.20.1

UNIVERSITÄT BONN
Physikalisches Institut

Entwicklung und Test eines Simulators der Teilchenbewegung in der Bonner 3.5 GeV-Elektronen-Stretcher-Anlage ELSA

von
Johannes Wenzel

A simulation program for the particle behaviour in the Electron Stretcher Accelerator ELSA has been developed and successfully tested. It covers physical effects most relevant for the extraction process at ELSA. By choosing effective simulation algorithms it is suitable for on-line usage. The simulation program has a graphic user interface and an interface for data exchange with the ELSA control system. First applications of the program give hints to a better understanding of the extraction process and how to optimize it.

Post address:
Nussallee 12
53115 Bonn
Germany

BONN-IR-94-13
Bonn University
November 1994
ISSN-0172-8741

UNIVERSITÄT BONN
Physikalisches Institut

Entwicklung und Test eines Simulators der Teilchenbewegung in der Bonner 3.5 GeV-Elektronen-Stretcher-Anlage ELSA

von
Johannes Wenzel

Dieser Forschungsbericht wurde als Dissertation von der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn angenommen.

Angenommen am:	9. November 1994
Referent:	Prof. Dr. D. Husmann
Korreferent:	Prof. Dr. W. Schwille

Entwicklung und Test eines Simulators der Teilchenbewegung in der Bonner 3.5 GeV-Elektronen-Stretcher-Anlage ELSA

Inaugural-Dissertation

zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu Bonn

vorgelegt von
Johannes Wenzel
aus Bonn

Bonn 1994

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn

Referent: Prof. Dr. D. Husmann
Korreferent: Prof. Dr. W. Schwille
Tag der Promotion: 9. November 1994

Inhalt

Einleitung **2**

1 Anforderungen an den Simulator **4**

1.1 Modell der Teilchenbewegung im Beschleuniger 4

1.2 Auswahl des Simulationsalgorithmus 10

1.3 Implementierung 14

2 Simulationsverfahren **16**

2.1 Programmablauf 16

2.2 Einteilchenverhalten 18

2.3 Vielteilchenverhalten 42

2.4 Rampen 46

2.5 Generierung von Meßgrößen 49

3 Realisierung des Simulators **55**

3.1 Verwendete Entwicklungswerkzeuge und Standards 55

3.2 Programmaufbau 56

3.3 Anbindung an das Kontrollsystem 58

4 Simulationsergebnisse **62**

4.1 Vergleich mit anderen Simulationsprogrammen 62

4.2 Vergleich mit Meßergebnissen 65

4.3 Untersuchungen zur Extraktionseffizienz bei **ELSA** 75

Zusammenfassung **92**

A Anhang **93**

A.1 Fokker-Planck-Gleichung 93

A.2 Feldvektor für verschiedene optische Elemente 93

A.3 Closed-Orbit-Beule mit vier Korrektoren 95

A.4 Lineare Erzeugende und Transfermatrix für optische Elemente 96

A.5 Longitudinale Teilchenbewegung 99

A.6 Modell-Hamiltonfunktion 102

A.7 Frequenzspektrum einer Teilchenverteilung 108

A.8 Technischer Anhang zum Simulator 110

Einleitung

Am Physikalischen Institut der Universität Bonn werden zwei Beschleunigeranlagen betrieben. Seit 1967 arbeitet das 2.5 GeV-Elektronen-Synchrotron [Alt68] und seit 1987 die 3.5 GeV Elektronen-Stretcher-Anlage **ELSA** [Alt85] [Husmann87] [Husmann88] [Schwille]. Das Synchrotron, das Teilchen im 50 Hz-Rhythmus beschleunigt, kann Elektronen annähernd konstanter Energie während eines Zyklus nur für kurze Zeit zur Verfügung stellen. Es wird als Injektionsmaschine für **ELSA** genutzt.[1] In **ELSA** werden die injizierten Teilchen gespeichert und gleichmäßig dem Experiment zugeführt. Der kurze Teilchenpuls des Synchrotrons wird dabei gestreckt ("Stretcher"), so daß dem Experiment ein zeitlich annähernd konstanter Teilchenstrom zur Verfügung gestellt werden kann. Da im allgemeinen die maximale Ereignisrate im Experiment begrenzt ist, können, bei gleicher Teilchenzahl, in vorgegebener Zeit aus einem gleichmäßigen Teilchenstrom mehr Ereignisse detektiert werden, als aus einem Teilchenpuls.

Für den Erfolg eines Experiments, das den internen oder externen Strahl eines Beschleunigers nutzt, ist es wesentlich, daß die Eigenschaften des Teilchenstrahls auf die Anforderungen dieses Experiments abgestimmt sind. Zunächst muß der Strahl die richtige Energie haben, um die gewünschten Teilchenreaktionen erzeugen zu können. Er muß mit einer geeigneten Intensität zur Verfügung gestellt werden, um die Teilchendetektoren des Experiments optimal auszulasten. Wie beschrieben soll die Teilchenrate im Strahls möglichst konstant sein. Strahlquerschnitt und Energieabweichung des dem Experiment zur Verfügung gestellten Strahls müssen möglichst klein sein, um die kinematischen Anfangsbedingungen der Teilchenreaktion genau festlegen zu können.

Die verschiedenen Experimente an **ELSA** stellen unterschiedliche Anforderungen bezüglich der oben genannten Kriterien. Betriebszustände des Beschleunigers werden danach in drei Gruppen zusammengefaßt.

Im *Stretchermode* wird in festem Zeitraster injiziert, zwischen den Injektionen wird der Strahl dann gleichmäßig aus **ELSA** extrahiert und dem Experiment zugeführt. In diesem Betriebsmode können Teilchenströme bis zu 100 nA im externen Strahl erreicht werden. Die Energie ist zur Zeit jedoch auf 1.6 GeV beschränkt, da Teilchen höherer Energie aus technischen Gründen nicht vom Synchrotron nach **ELSA** transferiert werden können. Von den Bonner Mittelenergiephysikexperimenten ELAN, PHOENICS und SAPHIR [Husmann87] sind Nutzer dieses Betriebsmodes die Experimente PHOENICS und ELAN.

Im *Akkumulationsmode* werden mehrere Schüsse aus dem Synchrotron akkumuliert. So kann ein Teilchenstrom bis zu 250 mA bei 1.2 GeV in **ELSA** erreicht werden. Hohe Teilchenströme werden unter anderem von Experimenten mit Synchrotronlicht an **ELSA** genutzt. Die von diesen Experimenten benötigten hohen Teilchenenergien werden durch eine Nachbeschleunigung des akkumulierten Elektronenstrahls erreicht, die Lebensdauer eines Teilchenstrahls von 60 mA bei einer Energie von 2.3 GeV liegt im Bereich von 60 min.

Im *Nachbeschleunigungsmode* werden injizierte Teilchen auf Energien bis zu 3.5 GeV beschleunigt. Sie werden sodann, wie beim *Stretchermode* beschrieben, langsam extrahiert. Auf diese Weise können dem Experiment Teilchen hoher Energie zur Verfügung gestellt werden, durch die zur Injektion und Nachbeschleunigung benötigte Zeit ist jedoch die erreichbare Rate und Gleichförmigkeit des Teilchenstroms beschränkt. Nutzer dieses Betriebsmodes sind die Experimente SAPHIR und zukünftig ELAN.

Jeder beschriebene Betriebsmode verläuft nach einem sich wiederholenden Zeitraster, wobei sich ein Zyklus jeweils aus drei Phasen zusammensetzt. In der Injektionsphase werden Teilchen vom Synchrotron nach **ELSA** transferiert. Dieser Transfer soll möglichst effizient sein und die Teilchen gleichmäßig und mit möglichst kleinem Strahlquerschnitt entlang des Umfangs von **ELSA** verteilen. Die Vorbereitungsphase leitet, möglichst ohne Strahlverluste, zur nachfolgenden Verwendung des Teilchenstrahls durch

[1] Zur Zeit werden, bis auf den Test von Detektoren, keine eigenen Experimente am Synchrotron betrieben.

das Experiment über. In der anschließenden Nutzungsphase soll der Strahl gleichmäßig und mit guter Strahlqualität dem Experiment zur Verfügung gestellt werden.

Das Betriebsverhalten von **ELSA** ist bestimmt durch die Teilcheninjektion vom Synchrotron und die Wahl der technischen Betriebsparameter von **ELSA** während aller Phasen des Beschleunigungszyklus. Auf Grund der Vielzahl von verfügbaren Betriebsparametern kann eine Einstellung, die die geschilderten Anforderungen optimal erfüllt, nicht rein empirisch gefunden werden. Vielmehr muß sich die Einstellung des Beschleunigers an einem physikalischen Modell der Teilchenbewegung orientieren, das die Wirkung einer Parametereinstellung auf das Teilchenverhalten voraussagen kann. Aus dem Modell können diejenigen Werte der Parameter ermittelt werden, die für die gestellten Anforderungen optimal sind. Ziel der Einstellarbeit am Beschleuniger ist es nun, diese optimalen Parameterwerte zur Anwendung zu bringen.

Auf Grund von apparativen Ungenauigkeiten kann die Einstellung des Beschleunigers nie allein anhand der Beobachtung der eingestellten Gerätegrößen erfolgen. Vielmehr ist eine Diagnose durch Messungen am Strahl selber notwendig. Diese Diagnosemessungen können in bezug auf das physikalische Modell bewertet werden und geben Aufschluß darüber, ob die gewünschte optimale Einstellung gegeben ist.

Sowohl zur Ermittlung optimaler Betriebsparameter anhand eines physikalischen Modells als auch zur Bewertung der Diagnosemessungen müssen die für Voraussagen aus dem Modell notwendigen Berechnungen in einfacher Weise durchführbar sein. Dies kann mit Hilfe eines Simulators der Teilchenbewegung im Beschleuniger geschehen.

Aus dem Gesagten ergeben sich drei Komponenten zur Einstellung des Beschleunigers. Die *Kontrolle* erlaubt die Einstellung der Betriebsparameter des Beschleunigers und überwacht die technische Funktion der Geräte des Beschleunigers. Mit Hilfe der *Diagnose* können Messungen am Strahl selber gemacht werden, um Aufschluß über die aktuellen Strahlparameter zu erhalten. Die *Simulation* schlägt optimale Betriebsparameter vor, eine Verifikation geschieht anhand von Diagnosemessungen. Dabei erfolgt die Optimierung der Betriebsparameter des Beschleunigers jeweils durch Vergleich der Ergebnisse der verschiedenen Komponenten. Um einen unmittelbaren Vergleich dieser Ergebnisse zu ermöglichen, wurde für **ELSA** eine Vereinheitlichung der Komponenten angestrebt. Sie ist für die Komponenten Kontrolle und Diagnose im neuen **ELSA**-Kontrollsystem [Goetz94][Picard94] verwirklicht. Dem Benutzer wird dabei eine an physikalischen Parametern orientierte Darstellung des Betriebszustands des Beschleunigers geboten. Diese, im neuen Kontrollsystem verwirklichte, physikalische "Sichtweise" ist Voraussetzung der Vereinheitlichung der genannten Komponenten, da jeweils der physikalische Gehalt der Aussagen von Kontrolle, Diagnose und Simulation vom Benutzer verglichen werden muß.

Ein sich in dieses Konzept einfügender Simulator muß alle relevanten Aspekte der Teilchenbewegung für die in **ELSA** verwendeten Betriebsmoden erfassen. Er muß, um während des Maschinenbetriebs genutzt werden zu können, leicht bedienbar sein und schnelle Antwortzeiten haben. Es muß in einfacher Weise ein Datenaustausch zwischen dem Simulator und der Kontrolle möglich sein, und die Ergebnisse der Simulation müssen in einer Form dargestellt werden, die mit Resultaten von Diagnosemessungen unmittelbar vergleichbar ist. Bislang verfügbare Simulatoren der Teilchenbewegung erfüllen diese Bedingung nicht oder nur unzureichend.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde ein Simulator der Teilchenbewegung im Beschleuniger entwickelt. Der Simulator ist auf die Anforderungen bei **ELSA** abgestimmt, kann jedoch auch für andere Beschleuniger genutzt werden. Im folgenden werden die Anforderungen an den Simulator näher geschildert. Hiernach wird das verwendete Simulationsverfahren beschrieben. Die Verifikation der Simulationsergebnisse erfolgt anhand von Berechnungen und Messungen für den Beschleuniger **ELSA** und das Protonen-Synchrotron **COSY** (**Co**oler-**Sy**nchrotron) des Forschungszentrums Jülich. Erste Resultate werden vorgestellt.

