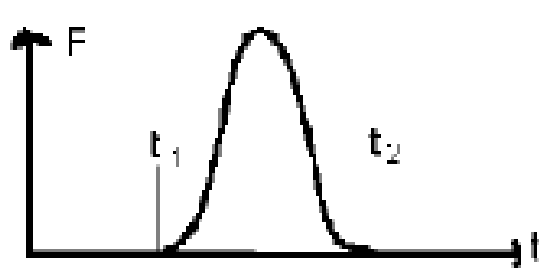


b) Elastischer Stoß



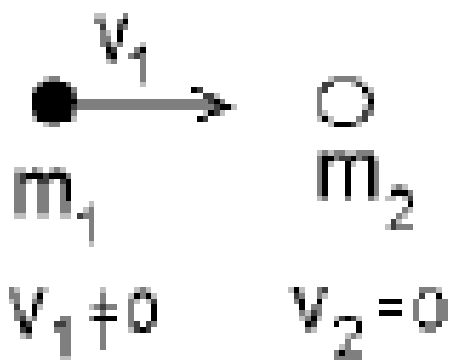
$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) :$$

Impulsänderung

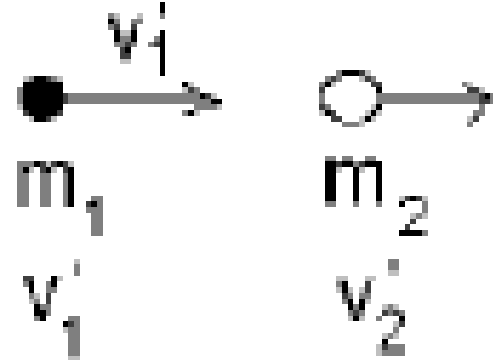
"Elastisch": Stoßvorgang verzehrt keine Energie!

$$E_{kin}(\text{vorher}) = E_{kin}(\text{nachher})$$

Vor dem Stoß



Nach dem Stoß



Stoß entlang einer Geraden

1 Impulssatz

$$m_1 \cdot v_1 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

2 Energiesatz

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2'^2$$

Aus 1

$$m_1^2 \cdot (v_1 - v_1')^2 = m_2^2 \cdot v_2'^2 \quad 3$$

Aus 2

$$m_2 \cdot m_1 \cdot (v_1^2 - v_1'^2) = m_2^2 \cdot v_2'^2 \quad 4$$

$$\frac{4}{3} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \frac{m_2 \cdot (v_1 + v_1')}{m_1 \cdot (v_1 - v_1')} = 1$$

$$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow m_2 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_1' = m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot v_1'$$

$$v_1' \cdot (m_2 + m_1) = (m_1 - m_2) \cdot v_1$$

Geschwindigkeit des stoßenden Körpers
Nach dem Stoß

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$v_2' ?$$

$$m_1 \cdot v_1 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \quad m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = m_2 \cdot v_2'$$

$$v_2' = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Verschiedene Fälle

$$m_1 = m_2$$

v	p	E
$v'(2)=v(1)$	Vollst.p-Übertrag	Vollst.E-Übertrag
$v'(1)=0$	$p(1) \rightarrow p(2)$	$E(1) \rightarrow E(2)'$

$$m_1 \ll m_2$$

$v'(2) \ll v(1)$	Max.p-Übertrag	Min.E-Übertrag
$v'(1) \sim -v(1)$	$2p(1)$	$V(2)' \sim 0$

Wie Reflexion an starren Wand

$$m_1 \gg m_2$$

v	p	E
$v(1)' \sim v(1)$	Kleiner p-Übertrag	Kleiner E-Übertrag
$v(2)' \sim 2v(1)!$	$p(1)' - p(1) \sim 0$	

c) Unelastischer Stoß
Inelastischer Stoß:

Mechanische Energie
Geht beim Stoßprozess
verloren

Wärme

Impulssatz:

Erhaltung der Schwerpunktsbewegung

$$m_1 \cdot v_1 = (m_1 + m_2) \cdot v_{SP} \quad \rightarrow \rightarrow \quad v_{SP} = \frac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$$

Energie Q geht „verloren“

$$Q = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot v_{SP}^2 \quad v_{SP} = \frac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_1^2$$

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Q: Dissipationsenergie, Deformation,
Wärme, Chemische Energie

