Ähnlichkeitsgesetze und Reynoldsche Zahl:

Großaufbauten der Strömungsphysik können an kleineren Modellen simuliert werden! Alle Längen- und Zeitdimensionen werden auf Einheitsdimensionen L und T normiert und die Geschwindigkeit u in L/T ausgedrückt!

$$t = t' \cdot T, \qquad u = u' \cdot \frac{L}{T}, \qquad p = p'\left(\frac{L^2}{T^2}\right) \cdot \rho$$

$$l = l' \cdot L \qquad \nabla = \frac{\nabla'}{L}, \qquad \Delta = \frac{\Delta'}{L^2}$$

Die gestrichenen Größen sind dimensionslos!

Navier-Stokes:

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\right)\vec{u} = -grad\, p + \rho \cdot \vec{g} + \eta \cdot \vec{u}$$

$\longrightarrow$ ohne $\rho \cdot \vec{g}$

$$\frac{\partial \vec{u'}}{\partial t'} + (\vec{u'} \cdot \nabla') \cdot \vec{u'} = -\nabla \cdot p' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta' \cdot \vec{u'}$$

$$\text{Re} = \frac{\varrho \cdot L^2}{\eta \cdot T} = \frac{\varrho \cdot u' \cdot L}{\eta}$$ = Re: Reynoldsche Zahl

Was steckt hinter der Zahl?

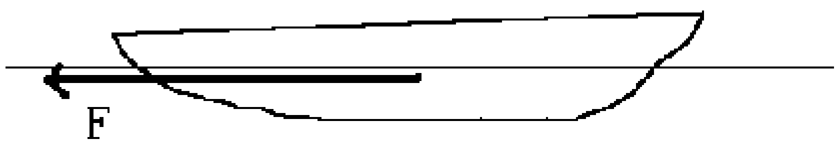
$\frac{\varrho \cdot u' \cdot L}{\eta}$ Erweiterung mit $L^2 u'$: $\frac{\rho \cdot u'^2 \cdot L^3}{\eta \cdot L^2 \cdot u'} = \frac{2 \cdot E_{kin}}{W_{Reibung}}$ =Re

Für zwei Zustände, die die gleiche Re haben, sieht der Fluss „gleich“ aus, skaliert in l‘ (x‘,y‘,z‘) und t‘. Das ist ein wichtiges Resultat, z.B., der Strömungsverlauf um einen Flugzeugflügel kann an einem verkleinerten Modell (z.B. Windtunnel) gemessen werden.

z.B.: Experimentell für Wasserrohre: Re=2300 $\gtrsim 2300 \Rightarrow$ turbulent

$\prec 2300 \Rightarrow$ laminar

Andere Beispiele, um die Richtung zu sehen! Schiff im Wasser:
Frage "Ist es günstiger bzgl. Treibstoffkosten große Schiffe zu bauen?



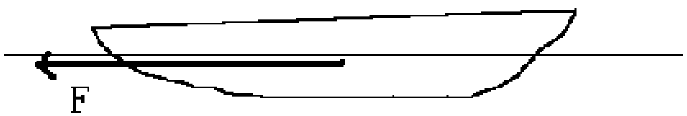
Dimensionbetrachtung

$P = \frac{F}{\rho \cdot u^2 \cdot l^2}$ Druckkoeffizient

Re $= \frac{\rho \cdot u \cdot l}{\eta}$

$$F = \varrho \cdot u^2 \cdot \boxed{l^2}$$

Gewicht W~$\boxed{l^3}$



$$\Rightarrow \frac{F}{W} \sim \frac{1}{l} \Rightarrow$$

große Schiffe sind kostengünstiger

Anderes Beispiel: **Wie viel schneller ist beim Rudern ein Achter im Vergleich zu einem Einer?**

Leistung der Ruderer: E=F*u~n, n=Anzahl der Ruderer

Gewicht der Rudermannschaft: W~n

$$\frac{E}{W} \backsim \frac{\varrho \cdot u^3 \cdot l^2}{\varrho \cdot l^3} = \frac{u^3}{l}$$

hängt nicht explizit von n ab!

l, die Größe des Bootes, maßgebend für die Wasserverdrängung, hängt über $W = \rho \cdot l^3 \sim n$ von n ab.

