2.8. Freie Achsen

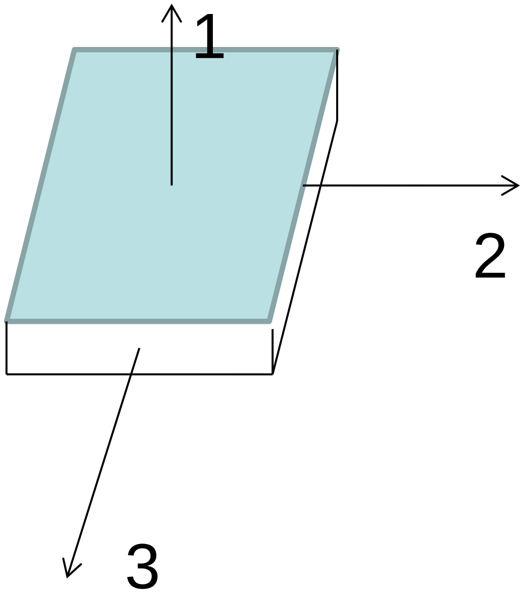
Bisher: Drehachse gelagert Frage: Welches ist die stabile Achse, wenn ein Körper in Drehung versetzt wird ?

Bisher: I = Skalar

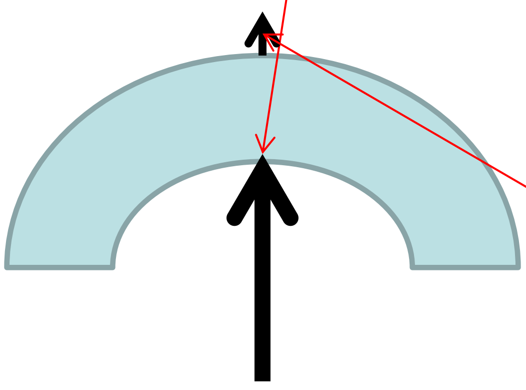
muß aber nicht skalar sein.

Die 3 senkrechten Achsen sind sog. Hauptträgheitsachsen mit:

$I_1 \quad I_2 \quad I_3$



Beispiel für Kreiselbewegungen,
hier: Kräftefreie
(im Schwerpunkt gelagert),
symmetrische Kreisel



Hier in
einer Richtung

Folgende Achsen können Definiert werden:

Figurenachse $\vec{A}$

Momentane Drehachse $\vec{\omega}$

Drehimpulsachse $\vec{L}$

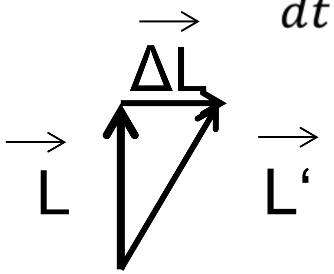
Nach dem „in Rotation setzen“: Keine $\vec{T}$‘s ⇒ Drehmomente

$\vec{L}$ =konstant $\vec{\omega}$ II $\vec{L}$ II $\vec{A}$

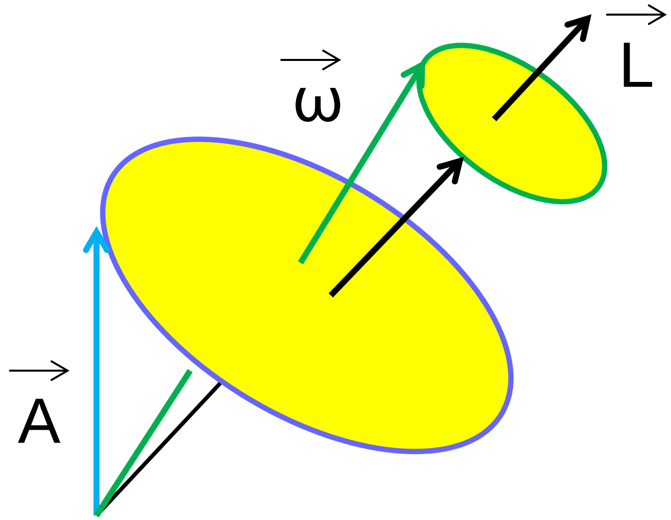
Aber ein kleiner Schlag gegen die Figurenachse: ⇒ Erzeugt T

$$\vec{T}=\frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow d\vec{L}=\vec{T}\,dt$$