Beispiele:

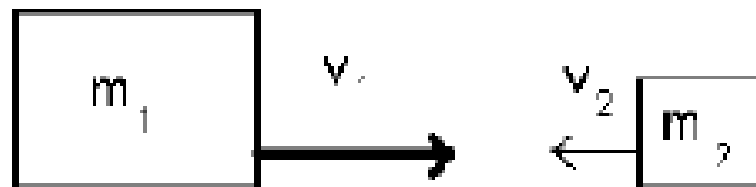
$$m_1 \ll m_2; Q = E_{kin};$$

$$m_1 = m_2 \rightarrow \rightarrow \rightarrow Q = \frac{E_{kin}}{2}$$

Vollständige Umwandlung

Beispiel: Zusammenstoß zweier Autos

Vorher:

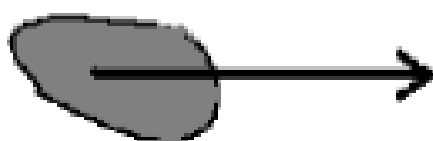


sei $v_1 = v_2$ aber $m_1 = 4 \cdot m_2$

Was macht der Schwerpunkt?

$$p = m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_1 = (m_1 + m_2) \cdot v_{SP} \\ = v_1 \cdot (m_1 - m_2)$$

Nachher:



Inelastisch

$$v_{SP} = \frac{v_1 \cdot (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

Geschwindigkeits-
änderung für:

$$m_1 : \Delta v_1 = \frac{2}{5} v_1$$

$$m_2 : \Delta v_2 = \frac{8}{5} v_1$$

Konkret bei: $v_1 = 50 \text{ km/h}$

Wird zurück-
geschleudert

$$\Delta v_1 = 20 \text{ km/h} \quad \Delta v_2 = 80 \text{ km/h}$$

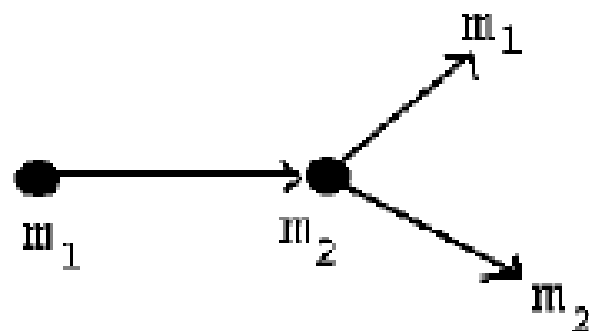
Verletzungen durch Beschleunigung!

Wichtig!

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \sim \frac{\text{Massenverhältnis}}{\text{evtl. Knautschzone}}$$

Elastischer Stoß in der Ebene

Unter welchem
Winkel findet
die Streuung statt?



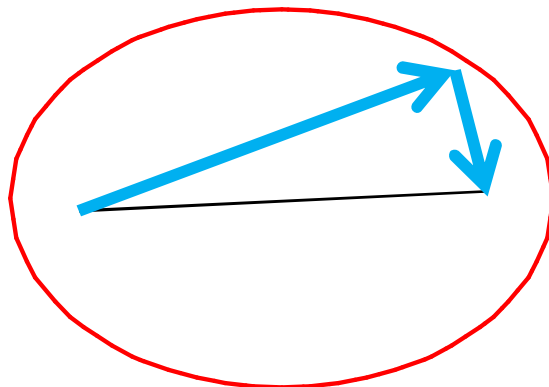
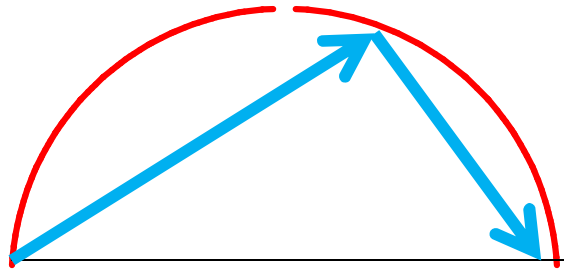
Spezialfall:

