1. Mechanik der Massenpunkte

1.1 Kinematik des Massenpunkts

Die Ausdehnung der Körper ist vernachlässigbar, die Massen

in einem Punkt vereinigt: Massenpunkt

Bewegung: Änderung der Lage im Raum als Funktion der Zeit

Kennzeichnung eines Punktes im Raum $P(x,y,z)$ mit den

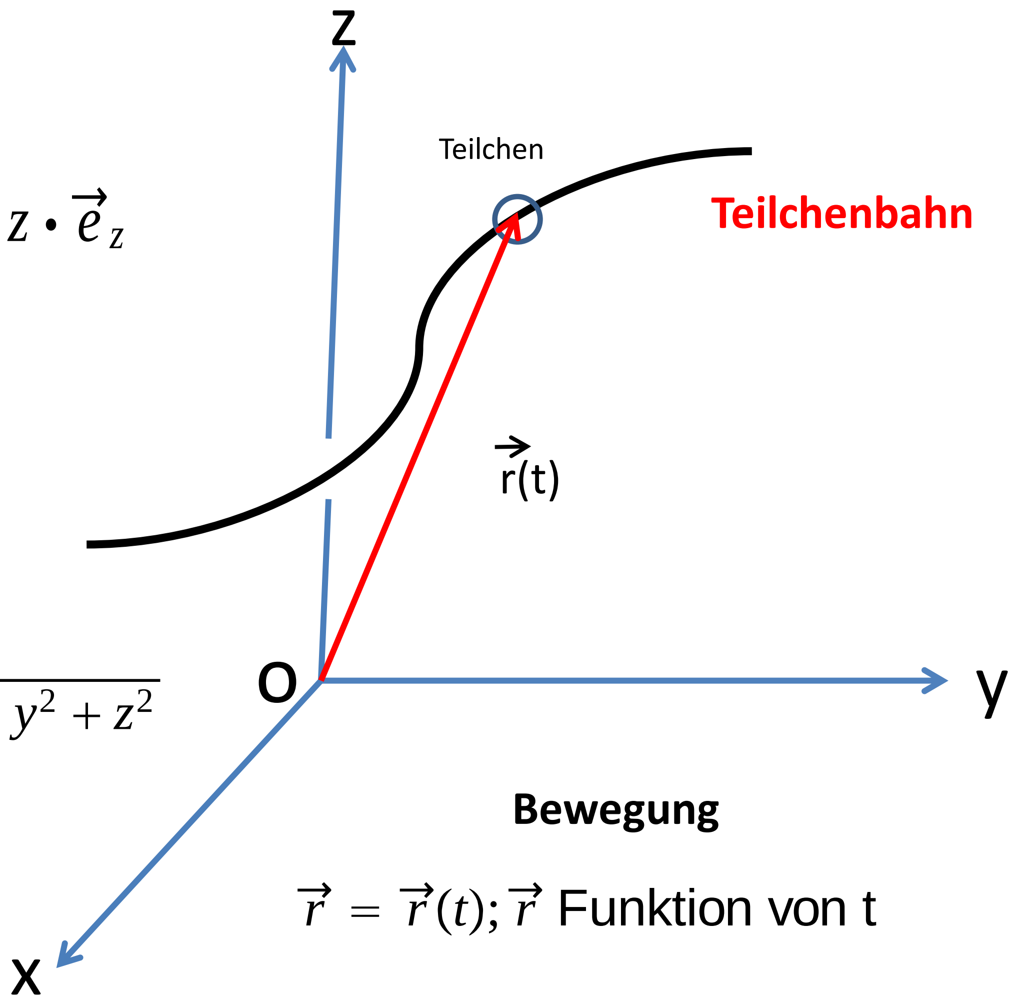
Koordinaten y, x, z

Koordinatensystem mit den Achsen x,y,z

$$\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z$$

$\vec{r}$ Abstand von 0

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

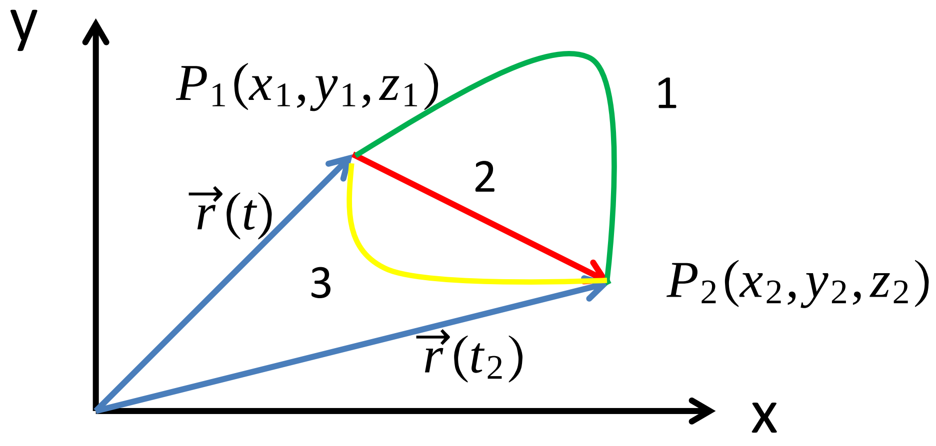


Bewegung

$\vec{r} = \vec{r}(t)$; $\vec{r}$ Funktion von t

$\vec{r}$: Vektor

t : Skalar



1,2,3 Mögliche **Bahnen**

Geradlinige Bewegung: Zurückgelegter Weg