Kapitel 1

Anforderungen an den Simulator

Die im Beschleuniger umlaufenden Teilchen bilden ein komplexes Vielteilchensystem, bei dem die Bewegung der einzelnen Teilchen durch die elektromagnetische Wechselwirkung bestimmt wird. Die Bewegungsgleichungen aller Teilchen sind jedoch weder analytisch lösbar noch numerisch in endlicher Zeit berechenbar. Umgekehrt ist für den Betrieb des Beschleunigers nicht die Kenntnis jeder einzelnen Trajektorie von Belang. Es sind vielmehr beim Beschleuniger einzelne, jeweils das ganze oder einen nicht verschwindenden Anteil des umlaufenden Ensembles betreffende, physikalische Effekte, die seine Leistungsfähigkeit bestimmen. Darüber hinaus lassen auch mögliche diagnostische Messungen am Beschleuniger nur gewisse Sichtweisen auf das Teilchenverhalten zu, so daß sich eine Simulation der Teilchenbewegung auf die Voraussage meßbarer Größen beschränken kann.

Die Erstellung eines Simulators der Teilchenbewegung im Beschleuniger erfordert eine Klassifikation von physikalischen Effekten in bezug auf ihre Bedeutung für das Betriebsverhalten und ihre Auswirkung auf Diagnosemessungen, um in begrenzter Zeit auch eine Realisierung des Projekts zu ermöglichen. Die Effekte müssen dabei, um sie in einem Simulationsprogramm erfassen zu können, durch ein gemeinsames physikalisches Modell beschrieben werden. Denn nur eine Beschreibung aus einem gemeinsamen Ansatz heraus kann in konsistenter Weise durch einen Berechnungsalgorithmus erfaßt werden.

Jedes physikalische Modell ist dabei in seiner Gültigkeit auf eine gewisse Variationsbreite von Randbedingungen beschränkt und beschreibt nur eine bestimmte Gruppe von physikalischen Effekten hinreichend genau. Das dem Simulator zugrundegelegte Modell muß daher so gewählt werden, daß es erlaubt, die bedeutsamen Effekte aus einem gemeinsamen Ansatz zu beschreiben und so Voraussagen über die meßbaren Größen abzuleiten.

Nach Festlegung des physikalischen Modells zur Beschreibung der relevanten Effekte kann ein Simulationsalgorithmus ausgewählt werden. Für die Auswahl des Simulationsalgorithmus ist neben physikalischen Fragestellungen auch die angestrebte Anwendungsart des Simulators von Bedeutung.

Nach Auswahl des Simulationsalgorithmus muß über die Art der Implementierung entschieden werden. Dies umfaßt Fragen der zu verwendenden Hardware, der Art der Softwarecodierung und der Gestaltung der Schnittstellen zum Benutzer bzw. zu anderen Programmen.

Zunächst soll ein Modellansatz zur Beschreibung der relevanten Effekte im Beschleuniger dargestellt werden. Dabei wird im eindimensionalen Beispiel ausgeführt, wie die einzelnen Effekte sich in dieses Modell einfügen. Ziel dieser Darstellung ist es, zu zeigen, daß der gewählte Ansatz tatsächlich zur konsistenten Beschreibung der relevanten Vorgänge im Beschleuniger geeignet ist. Danach wird die Auswahl des Simulationsalgorithmus begründet. Schließlich werden Fragen der Implementierung erörtert.

1.1 Modell der Teilchenbewegung im Beschleuniger

Da das Verhalten aller einzelnen im Beschleuniger umlaufenden Teilchen nicht berechenbar ist, wird eine Teilchenverteilungsfunktion $\rho(x, p, t)$ betrachtet, die die Dichte von Teilchen mit Impuls p am Ort x zur Zeit t angibt. Dabei ist $\int \rho \, dx dp = N$ die Teilchenzahl im Beschleuniger. Der erwartete Wert einer

Meßgröße $M(x,p)$ ergibt sich zu:

$$< M > (t) = \frac{1}{N} \int M(x,p)\rho(x,p,t)\ dx\ dp.$$

Um Voraussagen über Meßgrößen machen zu können, muß die zeitliche Entwicklung der Verteilungsfunktion bekannt sein.

Gesucht ist also eine kinetische Gleichung. Sie kann allgemein angegeben werden durch (siehe z.B.: [Duder], S. 35):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = A(x,p;\rho(x,p,t)), \tag{1.1}$$

wobei A ein allgemeiner Operator ist, der die auf die Teilchenverteilung wirkenden Einflüsse wiedergibt.

Auf Grund der besonderen, bei Beschleunigern im Energiebereich von **ELSA** vorliegenden, physikalischen Gegebenheiten kann der Operator A in zwei Anteile unterschiedlicher Stärke aufgespalten werden:

$$A = A_{ham} + A_{stoch}\,,$$

mit $A_{ham} \gg A_{stoch}$. Dabei charakterisiert A_{ham} den hamiltonischen Anteil der Teilchenbewegung, der durch die äußeren und vom Strahl erzeugten Felder auf die Teilchenbewegung wirkt. Der Term A_{stoch} stellt den stochastischen Anteil dar, der zum Beispiel durch Strahlungseffekte verursacht wird. Bei Beschleunigern im Energiebereich von **ELSA** ist der Einfluß dieses Effekts auf die Teilchenbewegung jedoch klein gegen den Einfluß der äußeren Felder. Daher kann mit dieser Aufspaltung die Gleichung (1.1) sukzessive zunächst für A_{ham}, dann für A_{stoch} gelöst werden.

1.1.1 Hamiltonischer Anteil der Bewegung

Der hamiltonische Anteil der Teilchenbewegung läßt sich durch Angabe einer Hamiltonfunktion $H(x,p,\rho,t)$ beschreiben. Die Hamiltonfunktion H läßt sich wiederum aufspalten in H_{ext} und H_{selbst}, wobei H_{ext} durch die äußeren Magnetfelder vorgegeben ist und nicht von der Verteilungsfunktion abhängt, $\frac{\partial H_{ext}}{\partial \rho} = 0$, während H_{selbst} auf die Wechselwirkung der Strahlteilchen untereinander oder vermittels der Kammerwand zurückgeht: $\lim_{N\to 0} H_{selbst} = 0$. Im Beschleuniger ist H_{selbst} für kleine Ströme vernachlässigbar. Sein Einfluß auf die zeitliche Entwicklung der Teilchenverteilung kann als Störung zu der durch H_{ext} vorgegebenen Teilchenbewegung behandelt werden (siehe z. B.: [Laclare]).

Zunächst ist also H_{ext} zu betrachten. Dieser Teil des Modells stellt die Beschreibung des Einteilchenverhaltens dar, während H_{selbst} und A_{stoch} nur für Teilchenverteilungen relevant sind. Das Einteilchenverhalten wird getrennt berechnet und damit von der weiteren Problemlösung separiert. Der hamiltonische Anteil der Bewegung ist (siehe z.B.: [Bryant], S. 335 ff.):

$$\begin{aligned} A_{ham} &= \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial p} \\ &=: \{H,\rho\}\,, \end{aligned}$$

und es folgt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{H,\rho\}\,.$$

Dies entspricht der Vlasov-Gleichung, mit deren Hilfe die zeitliche Entwicklung von Teilchenverteilungen in Abwesenheit von stochastischen Kräften beschrieben werden kann.

Wie sich aus der Vlasov-Gleichung ergibt, folgt die zeitliche Entwicklung von ρ dabei der zeitlichen Entwicklung der Einzeltrajektorien. Durch Lösung der Bewegungsgleichungen für $x(t),\ p(t)$ läßt sich demnach die zeitliche Entwicklung von ρ direkt angeben: Es sei die Dichtefunktion zur Zeit $t = 0$ gegeben. Ferner bewege sich der Ort $(x_0,\ p_0)$ im hamiltonischen Fluß in der Zeit t zu $(x,\ p)$. Dann ist die Teilchendichte an $(x,\ p)$ zur Zeit t gleich derjenigen an $(x_0,\ p_0)$ zur Zeit $t = 0$, also:

$$\rho(x,\ p,\ t) = \rho(x_0,\ p_0\ ,0).$$

Eine besondere Vereinfachung ergibt sich, falls x zyklische Koordinate ist. Dann ist für jede Teilchenverteilung, die nur vom Impuls p abhängt, $A_{ham} = 0$ und somit $\rho = \rho(p)$ zeitunabhängig:

$$\rho(p,t) = \rho(p,0),$$

und es folgt $A_{ham}(\rho(p,t)) \equiv 0$.

Somit kann durch Wahl eines Koordinatensystems, in dem x zyklisch ist, der Anteil von A_{ham} in der kinetischen Gleichung (1.1) eliminiert werden und es verbleibt nur noch der Anteil $A_{stoch}(p, \rho(p)) \neq 0$.

Die Hamiltonfunktion H_{ext} im Beschleuniger gibt den Einfluß der externen Magnetfelder auf die Teilchenbewegung wieder. Da diese Felder in der Regel die Teilchen über lange Zeit stabil im Beschleuniger halten sollen, wirken sie insgesamt fokussierend: die Teilchen schwingen um eine Gleichgewichtsbahn. Das Verhalten der Teilchen in der Nähe der Gleichgewichtsbahn wird durch den linearen Anteil H_{lin} von H_{ext} beschrieben. Der lineare Anteil von H_{ext} ergibt sich bei Potenzreihenentwicklung um die Gleichgewichtsbahn bis zu Termen zweiter Ordnung in Ort und Impuls. Die weiteren Terme der Hamiltonfunktion werden im Anteil H_{nl} zusammengefaßt. Die Hamiltonfunktion H_{ext} spaltet damit auf in:

$$H_{ext} = H_{lin} + H_{nl}.$$

Dabei kann im Beschleuniger in der Nähe der Gleichgewichtsbahn von $H_{nl} \ll H_{lin}$ ausgegangen werden. Es ist daher gerechtfertigt, zunächst den durch H_{lin} induzierten Anteil der Bewegung zu betrachten und danach den Einfluß von H_{nl} hierzu als Störung aufzufassen.

Linearer Anteil der Hamiltonfunktion

Die durch H_{lin} beschriebene Bewegung ist eine Schwingung um die Gleichgewichtsbahn. Die zeitlich gemittelte Frequenz der Schwingung ω hängt dabei nicht von den Anfangskoordinaten x_0, p_0 ab. Bei einem Kreisbeschleuniger ist ein umlaufendes Teilchen an einer festen Ringposition in regelmäßigen Zeitabständen zu beobachten. In Abbildung 1.1 ist an einem festen Ort des Beschleunigers bei aufeinanderfolgenden Umläufen eines Teilchens $x(nT)$, $p(nT)$ aufgetragen, wobei T die Umlaufzeit und n die Nummer des Umlaufs ist.

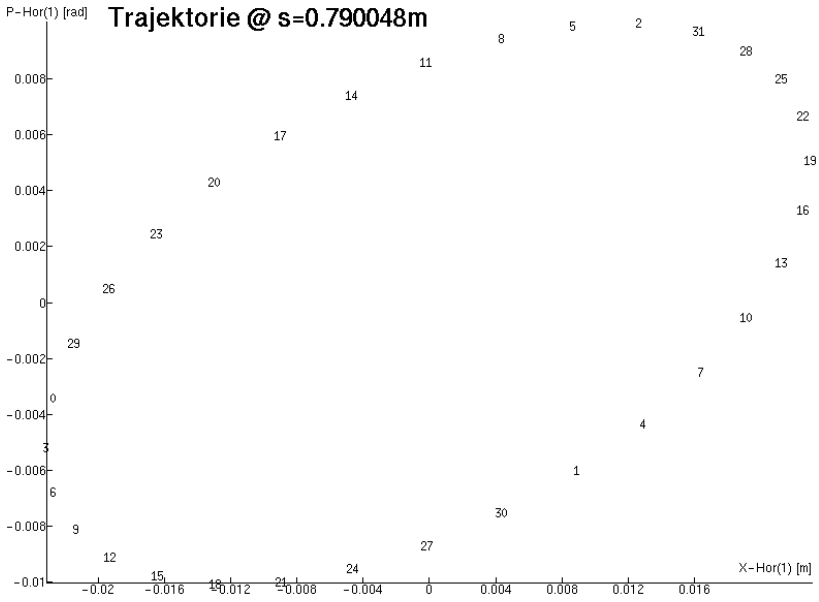


Abbildung 1.1: Trajektorien im linearen Phasenraum

Am Ort der Gleichgewichtsbahn selber findet keine Schwingung statt, ein Teilchen kehrt bei aufeinanderfolgenden Umläufen immer zum gleichen Punkt des Phasenraums zurück. Der Ort der Gleichgewichtsbahn im Phasenraum ist damit ein sogenannter *Fixpunkt*.

Nichtlinearer Anteil der Hamiltonfunktion

Der nichtlineare Anteil von H_{ext} ist:

$$H_{nl} = H_{ext} - H_{lin}.$$

Im linearen Fall schwingen die Teilchen im zeitlichen Mittel in einer Phasenraumdimension mit konstanter Frequenz ω um die Gleichgewichtsbahn. Durch H_{nl} wird die mittlere Schwingungsfrequenz abhängig von den Anfangsbedingungen der Teilchentrajektorie $\omega = \omega(x_0, p_0)$.

