2. Mechanik des starren Körpers

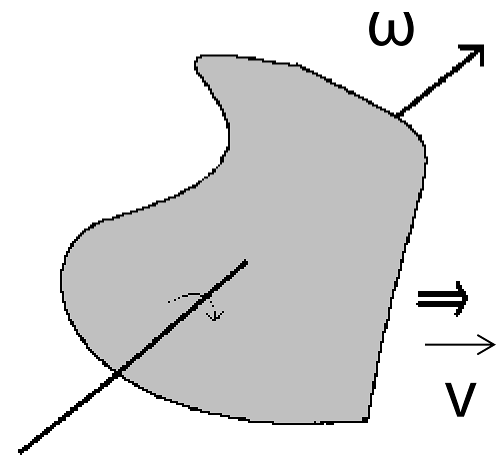
2.1. Translation und Rotation

In Kapitel 1: Massenpunkt

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow \ \vec{r}(t)$

In Kapitel 2: Massenpunkte

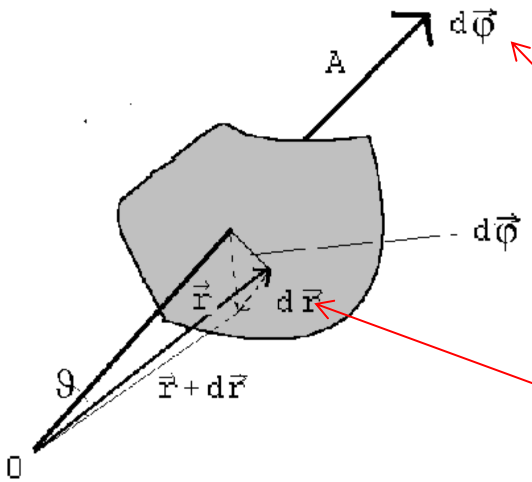
$\rightarrow\rightarrow\rightarrow \ \sum_i \vec{r}_i(t)$



Bewegung eines starren Körpers:

Rotation + Translation

Kinematik der Drehung:



A: Drehachse

$\vec{\varphi}$: Axialer Vektor (In Achsenrichtung)

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r} \qquad dr = d\varphi \cdot r \cdot \sin\vartheta$$

Geschwindigkeit: $\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$

Allgemein für einen Punkt auf einem starren Körper: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$

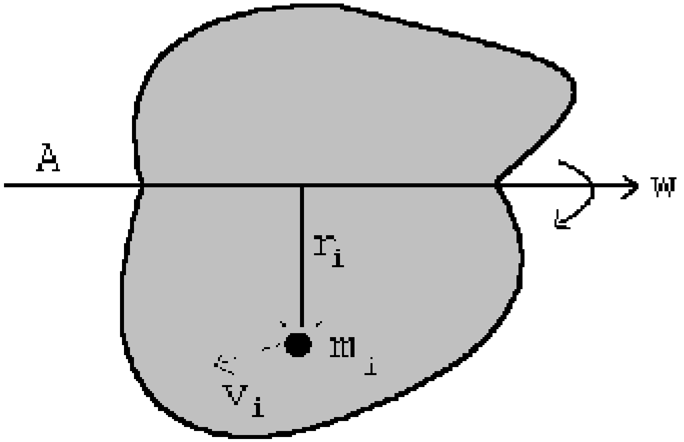
d.h.: Translation + Rotation

Analoga:

	Translation	Rotation
Lage	$\vec{r}$	$\vec{\varphi}$
Geschw.	$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$
Beschl.	$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$	$\dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\varphi}}$

2.2. Rotationsenergie und Trägheitsmoment

Massenpunkt m_i im Abstand r_i



zur Drehachse A,
Geschwindigkeit v_i

und die kinetische Energie

$$\boxed{\frac{1}{2} m_i \bullet v_i^2}$$

$$v_i = \omega_i \bullet r_i \qquad \boxed{\rightarrow\rightarrow E_{kin_i} = \frac{1}{2}\omega^2 \bullet m_i \bullet r_i^2}$$

Gesamte kinetische Energie

Rotationsenergie: $W_{Rot} = \frac{1}{2}\omega^2 \bullet \Sigma_i m_i \bullet r_i^2$

Übergang zur kontinuierlichen Massenverteilung: $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$

$$m_i \rightarrow \Delta m_i \rightarrow dm = \rho \bullet dV$$

$$\int dm \bullet r^2 \; : \; W_{Rot} = \frac{1}{2}\omega^2 \int dm \bullet r^2;$$