L-Achse wird gekippt, alle Achsen haben verschiedene Richtungen

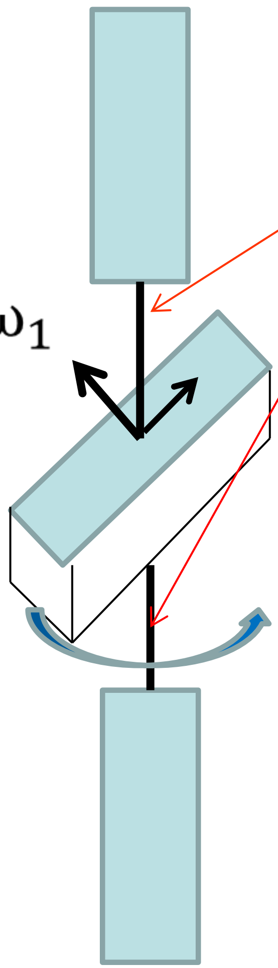


Die ω – und die A Achse bewegen sich um die feste L Achse auf Kegelmänteln



Beispiel für Zusammenhang von $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$:

$L_1 = I_1 * \omega_1$



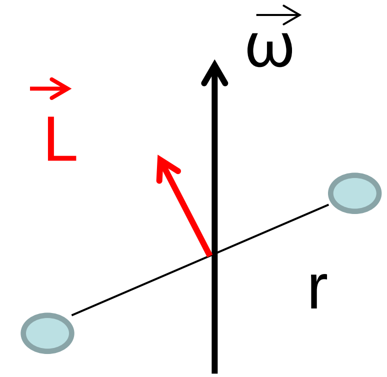
$\vec{\omega}$ – Achse fixiert! mechanisch fest

$L_2 = I_2 * \omega_2$

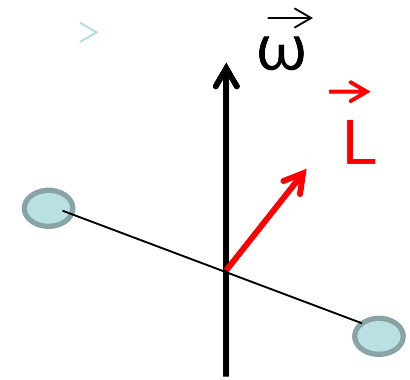
$I_1 \neq I_2 \Rightarrow$

$$\frac{L_1}{L_2} \neq \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Einfacher noch für zwei Massen



Nach Drehung 180 Grad

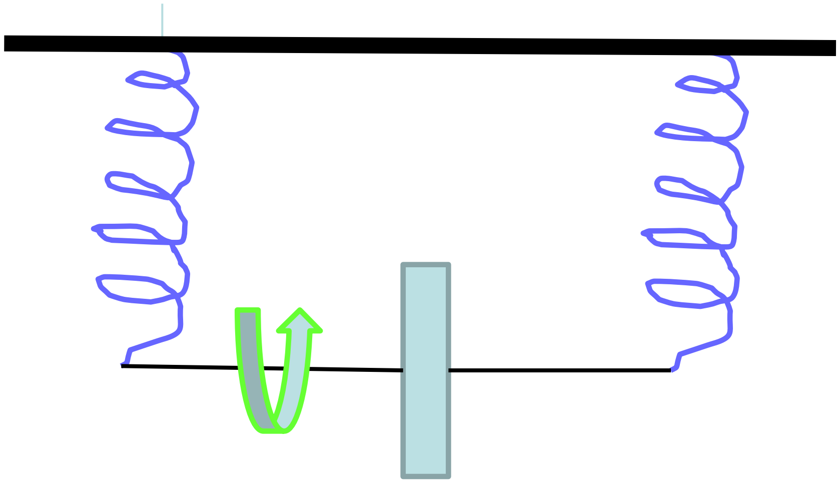


Da $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ $\quad \vec{L} \perp \vec{r}$ $\longrightarrow$ $\vec{L}$ dreht sich ständig

$$\longrightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{T} \neq 0 \quad \longrightarrow$$

Die Lager der Anordnung müssen Drehmomente aufnehmen $\Longrightarrow$ Lauf hat Unwucht!!

Zur besseren Demonstration der Unwucht dient ein Experiment mit frei beweglichen Achsen.



Auswuchten heißt:

$$\Sigma i \, \vec{T}_i = 0$$

Man muss Massen so Anbringen, dass

$$\vec{L} = I * \vec{\omega} \, ; \quad \vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