$$\Rightarrow l^3 \sim n \Rightarrow l \sim \sqrt[3]{n}$$

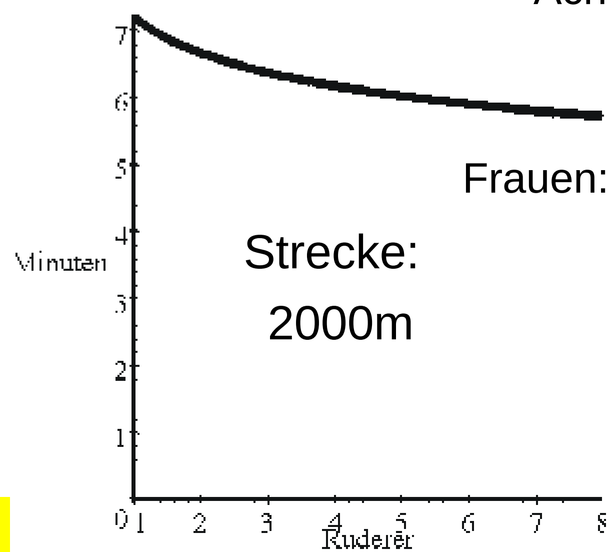
Da E/W nicht von n abhängt, muss $u \sim \sqrt[3]{l} \Rightarrow$

$$u \sim \sqrt[3]{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[9]{n}$$

$$\boxed{\frac{\text{Einer}}{\text{Achter}} = \frac{1}{\sqrt[9]{8}} = .7937}$$

Männer: Min.Sek: Einer: 6.33 Achter:5.19

Frauen: 7.10 5.54



Strecke: 2000m

Im Rennen:

Männer 0.8117

Frauen : 0.82

4. Schwingungen und Wellen

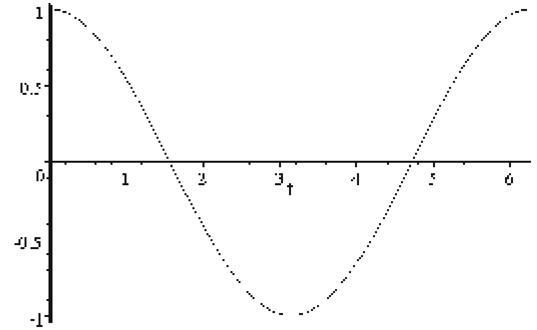
4.1. Freie Schwingungen

a) Translationsschwingungen

$$m \cdot \ddot{x} = -D \cdot x \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$m \cdot \ddot{x}$: Trägheitskraft $D \cdot x$: Rückstellkraft

Lösung:



b) Drehschwingungen

$$I \cdot \ddot{\varphi} = -D^* \cdot \varphi \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{I}}$$

Gedämpfte Schwingungen:

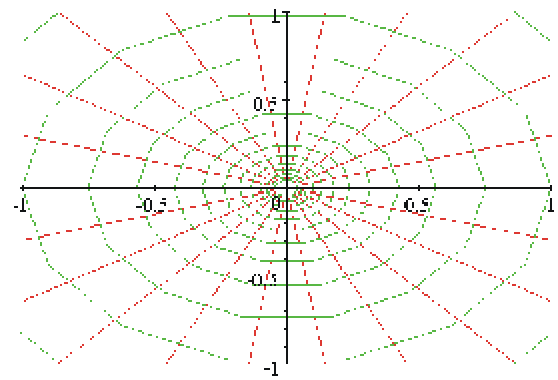
$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot \dot{x} - D \cdot x \quad \text{oder} \quad m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + D \cdot x = 0$$

$k \cdot \dot{x}$ Reibungskraft

Mathematische Struktur : *Homogene, lineare Differentialgleichung*

Lösung mit komplexen Zahlen: $m \cdot \ddot{z} + k \cdot \dot{z} + D \cdot z = 0$