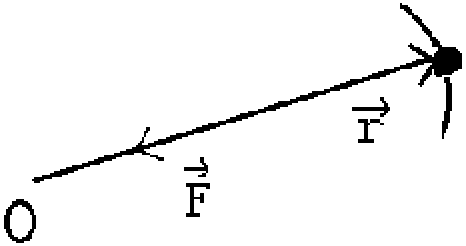
(Massenelement = Dichte x Volumenelement)

Trägheitsmoment I: $[I] = kg \bullet m^2$

Analogie: Translation – Rotation: v-> ω,m-> I

Bei der Drehbewegung um eine Achse A spielt I die gleiche Rolle, wie m bei der Translation

2.3.Drehimpuls und Drehmoment



Bewegungsgleichung: $\vec{F} = m \cdot \ddot{\vec{r}}$

Vektorprodukt mit $\vec{r} \rightarrow$

$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m \cdot \ddot{\vec{r}}$

Wir betrachten : Zentralkraft: $\vec{F} \parallel \vec{r} \rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = 0$

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow \vec{r} \times m \cdot \ddot{\vec{r}} = 0$

Wir können eine neue Größe erkennen: $\vec{L} = \vec{r} \times m \cdot \dot{\vec{r}}$

Denn $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m \cdot \dot{\vec{r}}\right) = \vec{r} \times m \cdot \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \times m \cdot \dot{\vec{r}}$

Aber: $\vec{r} \times m \cdot \ddot{\vec{r}}\ (s.o.) = 0 = \dot{\vec{r}} \times m \cdot \dot{\vec{r}}$

Drehimpuls L zeitlich konstant

$\rightarrow\rightarrow \vec{L}$ Definition: $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$

Beim starren Körper: $\vec{L} = \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$

Vektorrechnung: $\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})}$

$\rightarrow\rightarrow \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{\omega}(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i \cdot (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})$

Drehimpuls des starren Körpers

mit $(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) = r_i^2$

$\vec{L} = \vec{\omega} \cdot \sum_i m_i \cdot r_i^2 = I \cdot \vec{\omega}$

$\vec{r}_i \perp \vec{\omega}$ -> $(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})$ =0

$\frac{d\vec{L}}{dt}$??

$[\vec{L}] = kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$

Drehmoment

$\vec{dL/dt} = \sum_i m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \times \vec{v}_i + \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \times \dot{\vec{v}}_i =$

$\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Kraft mal Abstand

$\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{a}_i$

$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I \cdot \vec{\omega}) = I \cdot \dot{\vec{\omega}}}$

Grundgesetz der Dynamik der Drehbewegung

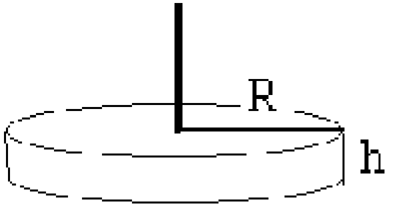
$\vec{T} = \dot{\vec{L}} \rightarrow\rightarrow\rightarrow \vec{T}$ bewirkt Änderung von $\vec{L}$

Für ein abgeschlossenes System: $\vec{T} = 0; \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow \dot{\vec{L}} = 0$

Der gesamte Drehimpuls eines Systems bleibt erhalten, solange kein äußeres Drehmoment angreift

Beispiele für das Trägheitsmoment:

$$I = \int dm \bullet r^2 = \rho \bullet \int r^2 \bullet dV; mit \quad dV = 2\pi \bullet r \bullet dr \bullet dh$$



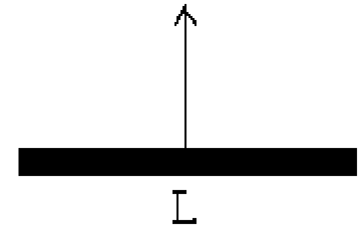
$$I = 2\pi \bullet \varrho \bullet h \bullet \int_0^R r^3 \bullet dr = 2\pi \bullet \varrho \bullet h \bullet \frac{r^4}{4} \Big|_0^R$$

$$I = \pi \bullet \varrho \bullet h \bullet \frac{R^4}{2}; da \quad M = \rho \bullet V = \pi \bullet R^2 \bullet h \bullet \rho$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 0.5 \bullet M \bullet R^2}$$

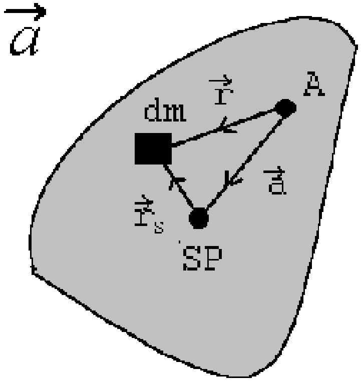
Ähnliche Rechnungen: I(Kugel)=2*M*R^2 */5