$$m_1 = m_2 = m, v_2 = 0$$

Energiesatz:
$$\frac{p_1^2}{2m} = \frac{p_1'^2}{2m} + \frac{p_2'^2}{2m}$$

$$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2$$

Nach dem Stoß
Fliegen die Kugeln
Unter 90° aus-
einander

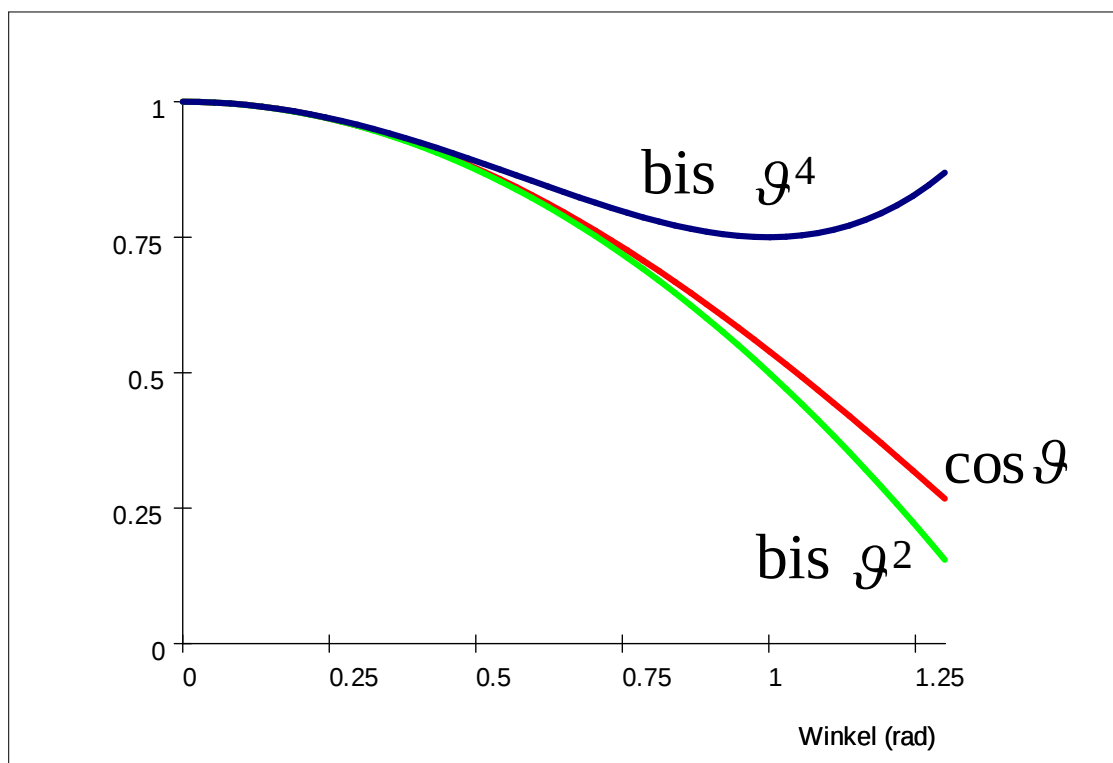


$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m \cdot l^2 \cdot \dot{\vartheta}^2}{2} + m \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \vartheta) \right) = 0$$

Näherungslösung, beschränkt auf kleine Winkel:

Da

$$\cos \vartheta = 1 - \frac{1}{2!} \vartheta^2 + \frac{1}{4!} \vartheta^4 - \dots$$



Mit $E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot l \cdot \vartheta^2$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot l^2 \cdot (\dot{\vartheta})^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot l \cdot \vartheta^2 \right) = 0$$

$$m \cdot l^2 \cdot \dot{\vartheta} \cdot \ddot{\vartheta} + m \cdot g \cdot \vartheta \cdot \dot{\vartheta} = 0$$

Die Bewegungsgleichung $\ddot{\vartheta} + \frac{m \cdot g}{l} = 0$

ist identisch mit der Gleichung, die mit einer Masse an einer Feder erhalten wurde, wenn

$$D = \frac{m \cdot g}{l} \text{ ist.}$$

$$\rightarrow \rightarrow \vartheta = \vartheta_0 \cdot \cos \omega t \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Mit der Schwingungsdauer T:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Bisher Kinematik, ausgedrückt in

$$\vec{r}(t), \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}; \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

und Dynamik mit

$$\vec{F} = \vec{a} \cdot m; W = \vec{F} \cdot \vec{r} \quad P = \frac{dW}{dt}$$

$$E_{pot} = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

1.6 Impuls

$$\begin{aligned} \text{Kraft} &= m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{oder in } \Delta t \\ &= \frac{m \cdot (\vec{v} - \vec{v}_0)}{\Delta t} = \frac{m \cdot \vec{v} - m \cdot \vec{v}_0}{\Delta t} \end{aligned}$$