Dies führt zu einer Verschmierung der Teilchenverteilung im Phasenraum. Dicht benachbarte Teilchen folgen zwar dicht benachbarten Teilchenbahnen, jedoch mit unterschiedlicher Frequenz ω, so daß die Verteilung insgesamt auseinandergezogen wird. Das von der Teilchenverteilung eingenommene Phasenraumvolumen ändert sich dabei nicht. Sind die Teilchenbahnen geschlossen, werden die Teilchen verschiedener Umlaufgeschwindigkeiten jedoch mit der Zeit spiralförmig entlang der Bahnen im Phasenraum aufgereiht. Dadurch ergibt sich über lange Zeiten eine Verteilung, die auf makroskopischem Maßstab als Gleichverteilung der Teilchen entlang der Bahnen wirkt. Diese sogenannte Filamentation der Teilchenverteilung zeigt Abbildung 1.2. Die charakteristische Zeit bis zum Erreichen der Gleichverteilung, die von der Frequenzverteilung innerhalb der Teilchenverteilung abhängt, heißt Filamentationszeit.

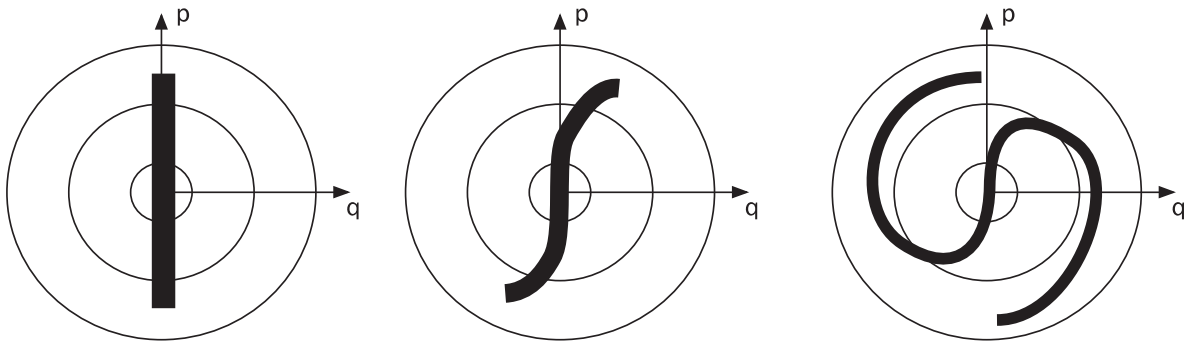


Abbildung 1.2: Filamentation im nichtlinearen Phasenraum

Ist für ein (x_0, p_0) die Bedingung:

$$n\omega(x_0,\ p_0) = k\ \omega_0, \tag{1.2}$$

wobei $n,\ k$ ganzzahlig und ω_0 die Umlauffrequenz ist, erfüllt, so kann sich die Wirkung von H_{nl} auf die Teilchenbahn über viele Umläufe aufsummieren, was zu einer qualitativen Veränderung der Teilchenbahn führt.

Diese Änderung der Teilchenbahn ist durch das Auftreten von neuen Fixpunkten im Phasenraum gekennzeichnet, die jeweils in n-facher Multiplizität vorliegen. Ein Teilchen durchläuft dabei in n aufeinanderfolgenden Umläufen jeden Fixpunkt, um beim $n+1$-ten Umlauf wieder auf den Ausgangspunkt zu fallen.

In der Nähe des Fixpunkts kann die Teilchenbewegung dabei entweder gebunden (*parabolischer Fixpunkt*) oder ungebunden (*hyperbolischer Fixpunkt*) sein. Die die Teilchentrajektorie deformierende Wirkung eines Fixpunkts ist jedoch in der Regel auf einen bestimmten Bereich des Phasenraums beschränkt. Außerhalb dieses Bereichs bleibt die durch H_{lin} gegebene Teilchenbahn weitgehend erhalten. Die Grenzfläche im Phasenraum zwischen Fixpunktbereich und linear dominiertem Bereich heißt Separatrix.

Da die Menge der rationalen Zahlen dicht in der Menge der reellen Zahlen liegt, ist eine Resonanzbedingung (1.2) für fast alle Anfangswerte von (x_0, p_0) erfüllt. Jedoch kommt es zur Ausbildung von Fixpunkten nur dann, wenn die Anregung der jeweiligen Resonanz eine bestimmte Stärke überschreitet. Für $H_{nl} \ll H_{lin}$ treten nur wenige Resonanzen hervor. In Abbildung 1.3 ist das Hervortreten von Resonanzen im Phasenraum durch Anwachsen von H_{nl} dargestellt.

Jedes Auftreten einer Resonanz ist mit der Existenz einer dünnen chaotischen Schicht im Phasenraum um die Separatrix verbunden (siehe z.B. [Licht] S.169 ff.). Die chaotische Schicht nimmt normalerweise nur einen verschwindenden Teil des Phasenraumvolumens ein und kann daher bei der Berechnung von Meßgrößen vernachlässigt werden. Liegen jedoch mehrere Resonanzen im Phasenraum dicht beieinander,

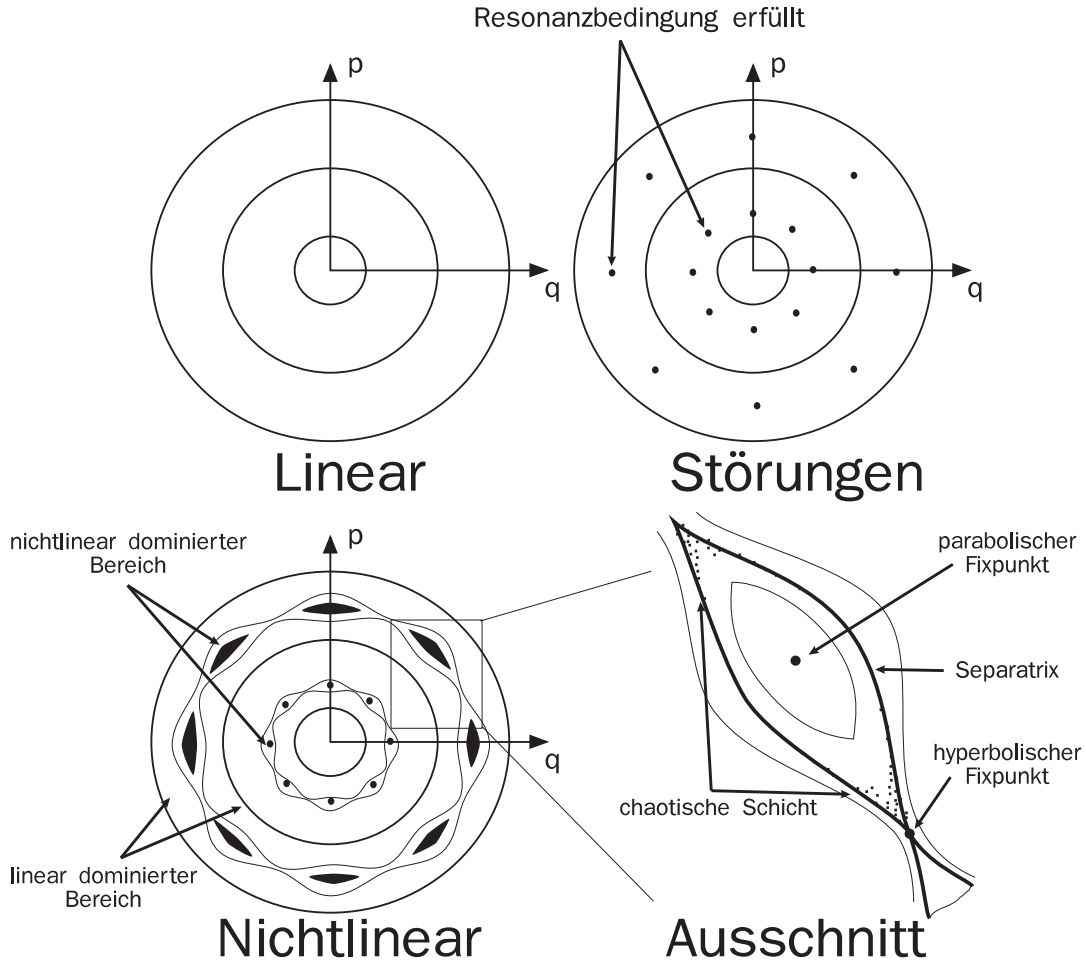


Abbildung 1.3: Trajektorien im nichtlinearen Phasenraum

so kann das von chaotischer Teilchenbewegung beherrschte Phasenraumvolumen anwachsen, so daß sich Teilchen über weite Bereiche des Phasenraums diffusionsartig ausbreiten können.

Solche überlappenden Resonanzen treten besonders dann auf, wenn eine Hamiltonfunktion, die eine Resonanz induziert, einer langsamen Modulation unterliegt (siehe z.B.: [Licht] S. 335 f.). In diesem Fall entstehen zur Hauptresonanz Seitenresonanzen, deren Frequenzabstand untereinander gleich der Modulationsfrequenz ist. Je geringer also die Modulationsfrequenz, desto dichter liegen die Seitenresonanzen bei der Hauptresonanz und desto größer ist die Wahrscheinlichkeit für die Ausbildung einer breiten chaotischen Schicht. In dieser Schicht kann das Teilchenverhalten als stochastisch angesehen werden.

Zur quantitativen Erfassung dieses Effekts wird der nichtlineare Hamiltonoperator in einen konstanten Anteil, der die Hauptresonanz beschreibt, und einen modulierten Anteil aufgespalten.

$$H_{nl} = H_{nl,0} + H_{nl,mod}.$$

Nach Berechnung der durch $H_{nl,0}$ erzeugten Hauptresonanz kann die durch $H_{nl,mod}$ gegebene Diffusion als zeitliche Veränderung der Teilchenverteilungsfunktion in den Koordinaten der Hauptresonanz beschrieben werden. Die Anteile der Teilchenbewegung werden also uminterpretiert:

$$\begin{aligned} H_{nl} &\rightarrow H_{nl} - H_{nl,mod}, \\ A_{stoch} &\rightarrow A_{stoch} + A_{nl,mod}. \end{aligned}$$

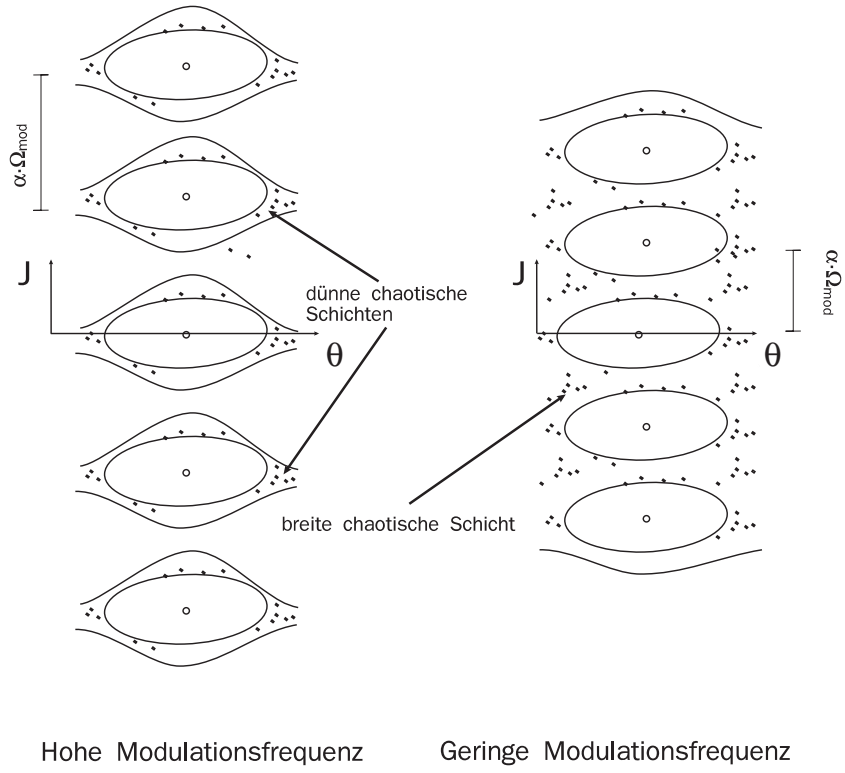


Abbildung 1.4: Chaos im nichtlinearen Phasenraum

Abbildung 1.4 zeigt die Ausbildung chaotischer Schichten durch Modulation im nichtlinearen Phasenraum.

1.1.2 Stochastischer Anteil der Bewegung

Die stochastische Anregung der Teilchenbewegung erfolgt zum einen durch rein stochastische Prozesse wie Abstrahlung von Synchrotronlicht oder das durch Verstärkerrauschen bei der Erzeugung der Hochfrequenz verursachte sogenannte HF-Rauschen. Zum anderen erfolgt sie, wie beschrieben, durch Überlappung nichtlinearer Resonanzen. In diesem Fall muß zum durch die Vlasov-Gleichung gegebenen Anteil A_{ham} in der kinetischen Gleichung der Anteil A_{stoch} hinzugefügt werden. Er spaltet wiederum auf in den durch externe Anregung wie HF-Rauschen induzierten Anteil A_{ext}, den durch Effekte im Strahl wie Synchrotronlichtabstrahlung hervorgerufenen Anteil A_{Strahl} und den Modulationsanteil $A_{nl,mod}$.