I(Stab)=M*L^2/12



Wie ist es , wenn die Drehachse A nicht durch den Schwerpunkt SP geht?

$$\vec{r} = \vec{r}_s + \vec{a}$$



$$I = \int dm \bullet r^2 = \int dm \bullet \left(\vec{r}_s + \vec{a}\right)^2$$

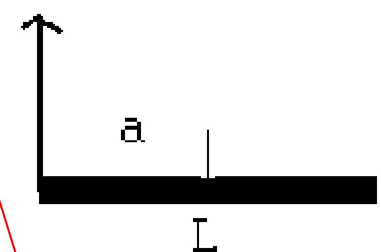
$$= \int dm \bullet r_s^2 + 2 \bullet \vec{a} \bullet \int dm \bullet \vec{r}_s + a^2 \int dm$$

$$= \int dm \bullet r_s^2 + 2 \bullet \vec{a} \bullet \int dm \bullet \vec{r}_s + a^2 \int dm$$

$$I \quad = \quad I_{SP} \quad + \quad 0 \quad + \quad a^2 M$$

Steinersche Satz

Beispiel, wiederum Stab:



$$I = \frac{1}{12} M \bullet L^2 + M \bullet \frac{L^2}{4}$$

$$I = \frac{1}{3} M \bullet L^2$$

Trägheitsmoment um eine beliebige Achse!

2.4. Energieumwandlung

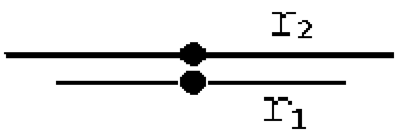
Analog aus :

Rotationsenergie: $E_{kin_i} = \frac{m_i}{2} \cdot v_i^2$ führt zu $\sum \frac{m_i}{2} r_i^2 \cdot \omega^2$

führt zu $\frac{1}{2} I \cdot \omega^2$

Kraft gegen Zentrifugalkraft mit Verminderung von r

Energie im rotierenden System, z.B. Drehschemel



I wird kleiner $\vec{L} = \vec{\omega} \cdot I$ r2→ r1 ω1 >ω2

$\Rightarrow E_{rot_1} \succ E_{rot_2}$

Rotationsenergie? $E_{rot} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$

Denn $L_1 = L_2$

Energie wird in das rotierende System gesteckt

$E_{rot} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I}$

2.5. Gegenüberstellung: Translation- Rotation

Translation	Rotation
Weg: $\vec{s}(\vec{r})$	Winkel $\vec{\phi}$
Geschw. $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \dot{\vec{\phi}}$
Beschl. $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$	Winkelbeschl. $\dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\phi}}$
Masse: m	Trägheitsmoment $I = \int dm \cdot r^2$
Kraft $\vec{F}$	Drehmoment $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$

Grundgesetz der Dynamik

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	$\vec{T} = I \cdot \dot{\vec{\omega}}$
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{T} = \frac{d\vec{T}}{dt}$

Gleichförmige Bewegung $\vec{a} = 0, \vec{s} = \vec{v} \cdot t$ $\vec{\omega} = 0, \vec{\phi} = \vec{\omega} \cdot t$

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung:

$\vec{v} = \vec{a} \cdot t, \vec{s} = \vec{a} \cdot \frac{t^2}{2}$ $\vec{a} = \overrightarrow{konstant}, \dot{\vec{\omega}} = \overrightarrow{konstant}$

$\vec{\omega} = \dot{\vec{\omega}} \cdot t, \vec{\phi} = \vec{\omega} \cdot \frac{t^2}{2}$

Impuls: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Kin. Energie: $E_{kin} = m \cdot \frac{v^2}{2}$

Drehimpuls: $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$

Rotat. Energie: $W_{rot} = I \cdot \frac{\omega^2}{2}$

Arbeit und Leistung:

$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$ $W = \int \vec{T} \cdot d\vec{\phi}$

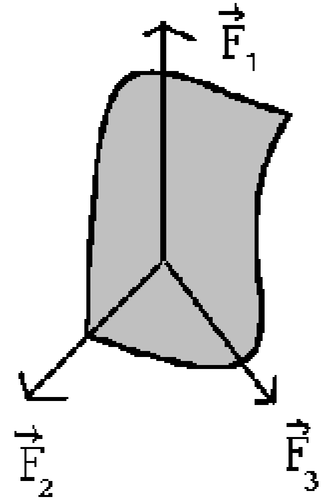
$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ $W = \vec{T} \cdot \vec{\omega}$