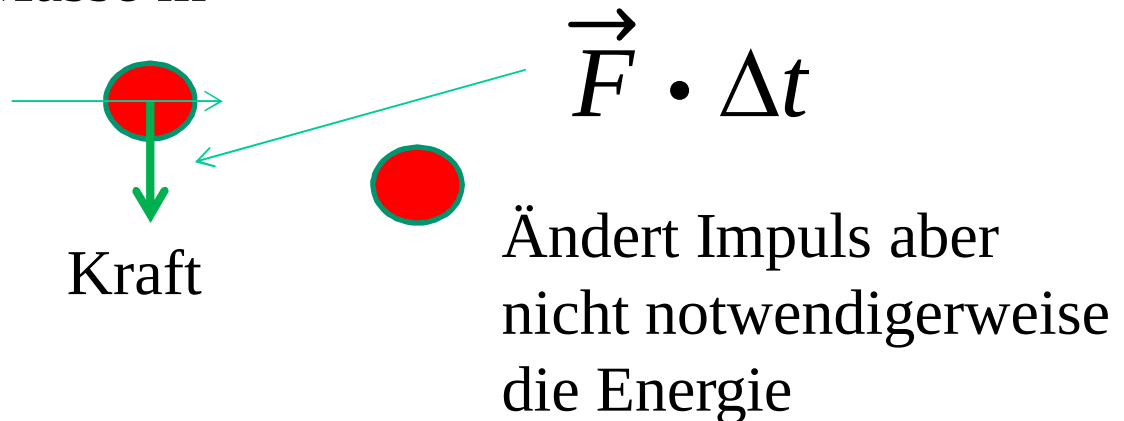
Neue Bewegungsgröße Impuls

$$\text{Kraft} = \frac{\text{Änderung des Impulses}}{\text{Zeiteinheit}} \quad \text{oder}$$

$$\text{Kraft} \cdot \text{Zeit} = \text{Änderung des Impulses}$$

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \vec{v} - m \cdot \vec{v}_0 \quad \text{A\textsubscript{t}sto\textsubscript{B}o\textsubscript{S}}\acute{o}$$

Kraft wirkt kurzzeitig auf den Körper der Masse m



Definition: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

$$(p) = kg \cdot m \cdot s^{-1}$$

Beispiel: Golfball (60g) erreicht 50m/s bei einer Kontaktzeit von $5 \cdot 10^{-3}s$

Wie groß ist die Kraft?

$$F = \frac{mv - mv_0}{\Delta t} = \frac{0.06kg \cdot 50ms^{-1}}{5 \cdot 10^{-3}s} = 600kg \cdot m \cdot s^{-2} = 600N$$

Im Erdfeld ist der Ball einer Kraft von $mg=0.6N$ ausgesetzt.

Zusammenhang zwischen $\vec{p}$ und E_{kin}

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}; E_{kin} = \frac{m}{2}v^2;$$

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2 \cdot m}$$

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ auch in relativistischer Kinematik gültig

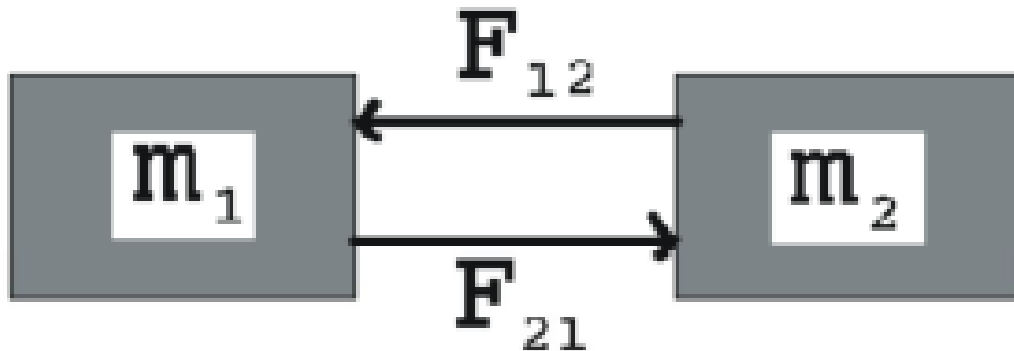
Aus dem dritten Newtonschen Axiom:

Actio=Reactio

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21}$$

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 = 0$$

$$m_1 \cdot \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \cdot \frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0$$



$$\frac{d}{dt}(m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 : \text{Impulserhaltung}$$

Verallgemeinerung auf beliebig viele Massenpunkte

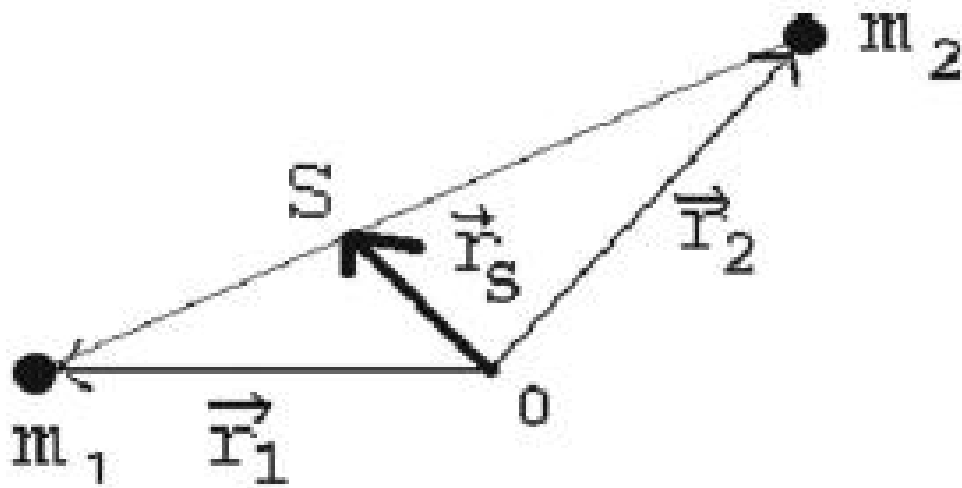
Gesamtimpuls des Systems:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i$$

Impulserhaltung: $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$

In einem abgeschlossenen System
(keine Kräfte von außen) bleibt der
Gesamtimpuls erhalten

Definition des Schwerpunkts S



$$\vec{r}_S = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Verallgemeinerung: $\vec{r}_S = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$

$$(m_1 + m_2) \cdot \vec{r}_S = m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2$$

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \rightarrow \rightarrow (m_1 + m_2) \cdot \dot{\vec{r}}_S = m_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \rightarrow \rightarrow \rightarrow (m_1 + m_2) \cdot \ddot{\vec{r}}_S = m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2$$

$$\dot{\vec{p}} = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 \quad \text{Aus Impulserhaltung:}$$