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

Δ : bedeutet eine Änderung der Δ folgenden Größe

Dimension Länge: Meter (m)

Verflossene Zeit: $\Delta t = t_2 - t_1$

Dimension Zeit: Sekunden (s)

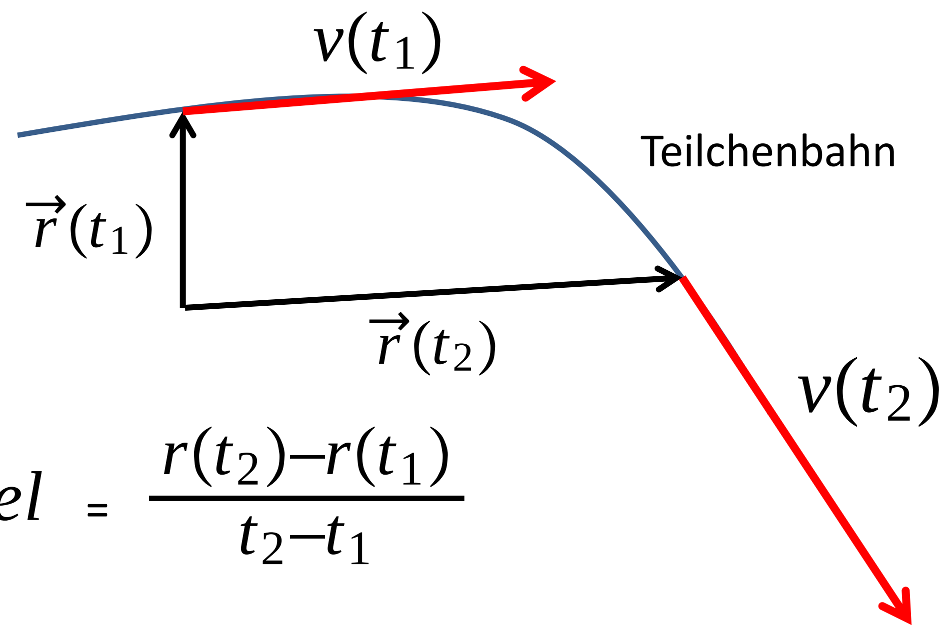
Geschwindigkeit v:

v=zurückgelegter Weg/verflossene Zeit

Dimension: meter/sekunde (m/s)

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$ Vektor in Richtung $\Delta\vec{r}$

Mittlere **Geschwindigkeit** v_{mittel} in $[t_1, t_2]$



$$v_{mittel} = \frac{r(t_2) - r(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Geschwindigkeit

$$\vec{v}_1 = \lim_{t_1 \to t_2} \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \vec{v}(t)$$