Da bei Beschleunigern im Energiebereich von **ELSA** $A_{stoch} \ll A_{ham}$ gilt, wird die Teilchenbewegung auf der Zeitskala der Umlaufgeschwindigkeiten vollständig vom Anteil A_{ham} bestimmt. In der Regel ist jedoch auch auf der Zeitskala der Filamentationszeit A_{ham} dominierend. Ist x zyklische Koordinate in H und sind die Teilchenbahnen geschlossen, so kann bei der Lösung des stochastischen Restanteils der kinetischen Gleichung (1.1) in guter Näherung von einer Gleichverteilung in x ausgegangen werden, da die Filamentationszeit deutlich kleiner ist als die Zeitkonstante der stochastisch dominierten Bewegung. Die Dichteverteilung ρ hängt dann nur noch von p ab.

Für eine Teilchenverteilung $\rho(p, t_0)$ und eine kleine Übergangswahrscheinlichkeit für große Schrittweiten im Impuls gilt die Fokker-Planck-Gleichung (siehe z.B.: [Risken]):[1]

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(p,t) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\rho(p,t_0)A_1(t)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\left(\rho(p,t_0)A_2(t)\right), \tag{1.3}$$

[1] Durch die Fokker-Planck-Gleichung beschreibbare stochastische Prozesse sind Markov-Prozesse [Licht] S. 286. Dabei wird angenommen, daß die Übergangswahrscheinlichkeit für eine Änderung von p um Δp, ausgedrückt durch die Funktion $P(p, \Delta p, t, \Delta t)$, für jeden neuen Teilchenübergang gleich ist, also nicht von der Folge der vergangenen Teilchenübergänge abhängt [Risken], S. 27f.

so daß der Operator A_{stoch} der kinetischen Gleichung:

$$A_{stoch} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\rho(p,t_0)A_1(t)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\left(\rho(p,t_0)A_2(t)\right)$$

ist. Diese Gleichung stellt eine Entwicklung der Übergangswahrscheinlichkeiten im Impuls für kleine Δp dar. Die Herleitung der Gleichung ist in Anhang A.1 dargestellt.

Der Koeffizient A_1 beschreibt hierbei eine *Friktion*, A_2 ist die *Diffusion* (siehe z.B.: [Licht], S. 286). Die Fokker-Planck-Gleichung kann allgemein zur Beschreibung stochastischer Effekte im Beschleuniger verwendet werden. In der Praxis ist dabei die Fokker-Planck-Gleichung in einigen Fällen für bestimmte Anfangsbedingungen analytisch lösbar.

Die Lösung der Fokker-Planck-Gleichung ist aus den oben genannten Gründen nur auf einer Zeitskala gültig, die eine hinreichende Zahl von Umläufen der hamiltonischen Bewegung enthält, um die Diffusionsannahme zu rechtfertigen.

1.1.3 Rampen

Unterliegt die die Teilchenbewegung beschreibende Hamiltonfunktion einer langsamen zeitlichen Veränderung $H = H(t)$ mit $\frac{\partial H}{\partial t} \ll 1$, wie sie zum Beispiel durch eine Rampe der externen Magnetfelder hervorgerufen wird, so kann dieser Effekt in der Regel als eine adiabatische Änderung erfaßt werden. Sei x zyklische Variable in $H(t = t_0)$, so daß p Erhaltungsgröße für $H(t = t_0)$ ist. In erster Näherung bleibt dann auch bei der zeitlichen Entwicklung von H der Impuls $p = p_0$ erhalten, p_0 ist adiabatische Invariante. Es ändert sich jedoch die zeitliche Entwicklung von x zu:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0: \quad x(t) = (t - t_0)\left.\frac{\partial H(t_0)}{\partial p}\right|_{p=p_0},$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} \ll 1: \quad x(t) = \int_{t_0}^{t} dt' \left.\frac{\partial H(t')}{\partial p}\right|_{p=p_0}.$$

Diese Näherung gilt aber nicht, wenn durch die zeitliche Änderung von H das Auftreten neuer Resonanzen induziert wird. Dies tritt besonders dann auf, wenn es sich bei der zeitlichen Änderung von H um eine niederfrequente Modulation handelt (siehe S. 8). Ist die Änderung jedoch rampenartig (monoton), so sind die Bereiche verschiedener Resonanzen in der Regel deutlich getrennt, so daß die adiabatische Näherung weitgehend gültig ist.

Die hier vorgestellte Anordnung der physikalischen Effekte am Beschleuniger innerhalb des betrachteten Modells ist in Abbildung 1.5 veranschaulicht.

1.1.4 Klassifikation nach Zeitskalen

Voraussetzung für die oben angegebene Zerlegung des Operators A ist die Aufteilbarkeit von A in Anteile verschiedener Stärke und die damit verbundene Aufspaltung der Teilchenbewegung in Anteile verschiedener Zeitskalen.

In Tabelle 1.1 sind die verschiedenen Anteile der Teilchenbewegung mit ihrer Zeitskala für den Beschleuniger **ELSA** aufgelistet. Es zeigt sich, daß Effekte von Netzgerätrippel, Strahlungsdämpfung und Rampen im Beschleuniger auf Grund der unterschiedlichen Zeitskalen tatsächlich als Störung der transversalen und longitudinalen Schwingungen betrachtet werden können. Ferner kann auf Grund der unterschiedlichen Zeitkonstanten die Kopplung der longitudinalen an die transversale Teilchenbewegung als Störung der transversalen Teilchenbewegung behandelt werden.

1.2 Auswahl des Simulationsalgorithmus

Für Beschleuniger gibt es eine Fülle von Programmen, die sich mit verschiedenen Aspekten der Beschleunigersphysik befassen (siehe z.B.: [Code]). Dabei beschäftigt sich ein wesentlicher Teil der Programme

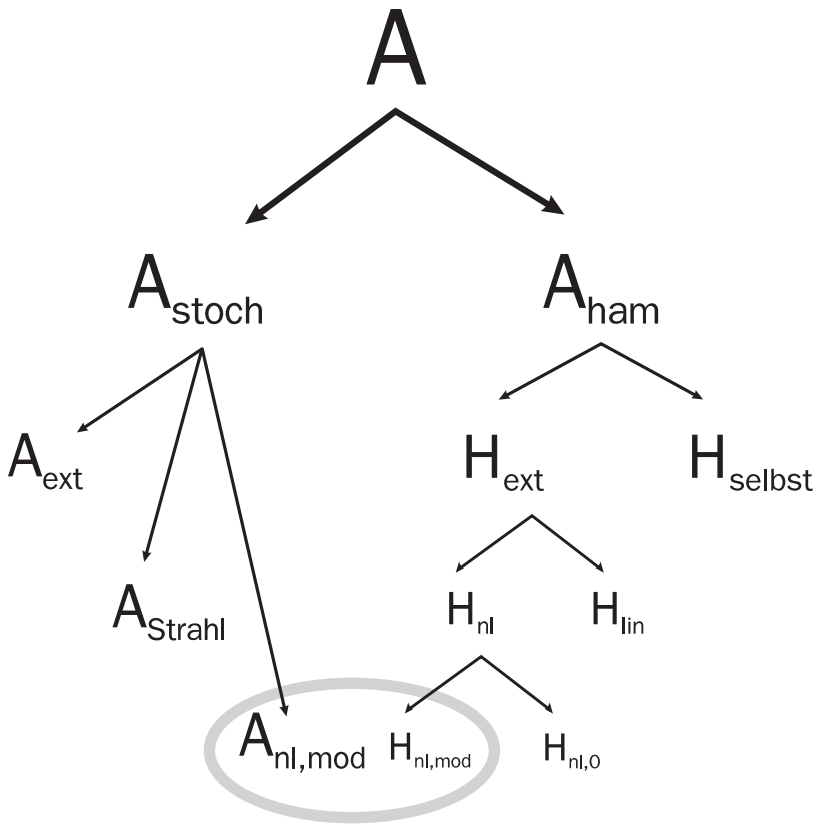


Abbildung 1.5: Gliederung der physikalischen Effekte im vorgestellten Modell

mit der Simulation der Teilchenbewegung im Beschleuniger. Etablierte Programme befassen sich hierbei jedoch im wesentlichen mit dem Einfluß von externen Feldern H_{ext} auf die Teilchenbewegung. Diese Programme lassen sich nach verschiedenen Kriterien zusammenfassen. Bezüglich des Analyseverfahrens kann man bei der Behandlung von H_{ext} Tracking–, Mapping– und analytische Verfahren unterscheiden.[2]

1.2.1 Klassifikation vorhandener Simulationsprogramme

Das Trackingverfahren ([Grote][Iselin][Farv]) geht von Elementen konstanter Feldstärke im Beschleuniger aus. Für gegebene Anfangskoordinaten eines Teilchens werden dessen Endkoordinaten nach Durchlaufen eines optischen Elementes bestimmt. Mit diesen als Ausgangsgrößen wird die Endlage des Teilchens nach dem nächsten Element bestimmt u.s.f. Das Teilchen wird also beim Umlauf um den Beschleuniger verfolgt ("Tracking"). Das Verfahren liefert an beliebigen Orten im Beschleuniger die physikalischen Werte der (x, p) Teilchenbewegung im Phasenraum, die so gewonnenen Daten geben einen qualitativen Eindruck der Teilchenbahn. Zudem ist das Verfahren leicht zu implementieren.

Da die Zahl der Rechenschritte proportional zur Umlaufzahl steigt, steigt auch die Rechenzeit in gleichem Maße, so daß für große Umlaufzahlen dieses Verfahren langsam wird. Je genauer das physikalische Modell zur Transformation der Teilchenkoordinaten durch ein Element ist, desto länger wird die Rechenzeit. Andererseits werden die Anforderungen an die Genauigkeit des Modells für lange Trackingzeiten größer, da sich ansonsten Fehler des Modells aufaddieren können. So steigt die benötigte Rechenzeit mit der Umlaufzahl insgesamt überproportional. Zudem können sich Rundungsfehler des Computers akkumulieren, wodurch die Simulationsergebnisse unzuverlässig werden. Ein Versuch, der Akkumulation von Modell– und Rundungsfehlern entgegenzuwirken, ist die sogenannte Symplektifizierung der Trackingschritte. Dabei werden nach jedem Trackingschritt auf Grund bestimmter Regeln die Teilchenkoordinaten so modifiziert, daß die von der Teilchentrajektorie eingeschlossene Phasenraumfläche konstant bleibt. Damit

[2] Die Einteilung der Analyseverfahren folgt im wesentlichen dem Vorschlag von [Chao].

Anteil der Bewegung	Frequenz [Hz]	Zeitskala [s]
Betatronschwingung	$9 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^{-7}$
Teilchenumlauf	$2 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^{-7}$
Synchrotronschwingung	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^{-5}$
Netzgerätrippel	$6 \cdot 10^2$	$2 \cdot 10^{-3}$
Dämpfungszeit	$10 \ldots 250$	$4 \cdot 10^{-3} \ldots 0.1$
Rampe	$1 \ldots 50$	$2 \cdot 10^{-2} \ldots 1$

Tabelle 1.1: Zeitskalen der Teilchenbewegung im Beschleuniger für **ELSA**

werden die Teilchen auch über lange Zeiten auf physikalisch sinnvollen Bahnen gehalten.

Das Verfahren ist auf die Verfolgung einzelner Teilchen ausgelegt. Die Beschreibung des Verhaltens einer Teilchenverteilung ist mühsam, sie muß aus einzeln verfolgten Teilchen konstruiert werden, so daß die Beschreibung der Vielteilcheneffekte mit dieser Methode kaum möglich ist.

Bei der Mapping-Methode ([Berz90][Berz93][Zeijts]) wird versucht, eine Funktion $\mathcal{M}$ ("Map") zu bestimmen, die für einen Umlauf die Abhängigkeit der Teilchenkoordinaten nach Durchlaufen des Rings $(x_f,\ p_f)$ von denen zu Beginn $(x_i,\ p_i)$ wiedergibt:

$$\begin{pmatrix} x_f \\ p_f \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}.$$

Durch Analyse der Funktion $\mathcal{M}$ können Aussagen über die Struktur der Phasenraumbilder gewonnen werden, durch Iteration von $\mathcal{M}$ werden Bilder der Teilchentrajektorien über viele Umläufe berechnet. Die Funktion $\mathcal{M}$ wird dabei aus den Magnetfeldstärken der einzelnen Elemente des Beschleunigers als Taylorentwicklung in $(x_i,\ p_i)$ errechnet. Mit Methoden der Differentialalgebra (siehe z.B.: [Berz88]) ist dies bis zu beliebiger Ordnung möglich.

Damit ist die Mapping-Methode gegenwärtig diejenige Methode, die – zumindest potentiell – die numerisch genaueste Wiedergabe der durch äußere Felder induzierten Teilchenbewegung ermöglicht.

Obwohl die Handhabung der Mapping–Programme bei der Wahl verschiedener Ordnungen der Taylorentwicklung gleich ist, wird für hohe Ordnungen und komplexe Magnetsysteme die Berechnung zeitaufwendig.