$$\dot{\vec{p}} = 0$$

$$\dot{\vec{p}} = \overrightarrow{\text{Konstante}} \quad \text{→}$$

$$(m_1 + m_2) \cdot \ddot{\vec{r}}_S = \ddot{\vec{a}}_S = 0$$

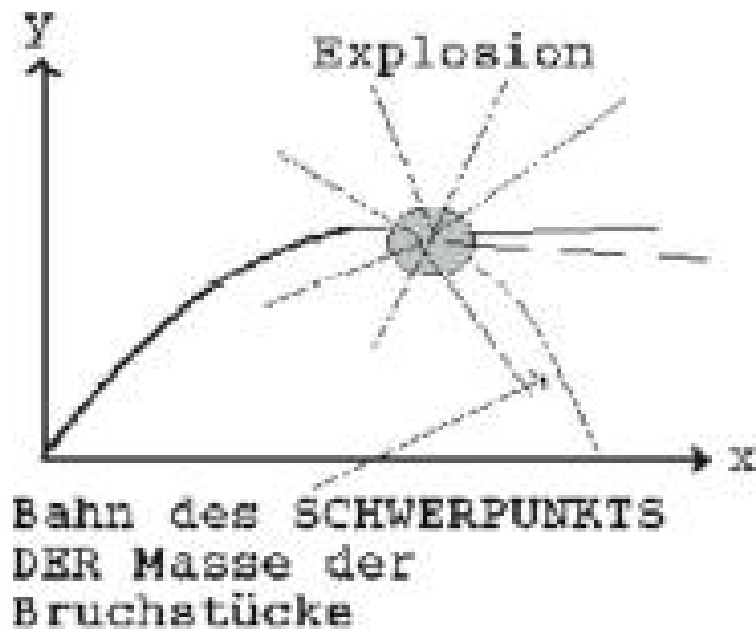
Erhaltung des Schwerpunkts

eines Systems bestehend aus zwei oder mehreren Massenpunkten

Wichtige Folgerung des Impulssatzes

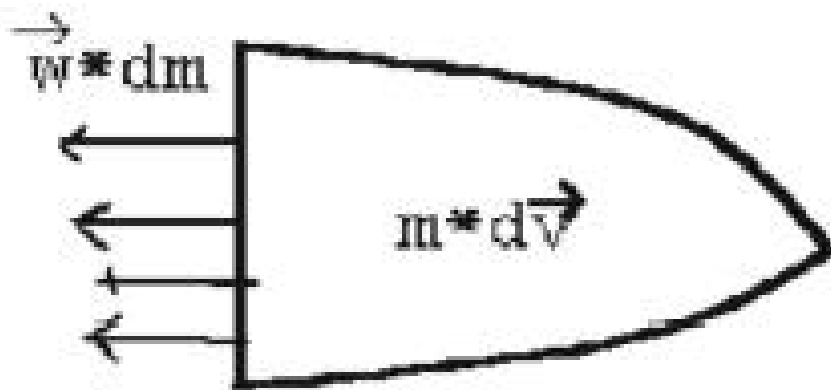
Dies gilt unabhängig von Bewegungen und Wechselwirkungen der Teilchen untereinander

Beispiel: Feuerwerkskörper



1.7 Weitere Anwendungen des Energie- und Impulssatzes

Rückstoßantrieb



Eine Rakete mit der Masse m , stößt eine Treibstoffmasse dm in der Zeit dt mit der Geschwindigkeit w aus.

$$\text{Impuls: } \vec{w} \cdot dm$$

$$\text{Impulssatz: } m \cdot d\vec{v} + \vec{w} \cdot dm = 0$$

$$\text{Eindimensional: } m \cdot dv = -w \cdot dm$$

$$\text{Kraftgesetz: } m \cdot \frac{dv}{dt} = -w \cdot \frac{dm}{dt}$$

$$w \cdot \frac{dm}{dt} : \text{Schubkraft!}$$

Frage: Wie groß ist die Geschwindigkeit nach einer Brenndauer t

$$\text{Startwerte: } t = 0, m = m_0, v = 0$$

$$-w \cdot dm = m \cdot dv$$

$$\text{Integration: } \int_{m_0}^{m(t)} \frac{dm}{m} = \ln m(t) - \ln m_0 =$$

$$-\frac{1}{w} \int_0^{v(t)} dv = -\frac{1}{w} \cdot v(t)$$

$$\ln \frac{m}{m_0} = -\ln \frac{m_0}{m} = -\frac{v(t)}{w}$$

$$v(t) = w \cdot \ln \frac{m_0}{m}$$

$$\text{Ann.: } -\frac{dm}{dt} = \text{konstant} = -\mu \rightarrow$$

$$m(t) = m_0 - \mu \cdot t$$

$$v(t) = w \cdot \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu \cdot t} = -w \cdot \ln \left(1 - \frac{\mu \cdot t}{m_0}\right)$$

Raketenmasse besteht aus:

$$m_0 = m_{N(\text{Nutzlast})} + m_{T(\text{reibstoff})}$$

$$m_T = \mu \cdot t_{B(\text{renndauer})}$$

$$v(t) = -w \cdot \ln \left(1 - \frac{t \cdot m_T}{m_0 \cdot t_B}\right) \text{ dabei } t \leq t_B$$