Geschwindigkeitsänderung führt zur **Beschleunigung**

$$\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}(t_1, t_2)$$ mit der Dimension: $\frac{m}{s^2}$

mit $\vec{a}(t_1, t_2)$ als mittlere Beschleunigung

Momentane Beschleunigung

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

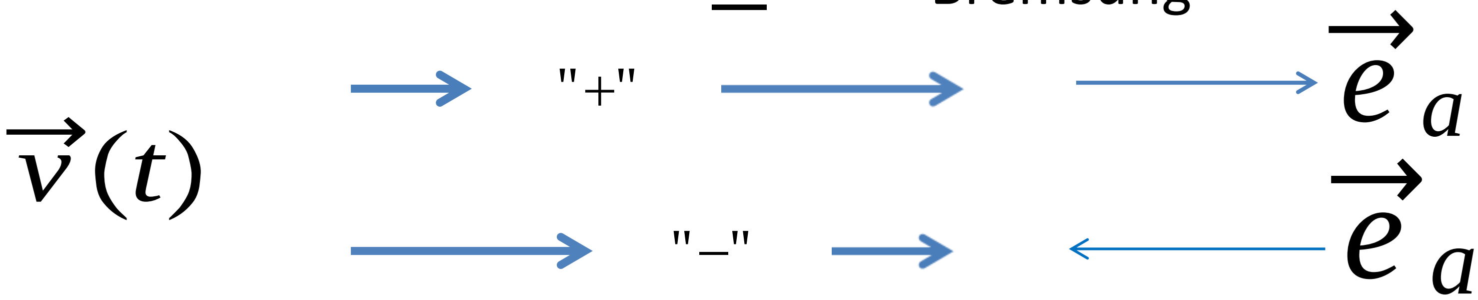
Spezielle Fälle

a) Änderung des Betrags von $\vec{v}$

Geradlinige Bewegung

$$\vec{e}_a = \pm \vec{e}_v \qquad "+" \quad \text{Beschleunigung}$$

$$"-" \quad \text{Bremsung}$$



b) Nur Richtungsänderung von $\vec{v}$

$|\vec{v}|$ konstant

Bis jetzt $\vec{r}(t) \rightarrow \vec{v}(t) \rightarrow \vec{a}$

Mathematisch: Differenzieren

Sehr oft muss man den umgekehrten Weg gehen

$$\vec{a}(t) \rightarrow \vec{v}(t) \rightarrow \vec{r}(t)$$

Mathematisch: Integrieren

Beispiel: Eindimensionale Bewegung, z.B.: x-Richtung

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \rightarrow \vec{v}(t) = \int a(t')dt'$$

mit $v_0 = v(0)$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t')dt'$$

Erhöhung der Geschwindigkeit Von t‘=0 bis t‘=t

Entsprechend: $v(t) \rightarrow x(t)$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t')dt'$$

x_0 als Startpunkt bei t=0

Zuwachs des Weges

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left[v_0 + \int_0^{t'} a(t'')dt'' \right] dt'$$

Beispiel : a(t)=konstant =a_0

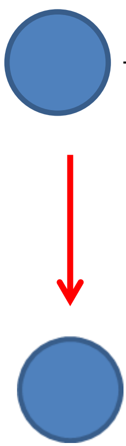
$$v(t) = v_0 + \int_0^t a_0 dt = v_0 + a_0 \cdot t$$

Wächst linear mi t

$$x(t) = x_0 + \int_0^t [v_0 + a_0 \cdot t'] dt' = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2$$