Ansatz: $z = A \cdot e^{i\gamma t}$ γ : komplex



Ableitungen: $\dot{z} = i \cdot \gamma \cdot A \cdot e^{i\gamma t}$

$$\ddot{z} = (i \cdot \gamma)^2 \cdot A \cdot e^{i\gamma t} = -\gamma^2 \cdot A \cdot e^{i\gamma t} \Rightarrow$$

$$-m \cdot \gamma^2 \cdot A \cdot e^{i\gamma t} + i \cdot \gamma \cdot k \cdot A \cdot e^{i\gamma t} + D \cdot A \cdot e^{i\gamma t} = 0$$

daraus die charakteristische Gleichung:

$$-m \cdot \gamma^2 + i \cdot \gamma \cdot k + D = 0$$

oder $\gamma^2 - i \cdot \gamma \cdot k/m - D/m = 0$

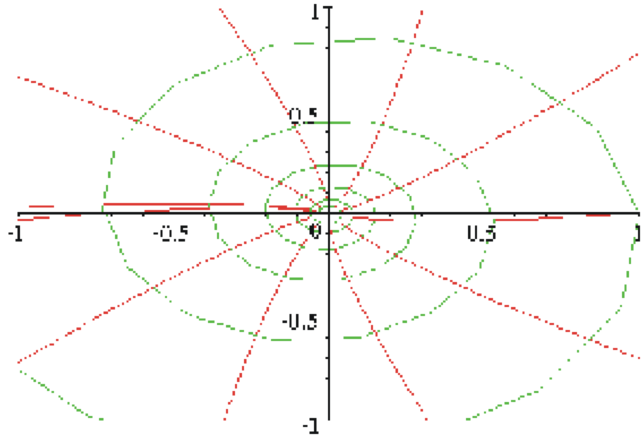
$$\gamma = \frac{1}{2m}\left(ik \pm \sqrt{(-k^2 + 4mD)}\right) = \delta \cdot i \pm \omega \Rightarrow$$

$$z = A \cdot e^{i \cdot (\delta \cdot i \pm \omega)t} = A \cdot e^{-\delta \cdot t} e^{i \cdot \pm \omega t}$$

mit δ

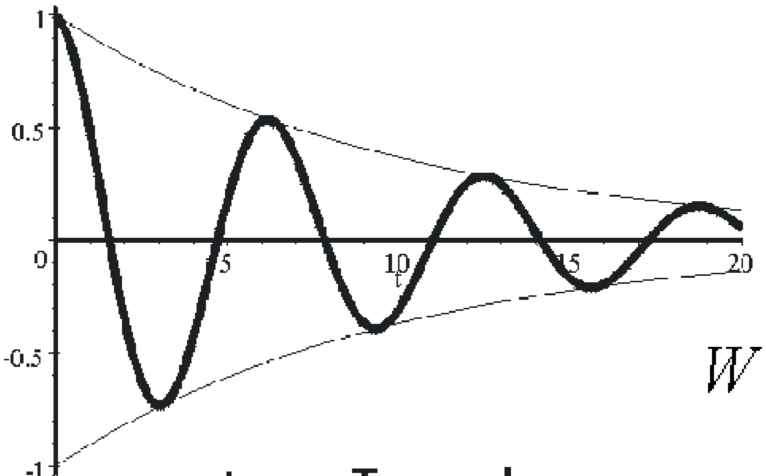
als Dämpfungskonstanten!

$$z = A \cdot e^{i\cdot(\delta\cdot i \pm \omega)t} = A \cdot e^{-\delta\cdot t} e^{i\cdot \pm \omega t}$$



Projektion auf den Realteil:

$$x = x_0 \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \cos \omega t$$



t_1 T t_2

Energie im gedämpften Oszillator:

$$W = W_{kin} + W_{pot} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} D \cdot x^2$$

Pendelt und nimmt gleichmäßig ab

Von $W = \frac{1}{2} D \cdot x_1^2$ bei x $_1(t_1 = 0)$

$W = \frac{1}{2} D \cdot x_2^2$ bei x $_2(t_1 = T)$

$$x_2 = x_0 \cdot e^{-\delta\cdot T} \cdot \cos \omega T \Rightarrow W = \frac{1}{2} D \cdot x_0^2 e^{-2\delta\cdot t}$$

d.h.: die Energie nimmt doppelt so schnell ab wie die Amplitude

Definition eines Gütefaktors einer Anordnung:

$$\frac{2\pi \cdot \text{gespeicherte Energie}}{\text{Energieverlust in einer Periode}} = Q = \frac{2\pi \cdot W}{-\dot{W} \cdot T} = \frac{2\pi \cdot W}{2\delta \cdot W \cdot T} = \frac{\pi}{\delta \cdot T} = \frac{\pi \cdot \omega}{\delta \cdot 2\pi} = \frac{\omega}{2\delta}$$