Zudem ist die Repräsentation der Teilchenbewegung als Funktion $\mathcal{M}$ zunächst unanschaulich, es bedarf komplexer Analysewerkzeuge, um die in der Beschleunigerphysik gebräuchlichen Parameter der Teilchenbewegung und Aussagen über die Phasenraumstruktur aus der Funktion $\mathcal{M}$ zu extrahieren. Bei zeitabhängigen Feldern ist die Bestimmung einer geschlossenen Form von $\mathcal{M}$ nicht möglich, sondern die Teilchenbewegung muß, analog der Tracking–Methode, durch schrittweise Integration der Bewegungsgleichung gewonnen werden.

Insgesamt ist damit die Zielrichtung der Mapping–Methode eher die Untersuchung des Einflusses von Effekten hoher Ordnung auf die Teilchenbewegung, wie Langzeitstabilität der Teilchen im Beschleuniger oder Korrektur von Abbildungsfehlern hoher Ordnung teilchenoptischer Systeme. Speziell für die angestrebte Nutzung des Simulators während des Maschinenbetriebs scheint sie nicht angemessen.

Analytische Methoden [Warnock87][Warnock89] zielen auf die direkte Bestimmung von Erhaltungsgrößen der Teilchenbewegung ab. Die Bestimmung erfolgt in einem Hamilton-Formalismus. Dabei wird die Hamiltonfunktion H der Teilchenbewegung bestimmt. Sie wird in Anteile $H = \sum_i H_i$ zerlegt. Die verschiedenen Anteile H_i entsprechen verschiedenen, die Teilchenbewegung beeinflussenden, physikalischen Effekten und bilden eine Störungsentwicklung. Sukzessive wird sodann für jeden Anteil H_i eine Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung gesucht, die eine Transformation der jeweils vorherigen Koordinaten in neue bewirkt. Diese neuen Koordinaten sind dann Erhaltungsgrößen der durch die Hamiltonfunktion bis zur betrachteten Ordnung beschriebenen Bewegung.

Der lineare Anteil der Hamiltonfunktion H_0 führt zur Transformation in die aus der Beschleunigerphysik bekannten Winkel-Wirkungs-Variablen.

Weitere Anteile H_i lassen sich prinzipiell danach unterscheiden, ob sie im Gebiet der Strahlausdehnung eine Resonanz bewirken oder nicht. Nichtresonante Anteile führen zu einer leichten Deformation der

Phasenraumtrajektorien, resonante Anteile zu einer qualitativen Änderung des Phasenraumbildes. Speziell die resonanten Anteile der Hamiltonfunktion müssen also gefunden und behandelt werden. Dadurch ist die analytische Methode besonders geeignet, das Teilchenverhalten im Bereich einer Resonanz zu prognostizieren.

Die analytische Methode fügt sich in das Bild der linearen Beschleunigeroptik [Courant]. Die Ansicht der den Erhaltungsgrößen entsprechenden Phasenraumtrajektorien liefert direkt eine Anschauung des qualitativen Teilchenverhaltens. Zudem ist mit dem Finden der Erhaltungsgrößen eine Berechnung von Teilchenkoordinaten zu beliebiger Zeit möglich. Einzelne Anteile der Hamiltonfunktion können bestimmten physikalischen Effekten zugeordnet werden, so daß die durch diesen Effekt verursachte Änderung der Teilchenbahn damit ermittelbar ist. Verschiedene resonante Anteile können getrennt untersucht werden. Daraus kann bestimmt werden, inwiefern sich Wechselwirkungseffekte, wie die Ausbildung von Bereichen chaotischer Bewegung, im Phasenraum ergeben. Durch Addition weiterer Anteile zur Hamiltonfunktion ist eine Berücksichtigung weiterer physikalischer Effekte leicht zu realisieren.

Zur Erweiterung der Methode auf schwach zeitabhängige Systeme besteht ein etablierter Formalismus, bei dem, wie beschrieben (siehe Abschnitt 1.1.3), Konstanten der Bewegung im schwach zeitabhängigen System, die sogenannten adiabatischen Invarianten, gesucht und als Koordinaten verwendet werden. Teilchenverteilungen können in diesen Koordinaten auf einfache Weise untersucht werden.

Bei der Behandlung eines oder einiger H_i wird jedoch immer nur ein bestimmter Anteil der Teilchenbewegung berücksichtigt. Insbesondere kann das Verhalten einer Teilchentrajektorie im Übergangsbereich sich überlappender Resonanzen nicht erfaßt werden. Hier ist eine Erweiterung des Ansatzes notwendig, die das chaotische Verhalten eines Teilchens zwischen Resonanzen als Diffusion innerhalb einer Teilchenverteilung auffaßt. Hierbei liefern andere Simulationsmethoden zwar direkte Resultate für eine Teilchentrajektorie im gesamten Phasenraum. Dafür erlaubt aber das analytische Verfahren in einfacher Weise eine Klassifikation von Phasenraumbereichen nach deterministischen oder chaotischen Zonen.

Die genannten Methoden geben die wesentlichen Zielrichtungen der in Simulationsprogrammen benutzten Ansätze wieder. Es gibt jedoch keine scharfe Trennung zwischen Programmen verschiedener Methoden. So können z.B. in einem Tracking-Programm durchaus mehrere optische Elemente zusammengefaßt werden, um eine Funktion $\mathcal{M}$ im Sinne der Mapping-Methode für einen Abschnitt des Beschleunigers zu erhalten. Genauso kann aus der Funktion $\mathcal{M}$ der Mapping-Methode mit den Mitteln der Differentialalgebra eine Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung konstruiert werden, um Erhaltungsgrößen der Teilchenbewegung zu finden.

1.2.2 Bewertung bezüglich der Anforderungen bei ELSA

Bezüglich des durch H_{ext} gegebenen Anteils der Teilchenbewegung muß, bedingt durch das an **ELSA** gewählte Extraktionsverfahren der langsamen Resonanzextraktion, der Simulator in der Lage sein, das Teilchenverhalten im Bereich der Extraktionsresonanz für lange Zeiten exakt zu beschreiben. Zusammen mit den bei der Benutzung des Simulators während der Einstellphase der Maschine notwendigen kurzen Antwortzeiten scheint für diese Anforderungen insgesamt die analytische Methode am besten geeignet zu sein.

Zudem erlaubt ein analytisches Simulationsverfahren eine Aufspaltung des Rechenprozesses in zwei Abschnitte. Im Analyseschritt wird, ausgehend von den aktuellen Eingabeparametern, der Ausdruck für die zeitliche Entwicklung der Verteilungsfunktion ermittelt. Im Syntheseschritt werden aus dem analytischen Ausdruck Erwartungswerte für Meßgrößen generiert.

Diese Zweiteilung des Rechenprozesses bedingt, daß der Benutzer bei einem Satz von Eingangsparametern einmal auf den Ablauf des Analyseprozesses wartet, danach aber schnell Zugriff auf alle gewünschten Meßgrößen hat.

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich dadurch, daß sich der Benutzer für Meßgrößen interessiert, also für Mittelwerte über die Teilchenverteilungsfunktion. Daher muß die Simulation auf Skalen, die klein gegenüber der Ausdehnung der Teilchenverteilungsfunktion sind, nur näherungsweise exakt sein. Insbesondere müssen Resonanzen, deren Breite diese Bedingung erfüllt, nicht berücksichtigt werden. Ferner muß der analytische Ausdruck für die zeitliche Entwicklung der Teilchenverteilung in Bereichen weit ab von der zu simulierenden Teilchenverteilungsfunktion nur bedingt gültig sein.

Insgesamt sind etablierte Programme zur Simulation der Teilchenbewegung im Beschleuniger jedoch weit-

gehend auf die Simulation des Einteilchenverhaltens ausgerichtet. In dieser Arbeit wird demgegenüber der Ansatz verfolgt, das Verhalten von Teilchen*verteilungen* zu simulieren. Auf Grund des Fehlens etablierter Programme, die diesen Ansatz verfolgen, wurde eine Neuentwicklung des Simulationscodes angestrebt. Die analytische Methode ist hierbei nur als Teilbaustein innerhalb des Simulators zu sehen.

1.3 Implementierung

Die Art der Implementierung eines Simulators wird nicht nur durch die zu beschreibende Physik, sondern auch durch die seine Nutzung betreffenden Aspekte beeinflußt. Dazu zählt zunächst der Zweck, zu dem der Simulator benutzt werden soll. Daraus ergeben sich Folgerungen für die Handhabung, d.h. die Art der Datenein– und Datenausgabe und die zu fordernden Antwortzeiten. Ferner ist zu klären, ob der Simulator nur an **ELSA**oder auch an weiteren Maschinen eingesetzt werden soll.

Handhabung

Da der Simulator während des Maschinenbetriebs benutzt werden soll, ist eine einfache Handhabung unerläßlich. Inbesondere kann der Benutzer keine Texteingabedateien entwickeln oder ändern, um die Eingangsgrößen des Simulators den aktuellen Maschineneinstellungen anzupassen. Benutzereingaben erfolgen daher sinnvollerweise graphisch. Zudem sollten alle Ein– und Ausgabeparameter in einer Form präsentiert werden, die dem Benutzer unmittelbar zugänglich ist. Die Steuerung der Rechenabläufe des Simulators ist diesen Anforderungen entsprechend zu gestalten.

Dies wird am besten realisiert durch Verwendung einer graphischen Benutzeroberfläche, mausorientierte Eingabe von Parametern und Steuerbefehlen und eine graphische Darstellung aller Ausgabeparameter.

Die Adaption eines vorhandenen Computercodes in eine graphische Benutzerschnittstelle, wie es z.B. für Transport unter MS-Windows verwirklicht wurde [Rohrer][Brown], schien nicht vorteilhaft, da die komplette Abdeckung einer vorhandenen textorientierten Benutzerschnittstelle durch eine graphikorientierte im Arbeitsumfang der vollständigen Neuentwicklung einer Benutzerschnittstelle gleichkommt.

Wechselwirkung mit Kontrolle und Diagnose

Für die angestrebte Anwendung des Simulators in Zusammenhang mit Kontrolle und Diagnose während der Einstellarbeit am Beschleuniger ist eine Vereinheitlichung dieser Komponenten wünschenswert. Speziell für den Beschleuniger **ELSA** ist die Gewinnung betriebsorientierter Geräte- und Diagnoseparameter für den Simulator durch das neue **ELSA**–Kontrollsystem [Goetz94] [Picard94] stark vereinfacht. Das Kontrollsystem erlaubt die Akquisition der aktuellen Betriebsparameter von **ELSA** durch den Simulator "auf Knopfdruck", so daß ein Abgleich zwischen Parametern von Simulator und **ELSA** jederzeit möglich ist.

Antwortzeiten

Speziell beim Einsatz des Simulators während des Maschinenbetriebs sind für den Benutzer akzeptable Antwortzeiten bei allen Berechnungen notwendig. Dies beeinflußt, wie gezeigt, die Wahl der zu verwendenden Simulationsverfahren, zudem hat es Einfluß auf die Wahl des verwendeten Computer-Modells. Hier kann vorteilhaft eine leistungsfähige Workstation verwendet werden, da ein Computer dieser Klasse sowohl die Anforderungen des Simulators an Graphikleistung und Kommunikationsfähigkeit erfüllt als auch ein gutes Preis-Leistungsverhältnis bietet.

Benutzung "online" und "offline"

Bei der Benutzung des Simulators während der Einstellung der Maschine soll dieser einen Überblick über die aktuellen Verhältnisse geben. Hier ist eine hohe Rechengeschwindigkeit notwendig, wohingegen die Anforderungen an die umfassende Berücksichtigung aller physikalischen Effekte geringer sind. Es können bei der Berechnung des analytischen Ausdrucks der Teilchenverteilungsfunktion zu Gunsten einer Optimierung der Rechengeschwindigkeit also gewisse Näherungen in Kauf genommen werden. Die maximale

Ungenauigkeit der Näherung sollte jedoch klein sein gegen die Ungenauigkeit bei der experimentellen Bestimmung der jeweiligen Meßgröße.

Der Simulator soll, neben seiner Verwendung während des Maschinenbetriebs, auch für die Bestimmung von optimalen Betriebsparametern eines Betriebsmodes genutzt werden. Diese Nutzung macht längere Wartezeiten auf Simulationsergebnisse akzeptabel, stellt jedoch auch höhere Anforderungen an die Genauigkeit der Simulation. Der Simulator sollte den verschiedenen Nutzungsarten entgegenkommen, indem er sich für die Simulation verschiedener physikalischer Effekte umschalten läßt. Damit kann während des Betriebs durch Simulation nur der für den aktuellen Betriebsmode wichtigen Anteile der Teilchenbewegung eine Erhöhung der Simulationsgeschwindigkeit erreicht werden. Zudem ist durch Vergleich von experimentell bestimmten Meßgrößen mit solchen, die vom Simulator unter Berücksichtigung verschiedener physikalischer Effekte bestimmt wurden, eine Klassifikation der im Beschleuniger auftretenden Effekte möglich.