2.6. Gleichgewicht des starren Körpers

Gleichgewicht: $\vec{F} = 0; \vec{T} = 0$

Keine Translation: $\vec{F} = 0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

$$| \vec{F}_3 | = | \vec{F}_2 | + | \vec{F}_1 |$$

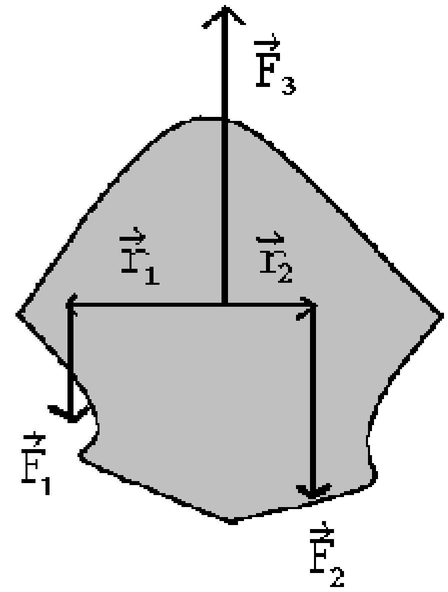


Keine Rotation: $\vec{T} = 0; \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$

$$\vec{F}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \times \vec{r}_2 = 0$$

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

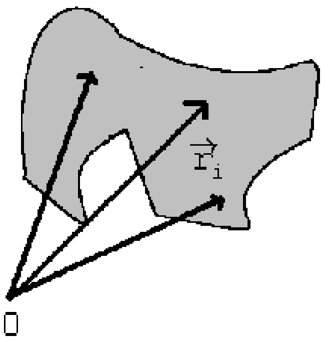
$$\Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2}{r_1}$$



Hebelgesetze (Archimedes 250 v.Chr.)

Ausgedehnter Körper:

Wann ist $\vec{T} = 0$



Drehmoment aufgrund der Schwerkraft:

$$\vec{T}_g = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \times \vec{g}$$

$$\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{g};$$

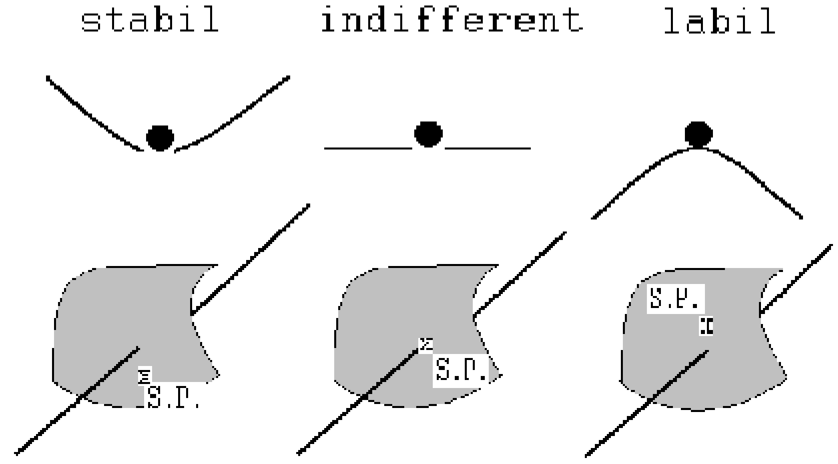
wann 0 ? Dann , wenn $\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i = 0$