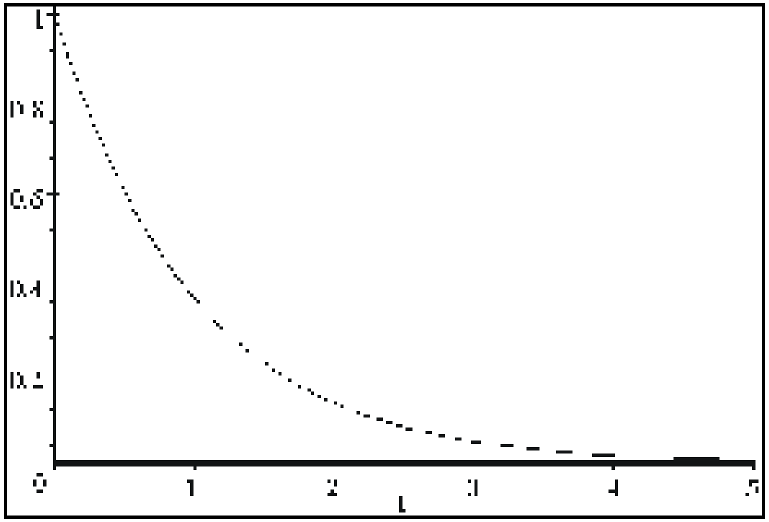
Einfluss der Dämpfung auf die Schwingung:

$$\gamma = \frac{1}{2m}\left(ik \pm \sqrt{(-k^2 + 4mD)}\right)$$

3 Fälle: a) $k^2 \prec D \cdot m$: Schwingfall

b) $k^2 = 4 \cdot D \cdot m$ aperiodischer Grenzfall

c) $k^2 \succ 4 \cdot D \cdot m$ Kriechfall



ω imaginär

System kehrt exponentiell in die Ruhelage zurück, wie b

4.2. Erzwungene Schwingungen

Eine äußere Kraft F

wirkt periodisch auf das schwingungsfähige System ein.
Mathematische Behandlung:

$$m \cdot \ddot{z} + k \cdot \dot{z} + D \cdot z = F_0 \cdot e^{i\omega t}$$

Ansatz für z: $z = A \cdot e^{i(\omega t - \alpha)}$

α : Phasenverschiebung zur äußeren Kraft

gesucht: A und α Ableitungen:

$$\dot{z} = i \cdot \omega \cdot A \cdot e^{i(\omega t - \alpha)}$$

$$\ddot{z} = -\omega^2 \cdot A \cdot e^{i(\omega t - \alpha)} \Rightarrow$$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

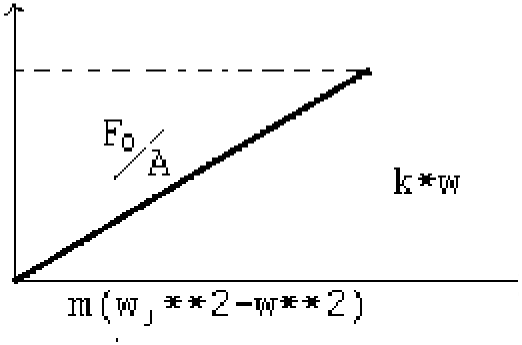
$$-\omega^2 \cdot m \cdot A \cdot e^{i(\omega t - \alpha)} + i \cdot k \cdot \omega \cdot A \cdot e^{i(\omega t - \alpha)} + D \cdot A \cdot e^{i(\omega t - \alpha)} = F_0 \cdot e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 \cdot m \cdot A + i \cdot k \cdot \omega \cdot A + D \cdot A = F_0 \cdot e^{i\alpha}$$

$$m \cdot (\frac{D}{m} - \omega^2) + i \cdot k \cdot \omega = \frac{F_0 \cdot e^{i\alpha}}{A} \Rightarrow$$

$$m(\omega_0^2 - \omega^2) + ik \cdot \omega = \frac{F_0}{A}(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

$$m(\omega_0^2 - \omega^2) + ik \cdot \omega = \frac{F_0}{A}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$