Mit der Maximalgeschwindigkeit:

$$V_{\max} = -w \cdot \ln \left(1 - \frac{m_T}{m_0}\right)$$

Beispiel: Luftheuler

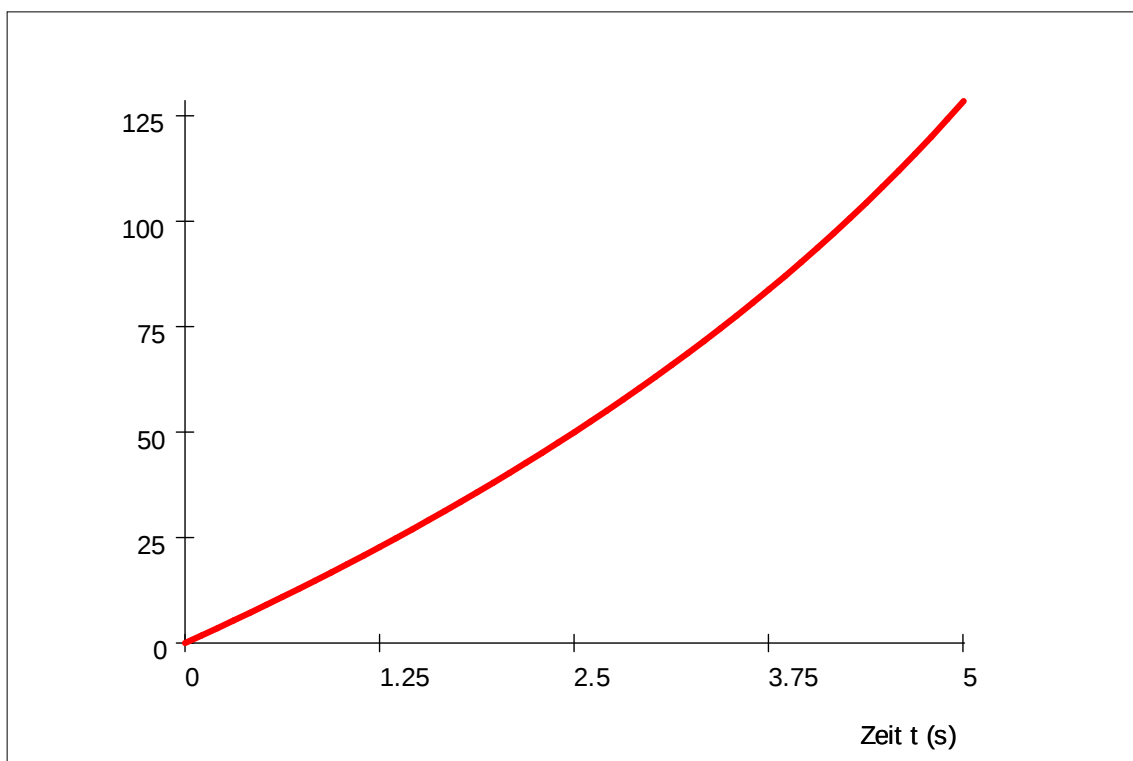
$$m_T \approx 1.5g$$

$$m_N \approx 1g$$

$$w=140m/s$$

$$v_{\max} = -140 \cdot \ln\left(1 - \frac{1.5}{2.5}\right) = 128.28m/s$$

$$v = -140 \cdot \ln\left(1 - \frac{t \cdot 1.5}{2.5 \cdot 5}\right)$$



Rakete fliegt mit $v_{\max}$ weiter

Beispiel:

Wasserrakete:

leere Rakete: 20g, Wasserfüllung 20g, 1/3 des Gesamtvolumens

$\approx 6-8$ bar Druck Realistische Werte für $w: \approx 3\text{km/s}$

Raketen in Anwendug:

Realistische Werte für $w: \approx 3\text{km/s}$

$$\frac{v_{\max}}{w} \quad \frac{m_T}{m_N}$$

$$1 \quad 1.7$$

$$2 \quad 6.4$$

$$3 \quad 19$$

$$4 \quad 53.6$$

Praktikabel

Mehrstufenraketen

Brennstoffbehälter werden abgesprengt

z.B.: Saturnrakete:

Höhe 111m, $F_{\text{Schub}} = 30400000\text{N}$, $m_0 = 2800\text{t}$,
 $m_N(\text{Erdumlaufbahn}) = 120\text{t}$,
 $= 43\text{t}(\text{Fluchtgeschwindigkeit})$
 $m_T = (2000\text{t}, 533\text{t}, 104\text{t})$ flüssig H_2/O_2