Verwendbarkeit für verschiedene Beschleuniger

Der Simulator soll nicht nur für die aktuelle Anordnung der optischen Elemente in **ELSA**, sondern auch für andere Beschleunigerstrukturen benutzbar sein. Dies bedingt, daß die Beschreibung der Beschleunigerstruktur vom Benutzer vorgebbar sein muß. Da eine solche Beschleunigerstruktur für eine Maschine nur einmal eingegeben wird, ist die Eingabe als eine Datei sinnvoll, die neben der geometrischen Größe und Lage der Elemente Standardvorgaben für ihre Feldstärkeparameter enthält. Zudem sollen die Parameter der optischen Elemente so gekennzeichnet werden können, daß eine Kopplung mit entsprechenden Kontrollsystemparametern möglich ist.

Da mit dem Beschleuniger **COSY** auch eine Protonenmaschine als Nutzer des Simulators in Frage kommt, können die sich bei Elektronenmaschinen aus $v \simeq c$ ergebenden Vereinfachungen im Simulator nicht gemacht werden.

Insgesamt ergibt sich, daß eine weitgehende Neuentwicklung des Simulators notwendig ist.

Kapitel 2

Simulationsverfahren

Das Simulationsverfahren richtet sich an den bei **ELSA** gegebenen Anforderungen aus. Nach einer überblicksartigen Darstellung des Simulationsprogramms werden die einzelnen Berechnungsabschnitte näher erläutert.

2.1 Programmablauf

Das Simulationsprogramm ist ein eigenständiges Computerprogramm, das auf einem Rechner der Workstation-Klasse abläuft. Dem Benutzer stellt sich das Simulationsprogramm zunächst als neues Fenster in einer graphischen Benutzeroberfläche dar, das in Abbildung 2.1 gezeigt ist. Form und Bedienung des Fensters folgen, konform zum neuen **ELSA**-Kontrollsystem, den bei Workstations verbreiteten X11- und OSF/Motif-Standards. Über verschiedene Menüs kann der Benutzer interaktiv mit Hilfe der Maus den Ablauf von Simulationsrechnungen und die Darstellung der Ergebnisse steuern.

Diese Steuerung erfolgt im wesentlichen über das Hauptmenü des Simulator-Fensters und dessen Untermenüs. Im mittleren Fensterteil werden optische Funktionen nach Wahl des Benutzers entlang der Umlauflänge des Beschleunigers dargestellt. Über ein Aufblende-Menü in diesem Fensterteil, das bei Drücken der rechten Maustaste erscheint (ein sogenanntes Popup-Menü), kann der Benutzer nach der Analysephase die Berechnung von Meßgrößen anstoßen. Im unteren Teil ist die Beschleunigerstruktur piktogrammiert. Durch Anklicken eines Elementes erscheint ein Fenster, in dem die Parameter dieses Elementes geändert werden können. Der Benutzer kann ferner im unteren Fensterteil durch Anklicken Elemente zur Berechnung einer horizontalen Closed-Orbit-Beule mit vier Korrektoren auswählen, die nach Analyse der linearen Optik berechnet werden kann.

Über das Hauptmenü veranlaßt der Benutzer den Simulator zu Beginn, seine Startdateien einzulesen. Dabei handelt es sich zunächst um eine Datei, die Standardeinstellungen für Steuerungsparameter des Simulators enthält. Sodann wird die Beschreibung der Magnetstruktur des Beschleunigers eingelesen. Die Magnetstruktur wird vom Benutzer in einem MAD-ähnlichen Eingabeformat [Grote] für den jeweiligen Beschleuniger in einer Datei abgelegt. Zudem können in dieser Datei Angaben über die Verbindung von Elementparametern mit Kontrollsystemparametern gemacht werden. Die Syntax der Startdateien ist in Anhang A.8 beschrieben. Aus der eingelesenen Magnetstruktur wird die Geometrie des Beschleunigers ermittelt.

Der Benutzer hat nun Gelegenheit, Elementparameter den aktuellen Gegebenheiten anzupassen oder neue Werte vom Kontrollsystem anzufordern.

Über das Hauptmenü kann der Benutzer die Berechnung der linearen Maschinenoptik anstoßen. Die optischen Funktionen werden dann für eine bestimmte Phasenraumebene graphisch dargestellt, und der Benutzer kann für diese Ebene über das Popup-Menü im mittleren Fensterteil auf Werte der Funktionen an beliebiger Position sowie auf Werte von integralen Größen des Beschleunigers zugreifen. Über das Popup-Menü erfolgt zudem die Auswahl der Phasenraumebene und der darzustellenden optischen Funktion.

Sodann wird das nichtlineare Resonanzverhalten analysiert. Hier kann der Simulator entweder selber nach kritischen Resonanzen im vom Strahl ausgefüllten Phasenraumbereich suchen oder der Benutzer gibt eine Resonanz vor, deren Struktur untersucht werden soll. Der Benutzer kann sich daraufhin eine

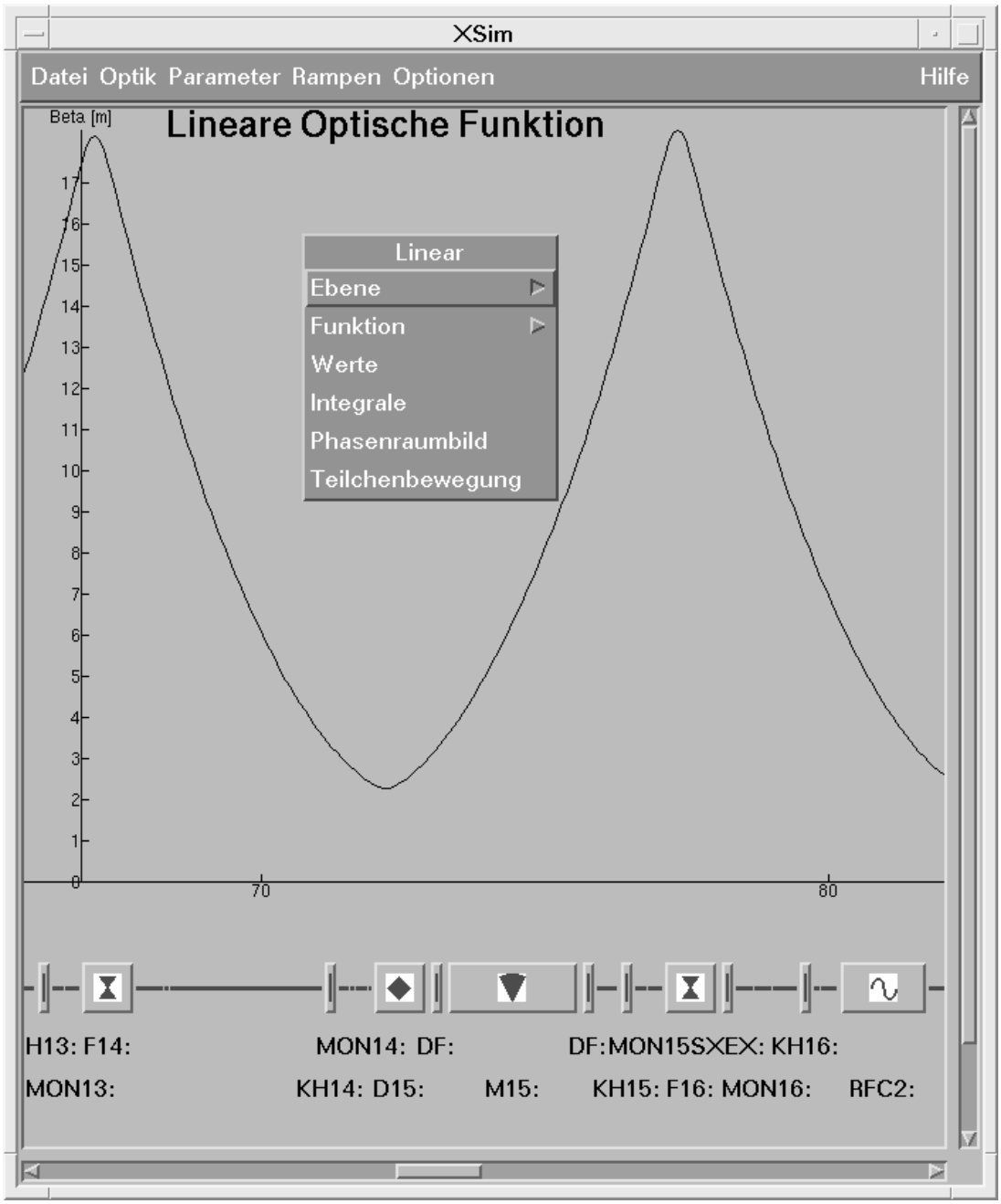


Abbildung 2.1: Erscheinungsbild des Simulators

Übersicht über die Lage der den gefundenen Erhaltungsgrößen entsprechenden Teilchentrajektorien im Phasenraum an einem beliebigen Ort des Beschleunigers beschaffen.

Nun definiert der Benutzer eine Teilchenverteilungsfunktion, für die erwartete Meßgrößen berechnet werden sollen. Dabei besteht die Wahl zwischen mehreren Modellen der Teilchenverteilung wie δ–förmige Verteilung, Rechteckverteilung und Gaußverteilung, wobei der Benutzer jeweils Mittelpunkt und Breite der Verteilung interaktiv eingibt. Der Benutzer kann dabei auswählen, welche Koordinaten als Erhaltungsgrößen bei der zeitlichen Entwicklung der Teilchenverteilung gelten sollen. In diesen Koordinaten wird die Teilchenverteilung dann auch eingegeben. Für den einmal analysierten Phasenraum können beliebig viele Verteilungen definiert werden.

Über das Hauptmenü wird jetzt die zu simulierende Meßgröße gewählt. Ferner besteht noch eine Auswahl, welche die Teilchenverteilung betreffenden Effekte bei der Simulation berücksichtigt werden sollen.

Die eigentliche Generierung der Erwartungswerte von Meßgrößen wird über das Popup-Menü im mittleren Fensterteil angestoßen. Hierbei wird die der aktuellen Mausposition entsprechende Ringposition als Ort der Beobachtung angenommen. Die Zeit– bzw. Frequenzabhängigkeit der simulierten Größen wird in einem neuen Fenster dargestellt. Die Darstellung erfolgt immer in natürlichen Koordinaten x, x', z, z', σ, p_σ (zum Koordinatensystem siehe S. 20). Für einen analysierten Phasenraum und eine gewählte Teilchenverteilung kann der Generierungsschritt beliebig oft wiederholt werden.

Hierbei hat der Benutzer bei jeder dargestellten Graphik umfangreiche Möglichkeiten, die Darstellungsart zu ändern. Ferner kann er mit Hilfe der Maus Positionen und Abstände in physikalischen Einheiten der dargestellten Graphik vermessen. Ferner kann die Graphik ausgedruckt werden.

Nach diesem Überblick über den Ablauf des Simulationsprogramms wird im folgenden die Berechnungsmethode dargestellt. Die Aufteilung der Berechnungsschritte folgt dabei dem im vorherigen Kapitel angegebenen Muster. Die bei den Berechnungen des folgenden Abschnitts auftretenden Formeln wurden mit Hilfe eines Mathematikprogramms zur symbolischen Manipulation von Gleichungen [Wolfram] verifiziert.

2.2 Einteilchenverhalten

Zur Simulation des Verhaltens von Dichtefunktionen im Beschleuniger muß zunächst das Verhalten eines Teilchens betrachtet werden. Dazu soll ein universeller Formalismus verwendet werden, der sich in das in Abschnitt 1.1 vorgestellte Modell einfügt. Dort wurde das Einteilchenverhalten durch die Hamiltonfunktion H_{ext} beschrieben. Ziel der Analyse des Einteilchenverhaltens ist also die Ableitung einer dieses Verhalten beschreibenden Hamiltonfunktion H_{ext} und die Lösung der dazugehörigen Bewegungsgleichungen. Wie bereits ausgeführt, läßt sich die Hamiltonfunktion in verschiedene Anteile im Sinne einer Störungsentwicklung zerlegen. Die Lösung der Bewegungsgleichungen für eine Ordnung der Störungsentwicklung erfolgt, indem eine Koordinatentransformation gesucht wird, in deren neuen Koordinaten die Impulse Erhaltungsgrößen der Bewegung sind. In diesen Koordinaten ist nämlich (siehe Abschnitt 1.1.1) der Anteil der Einteilchenbewegung von der zeitlichen Entwicklung der Teilchenverteilung für nur vom Impuls abhängige Verteilungen abgespalten, da diese sich nunmehr nicht ändern. Dies ermöglicht ein sukzessives Fortschreiten in den Ordnungen der Störungsentwicklung, indem die Bewegungsgleichungen zur gestörten Hamiltonfunktion jeweils in den vorherigen Koordinaten gelöst werden. Die einzelne Transformation ist dabei immer auf einen bestimmten Anteil der Hamiltonfunktion ausgerichtet. Damit spiegelt sich der unterschiedliche physikalische Gehalt der verschiedenen Terme der Hamiltonfunktion auch in den jeweils zugehörigen Koordinaten wider, der der betrachteten Ordnung der Störungsentwicklung entsprechende Anteil der Teilchenbewegung wird abgespalten.