Präzession

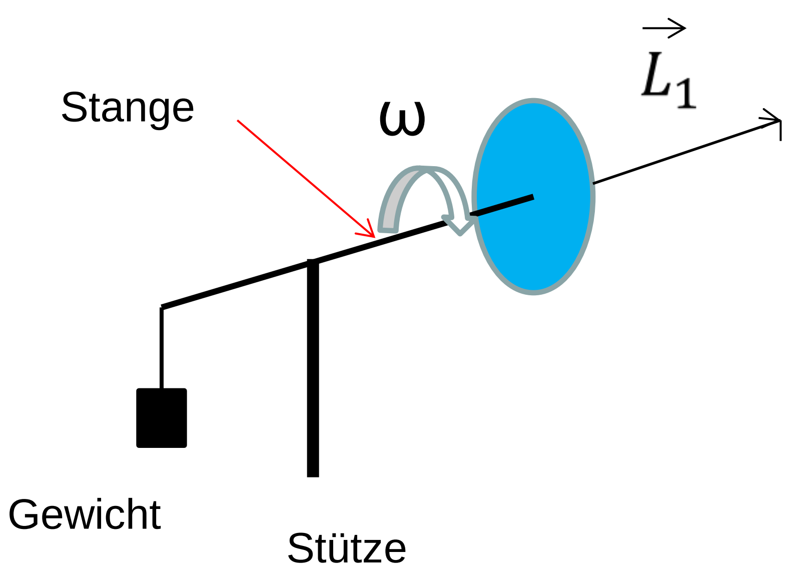
Kreisel unter dem Einfluss von äußeren Drehmomenten

Änderung von $\vec{L}$, wenn $\vec{T}$ wirkt.

$a)$ Richtung von $\vec{L}$ bleibt,dann muß $\vec{T} \parallel \vec{L}$ sein

$b)$Richtung von $\vec{L}$ ändert sich, wenn $\vec{T} \nparallel \vec{L}$

Beispiel Gyroskop:



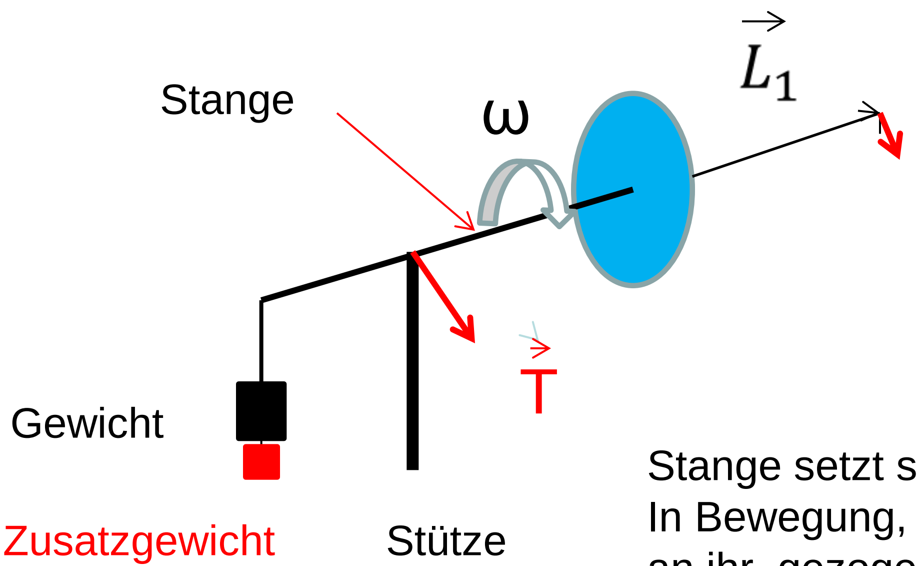
1) $\Sigma\ T_i$ =0

Gleichgewicht:

$\vec{L}$ = konstant

$\Longrightarrow$

Zusätzliches Gewicht erzeugt ein Drehmoment



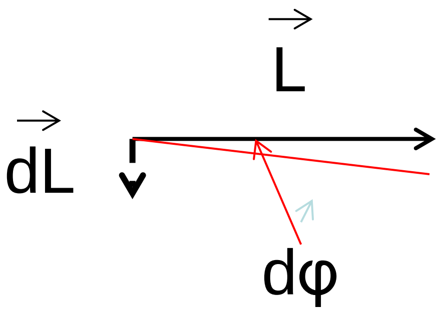
$$\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Stange setzt sich waagrecht
In Bewegung, obwohl senkrecht
an ihr gezogen wird

Wenn Zusatzgewicht ständig vorhanden:
Stange dreht sich ständig mit einer
Präzessionsfrequenz ω_p

Für $\omega_p < \omega$

$$\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad d\vec{L} = \vec{T} \cdot dt$$



$$dL = d\varphi \cdot L \qquad \frac{dL}{dt} = \omega_p \cdot L$$

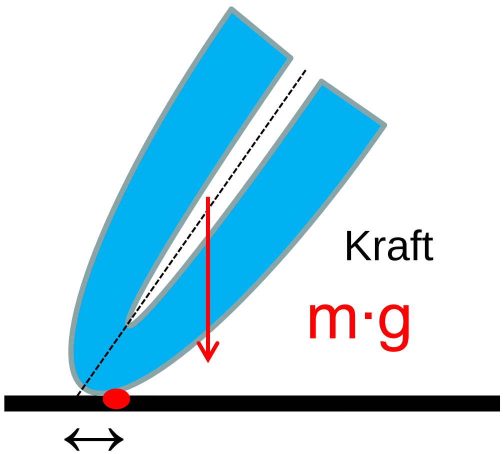
Oder $\vec{T} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}$

$$\boxed{\omega_p = \frac{T}{L}}$$

d.h. ω_p: größer, wenn L kleiner

Schön zu sehen beim Kinderkreisel: Durch Reibung wird L kleiner > ω_p nimmt zu!

