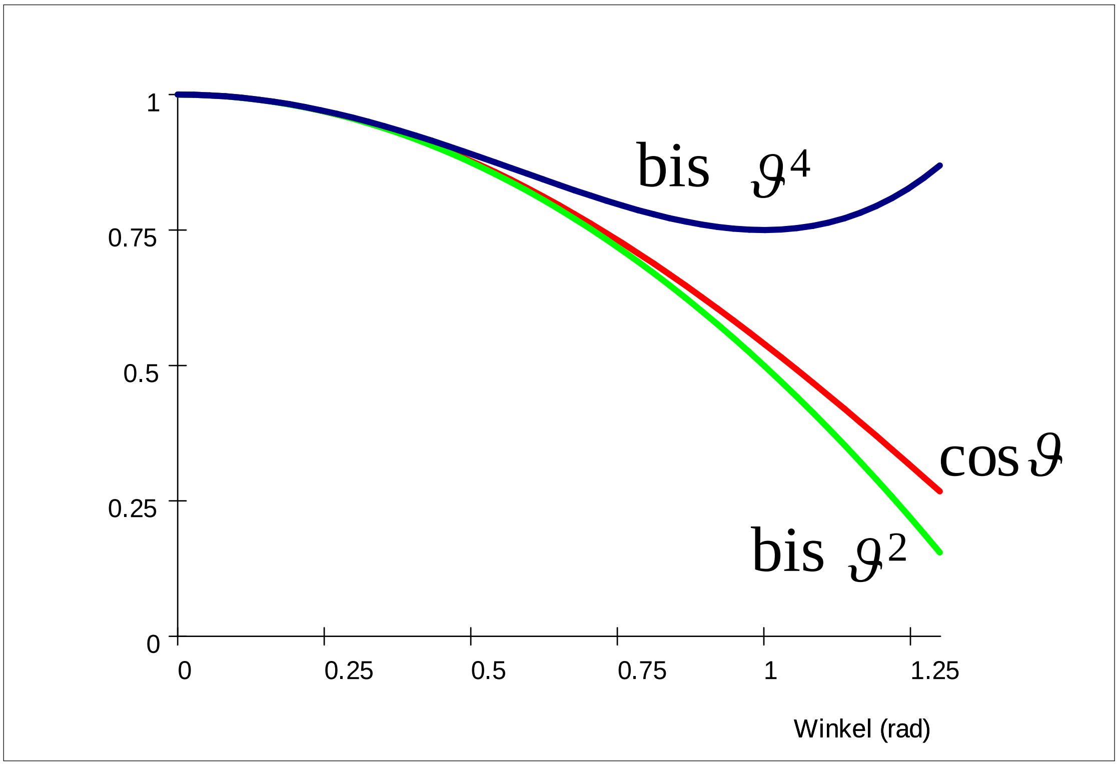
$$\frac{d}{dt}(E_{kin} + E_{pot}) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m \cdot v^2}{2} + m \cdot g \cdot h\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\cdot l^2\cdot\vartheta^2}{2} + m\cdot g\cdot l\cdot(1-\cos\vartheta)\right) = 0$$

Näherungslösung, beschränkt auf kleine Winkel:
Da

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{1}{2!}\vartheta^2 + \frac{1}{4!}\vartheta^4 - ..$$



Mit $E_{pot} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot g\cdot l\cdot\vartheta^2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\cdot m\cdot l^2\cdot(\dot{\vartheta})^2 + \frac{1}{2}\cdot m\cdot g\cdot l\cdot\vartheta^2\right) = 0$$

$$m\cdot l^2\cdot\dot{\vartheta}\cdot\ddot{\vartheta} + m\cdot g\cdot\vartheta\cdot\dot{\vartheta} = 0$$