Wächst quadratisch mit t

Beispiel: Freier Fall



X=0, t=0,V_0=0

+X

$$x(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

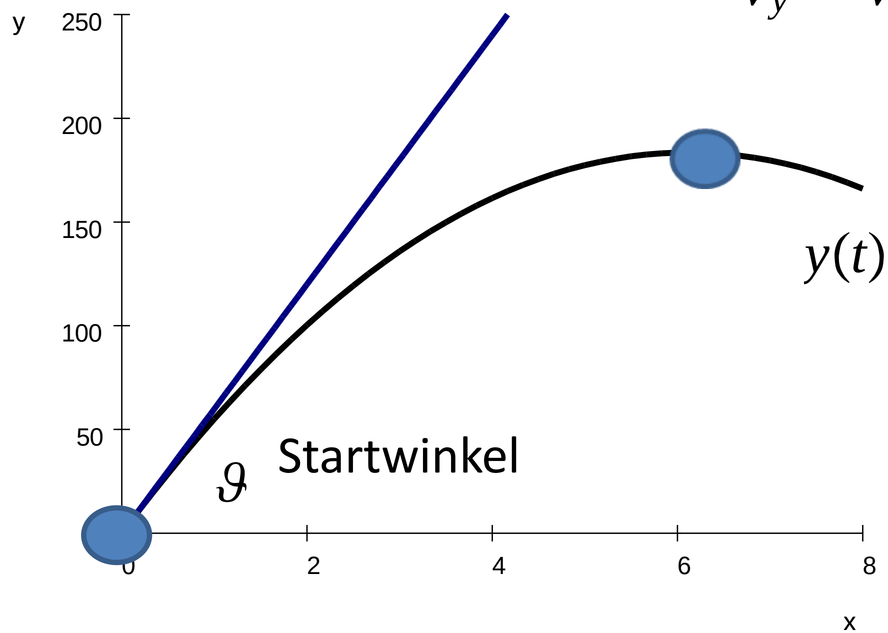
Mit a_0 =g: g=konstant

Wert an der Erdoberfläche

g: Gravitationskonstante

Physik, wie z.B. Massenabhängigkeit des freien Falls wird später diskutiert

Schiefer Wurf als Beispiel für zweidimensionale Bewegung



Geschwindigkeiten

$$v_y = v_0 \cdot \sin\vartheta, \quad v_x = \cos\vartheta$$

In y-Richtung wirkt g

$$y(t) = y_0 + v_y \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

In x-Richtung:

$$x(t) = x_0 + v_x \cdot t$$

Start bei t=0,x=0,y=0

Bewegungsgleichungen: $x(t) = v_0 \cdot \cos\vartheta \cdot t, \; y(t) = v_0 \cdot \sin\vartheta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$

Parametergleichung einer Funktion mit t als Parameter

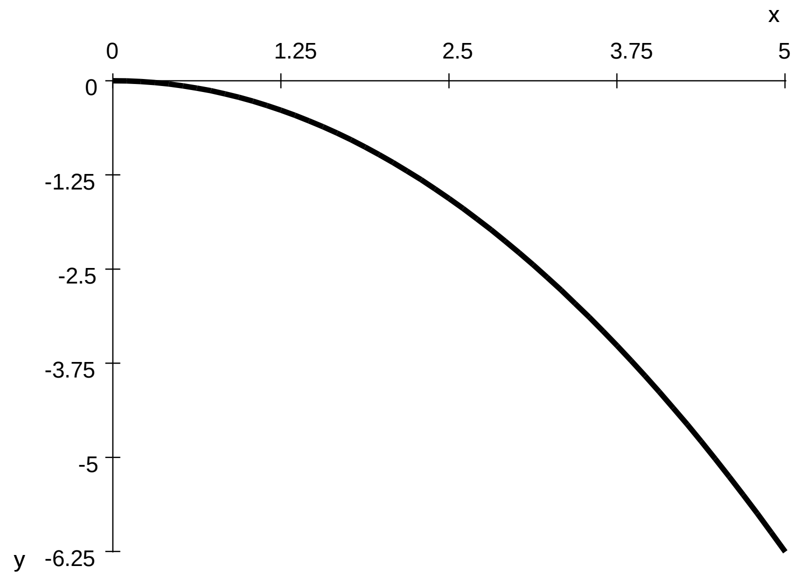
Elimination von t: Führt zu **Bahngleichung** in der x-y Ebene

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\vartheta} \quad \longrightarrow \quad y = x \cdot \tan\vartheta - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0} \cos^2\vartheta$$

$$\vartheta = 0 \rightarrow y = -\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2}$$

Beispiel: Wasserstrahl

Geschwindigkeitsbestimmung
des Strahls bei x=y=0
durch Messung der Bahnkurve



Hier: $v_0 = 4.43 m/s$