Kinderkreisel



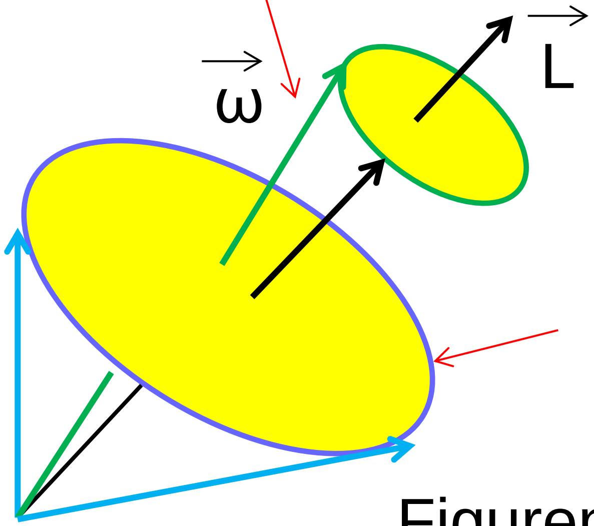
1. Beobachtung: Präzession

2. Beobachtung: Aufrichten

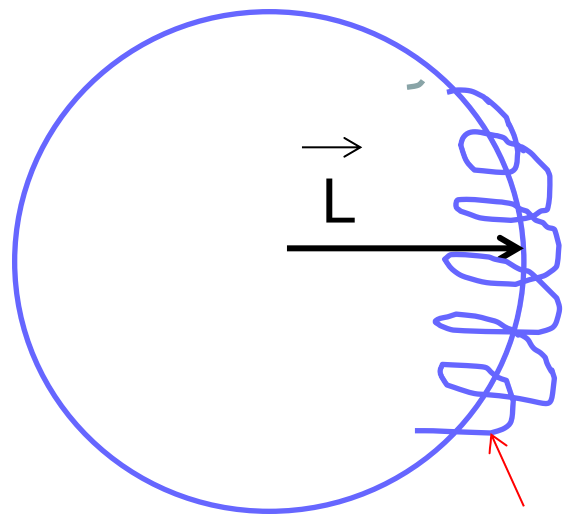
Abrollen von der Achse führt zu Drehmoment um den Schwerpunkt

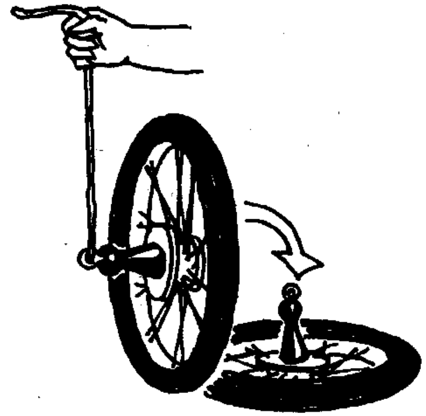
dadurch richtet er sich auf!

Nochmals freie Achsen:

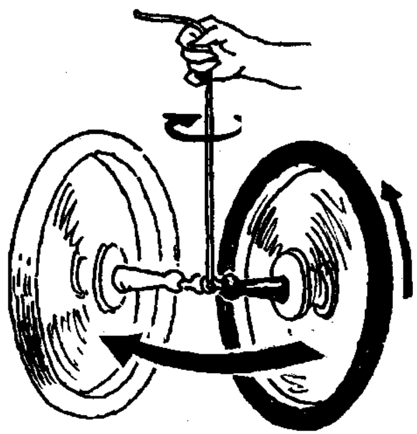


Bei Präzession:





Die Bewegung drehender
Objekte sind bei
Anwendung äußerer
Drehmomente oft
nicht sofort
intuitiv klar.



Aber man kann diese
Bewegungen
sich klar machen,
wie es auch sein muss,
nur unter Verwendung
der Newtonschen
Kraftgleichungen!

Mathematische Beschreibung von L und ω
(wird in der theoretischen Mechanik ausführlich behandelt
und erfordert Kenntnisse der Matrixalgebra):

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} \cdot \omega_x + I_{xy} \cdot \omega_y + I_{xz} \cdot \omega_z \\ I_{yx} \cdot \omega_x + I_{yy} \cdot \omega_y + I_{yz} \cdot \omega_z \\ I_{zx} \cdot \omega_x + I_{zy} \cdot \omega_y + I_{zz} \cdot \omega_z \end{bmatrix}$$