Die Bewegungsgleichung $\ddot{\vartheta} + \frac{m \cdot g}{l} = 0$

ist identisch mit der Gleichung, die mit einer Masse an einer Feder erhalten wurde, wenn

$$D = \frac{m \cdot g}{l} \quad \text{ist.}$$

$$\longrightarrow\longrightarrow \vartheta = \vartheta_0 \cdot \cos \omega t \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Mit der Schwingungsdauer T:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Bisher Kinematik, ausgedrückt in

$$\vec{r}(t), \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}; \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

und Dynamik mit

$$\vec{F} = \vec{a} \cdot m; W = \vec{F} \cdot \vec{r} \quad P = \frac{dW}{dt}$$

$$E_{pot} = \int \vec{F} \bullet \vec{ds}$$

$$E_{kin} = \frac{m \bullet v^2}{2}$$

1.6 Impuls

$$\text{Kraft} = m \bullet \frac{\vec{dv}}{dt} \quad \text{oder in} \quad \Delta t$$

$$= \frac{m \bullet (\vec{v} - \vec{v}_0)}{\Delta t} = \frac{m \bullet \vec{v} - m \bullet \vec{v}_0}{\Delta t}$$

Neue Bewegungsgröße Impuls

$$\text{Kraft} = \frac{\text{Änderung des Impulses}}{\text{Zeiteinheit}} \quad \text{oder}$$

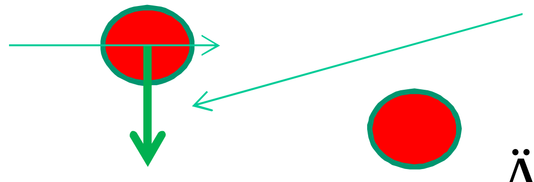
$$\text{Kraft} \bullet \text{Zeit} = \text{Änderung des Impulses}$$

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \vec{v} - m \cdot \vec{v}_0$$

ĂStoßñ

Kraft wirkt kurzzeitig auf den Körper der Masse m

$$\vec{F} \cdot \Delta t$$



Kraft

Ändert Impuls aber nicht notwendigerweise die Energie

Definition: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

$$(p) = kg \cdot m \cdot s^{-1}$$

Beispiel: Golfball (60g) erreicht 50m/s bei einer Kontaktzeit von $5 \cdot 10^{-3} s$

Wie groß ist die Kraft?

$$F = \frac{mv - mv_0}{\Delta t} = \frac{0.06 kg \cdot 50 ms^{-1}}{5 \cdot 10^{-3} s} = 600 kg \cdot m \cdot s^{-2} = 600 N$$

Im Erdfeld ist der Ball einer Kraft von mg=0.6N ausgesetzt.

Zusammenhang zwischen $\vec{p}$ und E_{kin}

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}; E_{kin} = \frac{m}{2} v^2;$$

$$\mathrm{E}_{kin} = \frac{p^2}{2 \cdot m}$$

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ auch in relativistischer Kinematik gültig

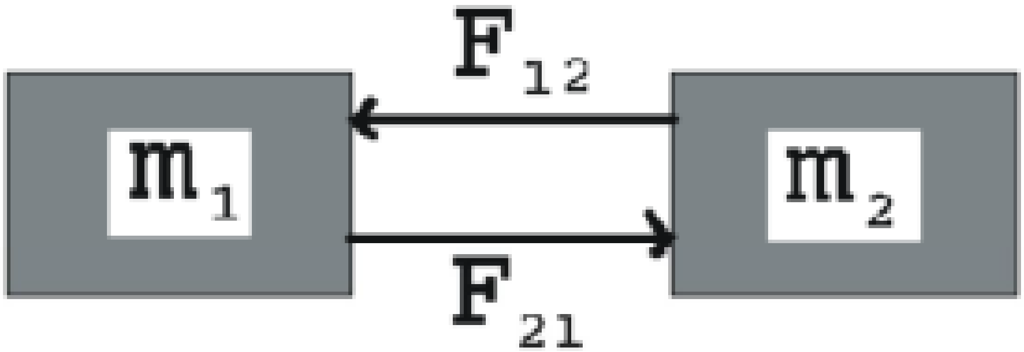
Aus dem dritten Newtonschen Axiom:

Actio=Reactio

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21}$$

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 = 0$$

$$m_1 \cdot \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \cdot \frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0$$



$$\frac{d}{dt}(m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2) = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 : \textbf{Impulserhaltung}}$$

Verallgemeinerung auf beliebig viele Massenpunkte

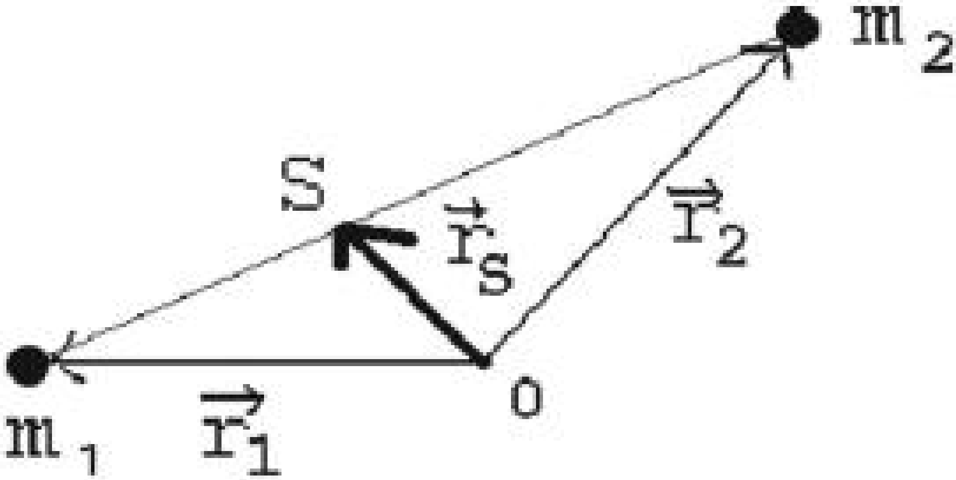
Gesamtimpuls des Systems:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\text{Impulserhaltung: } \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

In einem abgeschlossenen System (keine Kräfte von außen) bleibt der Gesamtimpuls erhalten

Definition des Schwerpunkts S



$$\vec{r}_S = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Verallgemeinerung: $\vec{r}_S = \dfrac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$

$$(m_1 + m_2) \cdot \vec{r}_S = m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2$$

$$\frac{d}{dt} \longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow (m_1 + m_2) \cdot \dot{\vec{r}}_S = m_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow (m_1 + m_2) \cdot \ddot{\vec{r}}_S = m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2$$

$$\dot{\vec{p}} = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2$$ Aus Impulserhaltung:

$$\dot{\vec{p}} = 0$$

$$\dot{\vec{p}} = \overrightarrow{\text{Konstante}} \quad \Longrightarrow$$

$$(m_1 + m_2) \cdot \ddot{\vec{r}}_S = \vec{a}_S = 0$$

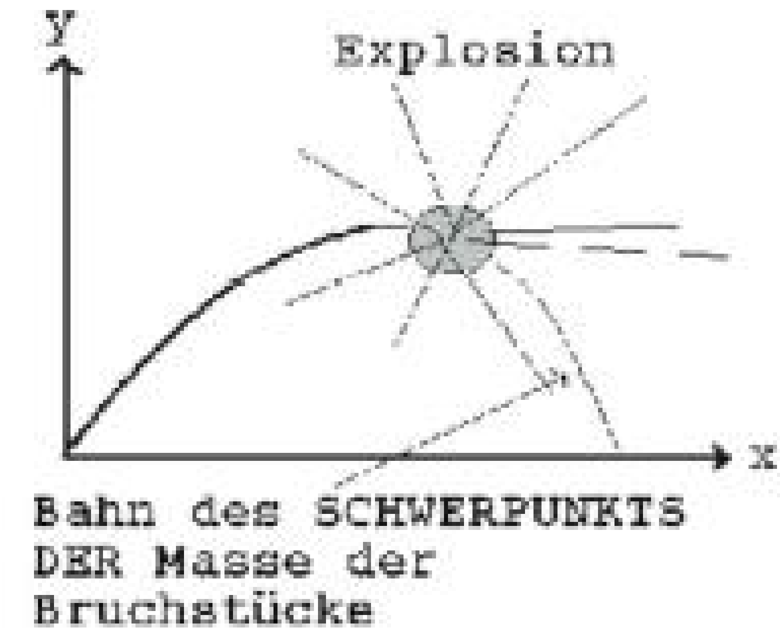
Erhaltung des Schwerpunkts

eines Systems bestehend aus zwei oder mehreren Massenepunkten

Wichtige Folgerung des Impulssatzes

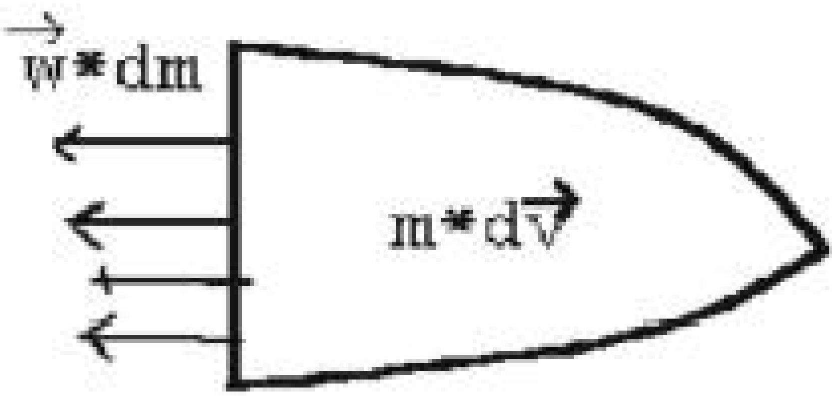
Dies gilt unabhängig von Bewegungen und Wechselwirkungen der Teilchen untereinander

Beispiel: Feuerwerkskörper



1.7 Weitere Anwendungen des Energie- und Impulssatzes

Rückstoßantrieb



Eine Rakete mit der Masse m, stößt eine Treibstoffmasse dm in der Zeit dt mit der Geschwindigkeit w aus.

Impuls: $\vec{w} \cdot dm$

Impulssatz: $m \cdot d\vec{v} + \vec{w} \cdot dm = 0$

Eindimensional: $m \cdot dv = -w \cdot dm$

Kraftgesetz: $m \cdot \frac{dv}{dt} = -w \cdot \frac{dm}{dt}$

$w \cdot \frac{dm}{dt}$: **Schubkraft!**

Frage: Wie groß ist die Geschwindigkeit nach einer Brenndauer t

Startwerte: $t = 0,\ m = m_0,\ v = 0$

$$-w \cdot dm = m \cdot dv$$

Integration: $\int_{m_0}^{m(t)} \frac{dm}{m} = \ln m(t) - \ln m_0 =$

$$-\frac{1}{w} \int_0^{v(t)} dv = -\frac{1}{w} \cdot v(t)$$

$$\ln \frac{m}{m_0} = -\ln \frac{m_0}{m} = -\frac{v(t)}{w}$$

$$v(t) = w \cdot \ln \frac{m_0}{m}$$

Ann.: $-\frac{dm}{dt} =$ konstant $= -\mu \rightarrow$

$$m(t) = m_0 - \mu \cdot t$$

$$v(t) = w \cdot \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu \cdot t} = -w \cdot \ln(1 - \frac{\mu \cdot t}{m_0})$$

Raketenmasse besteht aus:

$$m_0 = m_{N(Nutzlast)} + m_{T(reibstoff)}$$

$$m_T = \mu \cdot t_{B(renndauer)}$$

$v(t) = -w \cdot \ln(1 - \frac{t \cdot m_T}{m_0 \cdot t_B})$ dabei $t \leq t_B$

Mit der Maximalgeschwindigkeit:

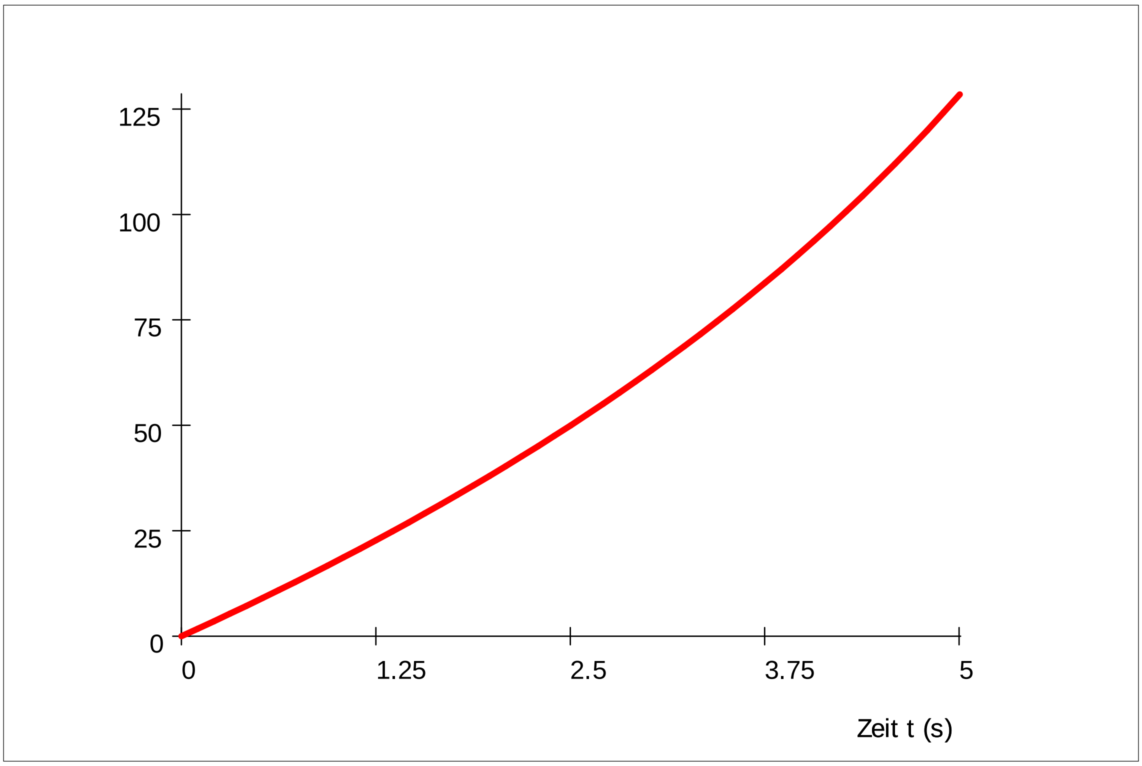
$$v_{\max} = -w \cdot \ln(1 - \frac{m_T}{m_0})$$

Beispiel: Lufttheuler

$m_T \approx 1.5g$
$m_N \approx 1g$
$w = 140m/s$

$$v_{\max} = -140 \cdot \ln(1 - \tfrac{1.5}{2.5}) = 128.28 m/s$$

$$v = -140 \cdot \ln(1 - \tfrac{t \cdot 1.5}{2.5 \cdot 5})$$



Rakete fliegt mit $v_{\max}$ weiter

Beispiel:

Wasserrakete:

leere Rakete:20g, Wasserfüllung 20g, 1/3 des Gesamtvolumens
$\approx$6-8 bar Druck   Realistische Werte für w:$\approx$ 3km/s

---

Raketen in Anwendug:

Realistische Werte für w:$\approx$ 3km/s

$\frac{v_{\max}}{w}$	$\frac{m_T}{m_N}$
1	1.7
2	6.4
3	19
4	53.6

Praktikabel Mehrstufenraketen

Brennstoffbehälter werden abgesprengt

z.B.: Saturnrakete:

Höhe 111m, $F_{Schub} = 30400000N$, $m_0 = 2800t$,
$m_N(Erdumlaufbahn) = 120t$,
$= 43t(Fluchtgeschwindigkeit)$
$m_T = (2000t, 533t, 104t)$ flüssig H_2/O_2