Phasenverschiebung:

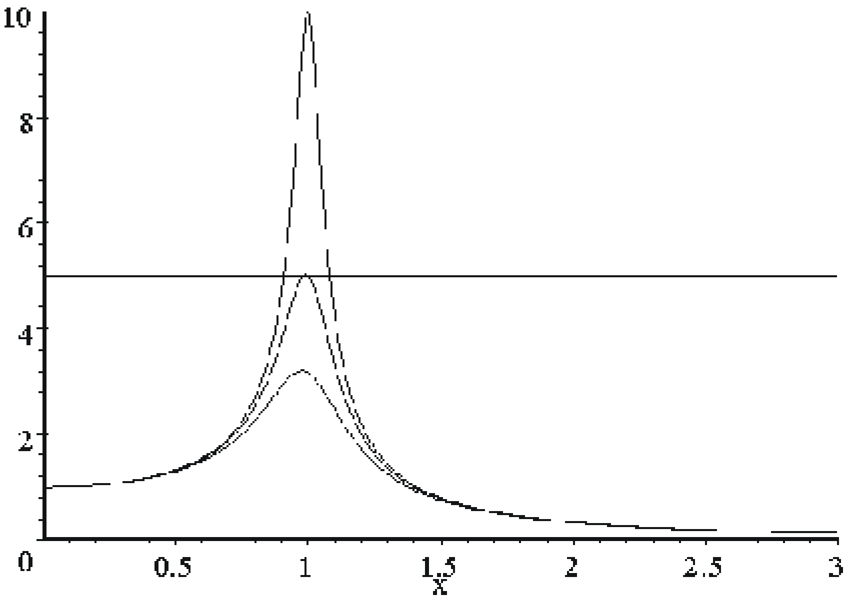
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{k \cdot \omega}{m \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)} \Rightarrow$$

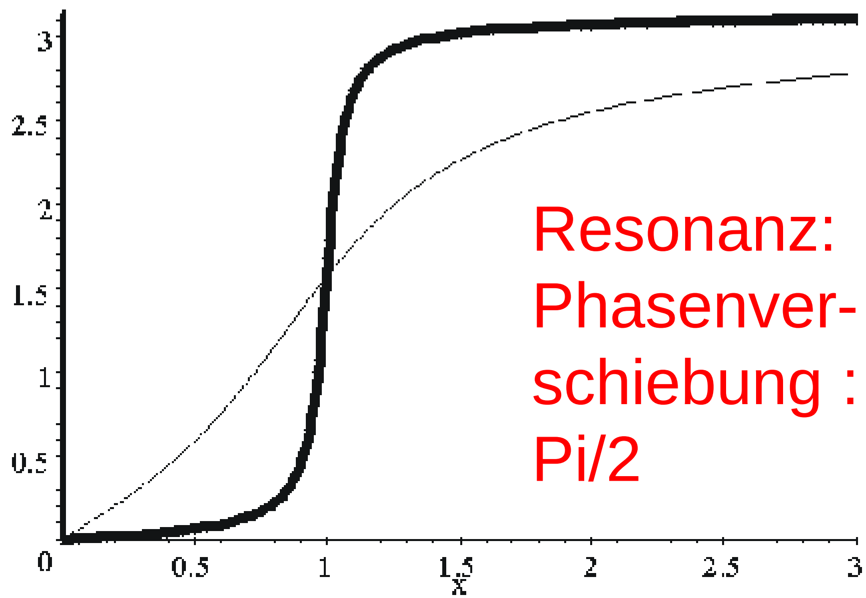
$$\alpha = \arctan \frac{k \cdot \omega}{m \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Amplitude: $\left(\frac{F_0}{A}\right)^2 = m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + k^2 \cdot \omega^2$

Physikalische Lösung: x=A $\cdot \cos(\omega t - \alpha)$

Diskussion:





Resonanz:
Phasenver-
schiebung :
Pi/2