$$\vec{T} = 0$$

$$\vec{r}_{SP} = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

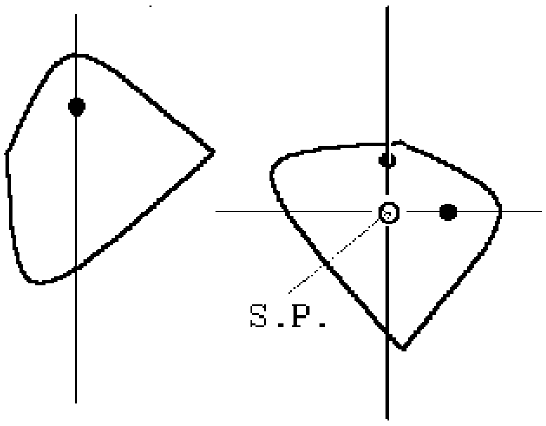
wenn Koordinatenursprung= Schwerpunkt

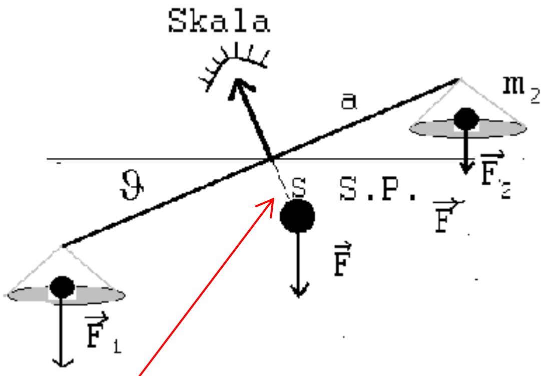
Gleichgewichtsarten:



Experimentelle Bestimmung des Schwerpunkts im Schwerefeld

Waage:





$$\sum_i \vec{T}_i = 0$$

M: Gesamtmasse

Empfindlichkeit der Waage:

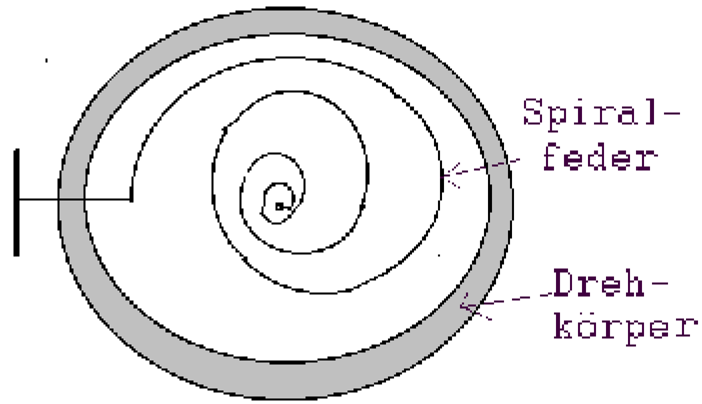
$$m_1 + m_2 \neq M; m_1 - m_2 = \Delta M;$$

ϑ : "klein" $\rightarrow \sin\vartheta \approx \vartheta$

$$\Rightarrow a \bullet \Delta M = s \bullet \vartheta \bullet g \bullet M \qquad a \bullet \cos\vartheta(m_1 - m_2) \bullet g = s \bullet \sin\vartheta \bullet g \bullet M$$

$\frac{\vartheta}{\Delta M} = \frac{a}{s \cdot M} \Rightarrow$ je kleiner s, desto größer die Empfindlichkeit

2.7. Drehschwingungen



Bei Auslenkung: Drehmoment $\approx \vartheta$

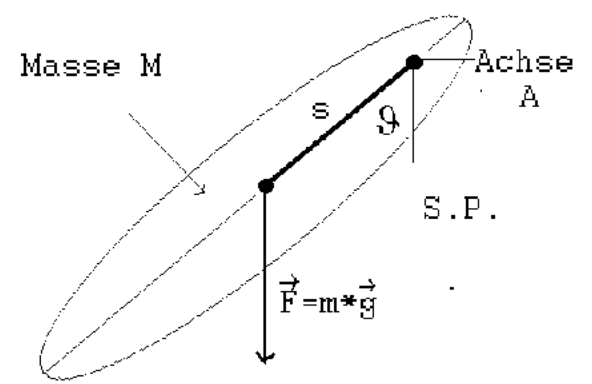
$\vec{T} = -D^* \cdot \vec{\vartheta};$ Winkelrichtgröße

Bewegungsgleichung: $\boxed{I \cdot \ddot{\vartheta} = -D^* \cdot \vartheta}$

Lösung: $\vartheta(t) = \vartheta_0 \cdot \cos \omega_0 \cdot t$ $\quad \vartheta_0$: max.Auslenkung

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{I}} \quad I = I_{sp} + M \cdot s^2$$

Physikalisches Pendel



Drehmoment: $-M \cdot g \cdot s \cdot \sin \vartheta$

$\sin \vartheta \approx \vartheta \quad \Rightarrow T = -M \cdot g \cdot s \cdot \vartheta$

$I \cdot \dot{\omega} = I \cdot \ddot{\vartheta} \quad \Rightarrow I \cdot \ddot{\vartheta} = -M \cdot g \cdot s \cdot \vartheta$

$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{M \cdot g \cdot s}{I_{sp} + M \cdot s^2}}$ mit $I = I_{sp} + M \cdot s^2$ $\quad \frac{s}{I_{sp} + M \cdot s^2} =$ Reduzierte Pendellänge