Um die Hamiltonfunktion in eine nur von den Impulsen abhängige Form zu bringen, ist eine gewisse Anzahl von Transformationen durchzuführen. Statt für jedes transformierte Koordinatensystem eine eigene Bezeichnung einzuführen, werden im weiteren die jeweils neuen Koordinaten mit einer Tilde ($\tilde{}$) versehen, die vor der nächsten Transformation jedoch wieder unterdrückt wird. Zur besseren Übersicht sind die in diesem Kapitel durchgeführten Transformationen in Tabelle 2.1 zusammengefaßt. Neben der physikalisch motivierten Funktion wird für jede Transformation die Bezeichnung der neuen Koordinaten ohne Tilde und die Textstelle des Auftretens angegeben.

[1] Bei der Transformation auf Separatrixkoordinaten wurde angenommen, daß die Resonanzkoordinate x ist.

Funktion	Neue Orts/Winkelvariablen	Neue Impulse/Wirkungen	Seite
Mitgeführtes Koordinatensystem	$s,\ \xi,\ \sigma,\ \eta$	$p_s,\ p_\xi,\ p_\sigma,\ p_\eta$	20
Umlauflänge als unabhängige Variable	$s,\ x, t, z$	$p_s,\ p_x,\ -E,\ p_z$	21
Transformation auf Sollgeschwindigkeit	$s,\ x,\ \sigma,\ z$	$p_s,\ p_x,\ p_\sigma,\ p_z$	21
Energienormierung	$s,\ x,\ \sigma,\ z$	$p_s,\ p_x,\ p_\sigma,\ p_z$	23
Dispersionskoordinaten	$s,\ x,\ \sigma,\ z$	$p_s,\ p_x,\ p_\sigma,\ p_z$	25
Closed-Orbit	$s,\ x,\ \sigma,\ z$	$p_s,\ p_x,\ p_\sigma,\ p_z$	27
Betatronkoordinaten	$s,\ \phi_x,\ \phi_\sigma,\ \phi_z$	$p_s,\ J_x,\ J_\sigma,\ J_z$	27
Phasenkorrigierte Betatronkoordinaten	$s,\ \phi_x,\ \phi_\sigma,\ \phi_z$	$p_s,\ J_x,\ J_\sigma,\ J_z$	28
Resonanzkoordinaten	$s,\ \phi_x,\ \phi_\sigma,\ \phi_z$	$p_s,\ J_x,\ J_\sigma,\ J_z$	32
Separatrixkoordinaten	$s,\ \phi^1,\ \phi_\sigma,\ \phi_z$	$p_s,\ J,\ J_\sigma,\ J_z$	35
Phasenmodulierte Koordinaten	$s,\ \phi_x,\ \phi_\sigma,\ \phi_z$	$p_s,\ J_x,\ J_\sigma,\ J_z$	39

Tabelle 2.1: Transformationen der Hamiltonfunktion

In diesem Kapitel wird die Lichtgeschwindigkeit $c \equiv 1$ gesetzt, da hier Herleitung und Struktur der betrachteten Formeln im Vordergrund stehen. In den folgenden Kapiteln und im Anhang, in denen es um die Anwendung der erhaltenen Formeln geht, wird c wieder explizit berücksichtigt.

Hamiltonfunktion

Die Bewegung eines reellen Teilchens ist nach Einstein durch die Forderung charakterisiert, daß es sich auf der Masseschale bewegt:

$$p_\mu p^\mu = m^2,$$

wobei p^μ die Komponenten des Vierer-Impuls-Vektors sind, m die Masse des Teilchens darstellt und die Einstein'sche Summenkonvention angenommen wurde.[2] Im Falle elektromagnetischer Felder ist die Ersetzung $p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu$ durchzuführen. Dabei ist A^μ das Vektorpotential des elektromagnetischen Feldes, p^μ der kanonische Impuls und e Elementarladung. Ferner ergibt sich der Geschwindigkeitsvektor u^μ zu:

$$u^\mu = \frac{1}{m}(p^\mu - eA^\mu) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} = \gamma \frac{\partial x^\mu}{\partial t}.$$

Hierbei ist τ die Eigen– und t die Laborzeit, γ die relative Energie des Teilchens bezüglich der Ruhemasse m. Es folgt (siehe z.B.: [Husmann/Petry], [Bengtsson] S. 110 ff.):

$$(p_\mu - eA_\mu)(p^\mu - eA^\mu) \quad = \quad m^2. \tag{2.1}$$

Im Beschleuniger werden die umlaufenden Teilchen durch das Magnetsystem entlang einer Sollbahn geführt. Zum Verständnis der physikalischen Vorgänge im Beschleuniger wird die Abweichung der Teilchenbahn von der Sollbahn untersucht. Dies geschieht in einem mitgeführten kartesischen Koordinatensystem, das den Ursprung jeweils auf der Sollbahn hat. Die Einheitsvektoren sind dabei $\vec{e}_s,\ \vec{e}_\xi,\ \vec{e}_\eta$, wobei $\vec{e}_s$ tangential zur Sollbahn ist, und die Transversalebene zu $\vec{e}_s$ durch $\vec{e}_\xi$ in horizontaler und $\vec{e}_\eta$ in vertikaler Richtung aufgespannt wird.

[2] Hierbei bezeichne a^μ die Komponenten eines Vektors $\bar{a}$ und b_μ die Komponenten der Eins-Form $\tilde{b}$. Ist auf der betrachteten Mannigfaltigkeit eine nicht entartete Metrik definiert, so kann dem Vektor eineindeutig eine Eins-Form zugeordnet werden durch $\tilde{a} = g(\bar{a})$, wobei g eine Zwei-Form ist, die als Metrischer Tensor bezeichnet wird [Schult], S 34.

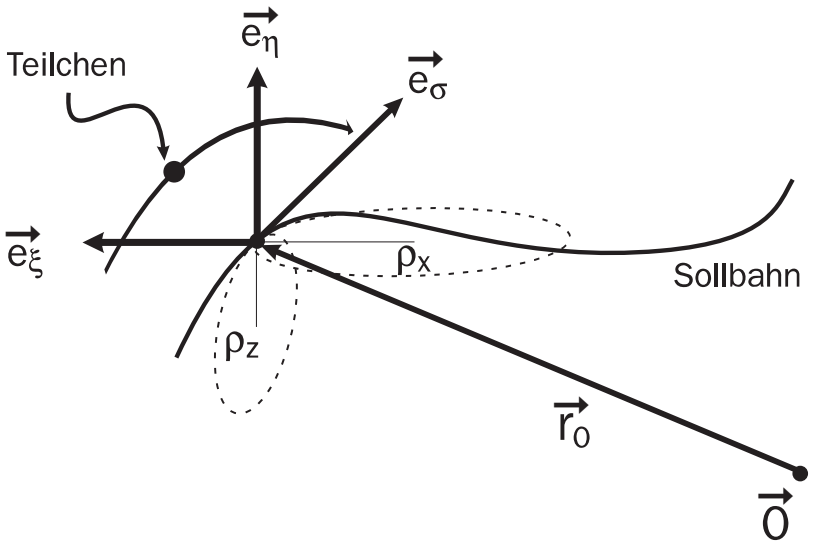


Abbildung 2.2: Mitgeführtes Koordinatensystem

Dieses mitgeführte Koordinatensystem ist in Abbildung 2.2 zu sehen. Zur Transformation von (2.1) in das mitgeführte Koordinatensystem muß der metrische Tensor des Minkowski-Raums g umgerechnet werden in den der mitgeführten Koordinaten g':

$$\begin{aligned} g' &= \Lambda^T g \Lambda, \qquad \text{oder in Koordinaten:} \\ g'_{\mu\nu} &= \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} g_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}{}_{\nu}, \end{aligned}$$

wobei α, β die Komponenten in kartesischen Koordinaten $\{t, x, s, z\}$ und μ, ν die Komponenten im mitgeführten Koordinatensystem $\{t, \xi, \sigma, \eta\}$ bezeichen.[3] Hierbei ist die Matrix Λ die Transformationsmatrix der Ableitungen von neuen in die alten Koordinaten:

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\mu}}.$$

Die Sollbahnkurve im Ortsraum unterliegt einer lokalen Krümmung in ξ- und η-Richtung mit Krümmungsradien ρ_x, ρ_z. Auf Grund der Krümmung erscheint ein Wegelement $d\sigma$ in mitgeführten Koordinaten für ξ, $\eta > 0$ länger als in kartesischen Koordinaten. Es ergibt sich: $d\sigma = (1 + \frac{\xi}{\rho_x} + \frac{\eta}{\rho_z}) ds$, während die anderen Koordinaten sich längentreu transformieren. Die Transformationsmatrix Λ ist also mit $n = 1 + \frac{\xi}{\rho_x} + \frac{\eta}{\rho_z}$:

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und der metrische Tensor:

$$g'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit kann Gleichung (2.1) in Komponenten des mitgeführten Koordinatensystems ausgeschrieben werden als:

$$(E - e\Phi)^2 - (p_\xi - eA_\xi)^2 - \frac{1}{n^2}(p_\sigma - eA_\sigma)^2 - (p_\eta - eA_\eta)^2 = m^2.$$

[3] Für die Zeitkomponente ergibt sich keine Änderung beim Wechsel des Koordinatensystems, daher wird die Bezeichnung identisch belassen.

Es ist jedoch üblich, die Feldstärken der magnetischen Elemente in kartesischen Koordinaten anzugeben, damit keine Umrechnung der gemessenen Feldstärkewerte auf neue Koordinaten notwendig ist. Mit $A = \Lambda^{-1}A'$ ist dann:

$$(E - e\Phi)^2 - (p_\xi - eA_x)^2 - (\frac{p_\sigma}{n} - eA_s)^2 - (p_\eta - eA_z)^2 = m^2.$$

Zur einfacheren Schreibweise werden fortan die griechischen Indizes der Koordinaten durch lateinische ersetzt:

$$(E - e\Phi)^2 - (p_x - eA_x)^2 - (\frac{p_s}{n} - eA_s)^2 - (p_z - eA_z)^2 = m^2. \tag{2.2}$$

Es ist aber zu beachten, daß die sich ergebende Gleichung in gemischten Koordinaten geschrieben ist: Die Feldstärken sind in kartesischen Koordinaten angegeben, während die Impulse im mitgeführten Koordinatensystem geschrieben sind.

Da im Kreisbeschleuniger eine s-Periodizität besteht, ist die Wahl von s als der unabhängigen Variablen in der Beschleunigerphysik üblich. Eine Hamiltonfunktion mit s als unabhängiger Variable kann durch Auflösen von (2.2) nach $-p_s$ erhalten werden:

$$H_s = -p_s = -n[eA_s + \sqrt{(E - e\Phi)^2 - m^2 - (p_x - eA_x)^2 - (p_z - eA_z)^2}]. \tag{2.3}$$

Hier hat also s die Funktion der Zeitkoordinate übernommen, die kanonisch konjugierten Variablen sind $x,\ p_x;\ z,\ p_z;\ -E,\ t$.[4]

Beschleunigerelemente

Der Beschleuniger ist aus magnetischen Elementen aufgebaut, die in guter Näherung als Abschnitte konstanten Feldes angesehen werden können. Zur Beschreibung der Wirkung von Übergängen zwischen den Abschnitten werden dünne Linsen eingeführt, d.h. Abschnitte mit Länge $l = 0$, aber integralem Feld $A \cdot l \neq 0$.

In Anhang A.2 sind die elektrischen Feldstärkevektoren für die verschiedenen im Beschleuniger vorkommenden optischen Elemente hergeleitet. Für diese Beschleunigerelemente gilt: $\Phi = A_x = A_z = 0$, so daß sich die Hamiltonfunktion (2.3) vereinfacht zu:

$$\begin{aligned} H_s &= -n[eA_s + \sqrt{E^2 - m^2 - p_x^2 - p_z^2}] \\ &= -n[eA_s + \sqrt{p_s^2 - p_x^2 - p_z^2}], \end{aligned} \tag{2.4}$$

wobei die Beziehung $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ eingesetzt wurde und $p_s = p_s(-E) = |\vec{p}|$ der Betrag des Dreier-Impulses ist. Die Bezeichnung p_s wird hier und im folgenden, anders als in Gleichung (2.3), zur Kennzeichnung einer rein kinematischen Größe, nämlich des longitudinalen Impulses verwendet. Die Größe p_s ist dabei kein kanonisch konjugierter Impuls, sondern wird nur als abkürzende Schreibweise eingeführt. Die kanonisch konjugierten Variablen sind weiterhin $-E,\ t$.

Da die Teilchenbewegung im mitgeführten Koordinatensystem betrachtet werden soll, ist es sinnvoll, die Bewegung eines Teilchens in t relativ zur Geschwindigkeit β_0 des mitgeführten Koordinatensystems zu betrachten. Statt der Zeitkoordinate t soll nun eine neue Koordinate σ, die den Unterschied zwischen der tatsächlichen Durchlaufzeit des Teilchens an einem Ort $t(s)$ und $\beta_0 t$ angibt, eingeführt werden. Dies wird erreicht durch die erzeugende Funktion $F_3(-E, \sigma) = -(s - \sigma)\frac{-E}{\beta_0}$. Es ergibt sich die kanonische Transformation:[5]

$$\begin{aligned} t = & \quad -\tfrac{\partial F_3}{\partial(-E)} = (s-\sigma)/\beta_0 && \Leftrightarrow \sigma = s - \beta_0 t, \\ p_\sigma = & \quad -\tfrac{\partial F_3}{\partial \sigma} = \tfrac{E}{\beta_0} && \Leftrightarrow p_s = \sqrt{(\beta_0 p_\sigma)^2 - m^2}, \\ \frac{\partial F_3}{\partial s} = & \quad \tfrac{E}{\beta_0} && \Leftrightarrow \frac{\partial F_3}{\partial s} = +p_\sigma\,. \end{aligned}$$

[4] Das Variationsprinzip $0 = \delta \int \vec{p}\vec{q} - H dt$ ist symmetrisch in $(\vec{q}, t)$ und $(\vec{p}, -H)$. Da aus diesem Prinzip alle Koordinatentransformationen ableitbar sind, muß bei Wechsel der unabhängigen Variablen der zugehörige Impuls immer negativ berücksichtigt werden (siehe dazu z.B. [Hagedorn]).

[5] Zur Bezeichnung der Erzeugungsfunktionen für kanonische Transformationen siehe [Goldstein], S. 240 ff., wonach $F_1 = F_1(x, \tilde{x}), F_2 = F_2(x, \tilde{p}), F_3 = F_3(p, \tilde{x})$ und $F_4 = F_4(p, \tilde{p})$, wobei x, p die alten, $\tilde{x}, \tilde{p}$ die neuen Koordinaten bzw. Impulse sind.

Durch diese Transformation wird also neben dem Übergang von t zu σ als mitgeführter Koordinate zugleich der Übergang von $-E$ zu p_σ als kanonisch zugeordnetem Impuls bewirkt. Für relativistische Teilchen ist dabei $p_\sigma = p_s$, so daß der neue kanonische Impuls gleich dem Teilchenimpuls ist. Für nichtrelativistische Teilchen besitzt der kanonische Impuls jedoch keine unmittelbare physikalische Interpretation. Gleichung (2.4) geht über in:

$$H_s = -n[eA_s + \sqrt{p_s(p_\sigma)^2 - p_x^2 - p_z^2}] + p_\sigma\,, \tag{2.5}$$

wobei die Zeitabhängigkeit des Potentials $\Phi_s, \vec{A}_s$ als Abhängigkeit in σ geschrieben werden muß, wie in Anhang A.2 geschehen. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird weiterhin die Bezeichnung p_s in der Wurzel beibehalten, jedoch sind die kanonischen Variablen p_σ, σ.

Abstrahlung

Bisher waren mit $A^\mu = A^\mu_{ext}$ nur die externen Felder bezeichnet. Für Teilchenbeschleuniger mit hoher Energie ($E \gg m$) muß jedoch zusätzlich noch die Abstrahlung berücksichtigt werden. Aus den Maxwellgleichungen folgt, daß jedes bewegte Teilchen von einem Selbstfeld A^μ_{selbst} begleitet ist. Dieses kann in Form des Liènard-Wiechert-Potentials (siehe z.B. [Barut], S. 167) dargestellt werden. Die Bewegung des Teilchens bei Anwesenheit externer Felder bestimmt sich in selbstkonsistenter Weise aus dem Einfluß des externen und des Selbstfeldes. Im Falle eines Kreisbeschleunigers kann jedoch in guter Näherung davon ausgegangen werden, daß $A^\mu_{ext} \gg A^\mu_{selbst}$. Daher kann der Einfluß des Selbstfeldes auf die Teilchenbahn vernachlässigt werden, und es ist nur der Effekt des Selbstfeldes auf die Energiebilanz zu berücksichtigen.

Ein beschleunigtes Teilchen strahlt die Leistung $P = \beta_0 \frac{\partial E}{\partial s} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2}\frac{dp^\mu}{d\tau}\frac{dp_\mu}{d\tau}$ ab (siehe z.B. [Jackson]), wobei $\tau = \frac{t}{\gamma}$ die Eigenzeit des Teilchens ist. Beim Umlauf im Beschleuniger erfährt das Teilchen eine wesentliche Impulsänderung nur in den Dipolen. Dort ist $A^\mu_{ext} = const$, weswegen $\frac{d\vec{p}}{dt} \simeq -\frac{m\gamma\beta^2}{\rho_0}\vec{e}_x$, $\frac{dE}{dt} = 0$ gilt, wobei $\vec{e}_x$ der Einheitsvektor in Richtung des Mittelpunkts der Bahnkrümmung ist. Hierbei wurde angenommen, daß sich die Energie im Dipol nicht ändert und die Ablenkung gegeben ist durch $\frac{1}{\rho} = -\frac{eB}{p}$. Also ist $P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m^2}\frac{\beta^4\gamma^4}{\rho_0^2}$. Damit kann, durch Bilden des Integrals der Leistung P nach s, die Abstrahlung als Zusatzterm der Hamiltonfunktion mit (siehe z.B.: [Ripken]):

$$H_{abstr} = C_1 p_0 (\frac{1}{\rho_x^0}^2 + \frac{1}{\rho_z^0}^2)\sigma$$

beschrieben werden, wobei unter expliziter Berücksichtigung der Lichtgeschwindigkeit $C_1 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\frac{\beta^3\gamma^4}{p_0}$ ist und konstante Terme unterdrückt wurden.

Gleichgewichtsbahn

Die Hamiltonfunktion (2.5) beschreibt die Teilchenbewegung bezüglich des mitgeführten Koordinatensystems mit der lokalen Krümmung $\frac{1}{\rho_x}$, $\frac{1}{\rho_z}$ in x- bzw. z-Richtung.

Für die Teilchenbewegung wird in erster Näherung eine Schwingung um eine Gleichgewichtsbahn erwartet. Die Gleichgewichtsbahn ist diejenige Teilchenbahn, bei der sich die Koordinaten zeitlich nicht ändern, auf der das Teilchen also stabil umlaufen kann. Diese Gleichgewichtsbahn ist der sogenannte Closed-Orbit, Ort und Impuls des Closed-Orbit an jeder Ringposition s werden als $\vec{C}(s), \vec{P}_C(s)$ bezeichnet. Für die Gleichgewichtsbahn gilt nun:

$$0 = \frac{d}{dt}\xi_s = \frac{\partial}{\partial p_\xi}\, H_s|_{\vec{C},\vec{p}_C}\,,$$
$$0 = \frac{d}{dt}p_\xi = -\frac{\partial}{\partial \xi}\, H_s|_{\vec{C},\vec{p}_C}\,,$$

für $\xi = \{s, x, z\}$.

Auf Grund der in der Hamiltonfunktion (2.5) enthaltenen Wurzelfunktion und nichtlinearen Terme kann der Closed-Orbit nicht analytisch bestimmt werden. Jedoch kann der Closed-Orbit in einem iterativen Verfahren berechnet werden. Dazu wird die Hamiltonfunktion (2.5) als Potenzreihe bis zur zweiten

Ordnung entwickelt, und der Closed-Orbit als diejenige Teilchenbahn bestimmt, die alle linearen Terme dieser Potenzreihe eliminiert. Denn ein linearer Term in der Hamiltonfunktion stellt eine Anregung dar, die ein Teilchen mit den Anfangsbedingungen $\xi, p_\xi = 0$ zu einer Bewegung zwingt, während Terme zweiter Ordnung rücktreibende Kräfte sind, die ein Teilchen im Koordinatenursprung unbeeinflußt lassen.

Zur weiteren Iteration wird dann die Hamiltonfunktion (2.5) um den so erhaltenen Closed-Orbit entwickelt. Jedes nichtlineare Magnetfeld trägt dabei am Ort des Closed-Orbit zur Änderung des lokalen Krümmungsradius und der lokalen Fokussierung bei, so daß bei der neuen Potenzreihenentwicklung wiederum lineare Terme auftauchen. Diese können wie beschrieben eliminiert werden, so daß sich ein neuer Closed-Orbit ergibt, der zu dem Orbit der ersten Iteration zu addieren ist. Auf diese Weise schreitet die Iteration fort, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Der genaue Ablauf der Elimination der linearen Terme der entwickelten Hamiltonfunktion wird noch beschrieben (siehe S. 26).

Die hauptsächliche Abweichung des Closed-Orbit von der Sollbahn entsteht dabei durch Abweichungen des durch das lokale Dipolfeld vorgegebenen Krümmungsradius vom Krümmungsradius der Sollbahn. Zur Unterscheidung sei der Krümmungsradius der Dipole mit $1/\rho^0_{x,z}$ und der Krümmungsradius der Sollbahn mit $1/\rho^{ref}_{x,z}$ in x- und z-Richtung bezeichnet. Wie Anhang A.2 zu entnehmen, ist dabei für den Dipol: $eB_z/p_0 = 1/\rho^0_x,\ eB_x/p_0 = -1/\rho^0_z$.

Damit überhaupt eine Gleichgewichtsbahn existiert, muß der tatsächlich vom Teilchen durchlaufene Winkel mit dem von der Sollbahn durchlaufenen übereinstimmen. Für die horizontale Krümmung gilt damit

$$2\pi = \oint ds \frac{1}{\rho^{ref}_x} = \oint ds \frac{1}{\rho^0_x} = \frac{e}{p_0} \oint ds B_z\,,$$

da das Teilchen auf der Sollbahn eine geschlossene Kurve zurücklegen muß. Aus der Kenntnis der tatsächlichen Magnetfelder $B_z(s)$ kann mit dieser Gleichung ein Impuls p_0 bestimmt werden, bei dem das Teilchen auf einer geschlossenen Bahn läuft. Dieser Impuls wird im folgenden als Sollimpuls bezeichnet. Ist der Sollimpuls auf diese Weise festgelegt, kann für jeden Dipolmagneten der Krümmungsradius $1/\rho^0_{x,z} = \pm eB_{z,x}/p_0$ bestimmt werden. Durch p_0 ist ferner auch β_0 vorgegeben als $\beta_0 = p_0/\sqrt{p_0^2 + m^2}$.

Für einen Kreisbeschleuniger ist die Sollbahn im allgemeinen durch eine Anzahl von horizontal ablenkenden Dipolmagneten, die im weiteren als Hauptmagnete bezeichnet werden, bestimmt und als diejenige Bahn definiert, die ein Teilchen durchläuft, wenn jeder Hauptmagnet den Krümmungsradius $1/\rho^{ref}_x$ hat und das Dipolfeld ansonsten verschwindet. Bedingt durch zusätzliche Dipole und Abweichungen der Felder der Hauptmagnete untereinander ist jedoch immer $1/\rho^0_{x,z} \neq 1/\rho^{ref}_{x,z}$. Dies führt zu einer Abweichung des Closed-Orbit von der Sollbahn.

Der Sollimpuls p_0 ist der Impuls eines auf dem Closed-Orbit umlaufenden Teilchens. Um die Teilchenbewegung bezüglich des Impulses p_0 herauszustellen, wird (2.5) zunächst skaliert durch die Ersetzungen:

$$\tilde{H}_s = \frac{H_s}{p_0},\ \tilde{p}_\sigma = \frac{1}{p_0}\left(p_\sigma - \frac{p_0}{\beta_0^2}\right),\ \tilde{p}_x = \frac{p_x}{p_0},\ \tilde{p}_z = \frac{p_z}{p_0},\ \tilde{H}_{abstr} = \frac{H_{abstr}}{p_0}.$$

Hierbei wurde zunächst noch p_s um $\frac{E_0}{\beta_0} = \frac{p_0}{\beta_0^2}$ vermindert, um für $\tilde{p}_\sigma = 0$ zu gewährleisten, daß $p_s = p_0$ gilt. Dies ändert jedoch die kanonisch zugehörige Koordinate $\tilde{\sigma}$ nicht. Es ergibt sich, eingesetzt in (2.5), unter Berücksichtigung der Abstrahlung:

$$\tilde{H}_s = -n\left[\frac{eA_s}{p_0} + \sqrt{\left(\frac{p_s(\tilde{p}_\sigma)}{p_0}\right)^2 - \tilde{p}_x^2 - \tilde{p}_z^2}\right] + \tilde{p}_\sigma + \tilde{H}_{abstr}, \tag{2.6}$$

wobei in Gleichung (2.6) der konstante Anteil von H_s unterdrückt wurde. Im folgenden wird der Einfachheit halber die Tilde über den neuen Variablen weggelassen. Es ist jedoch zu beachten, daß es sich in den weiteren Formeln immer um impulsnormierte Größen handelt, wobei $\tilde{p}_\sigma$ zudem noch um $1/\beta_0^2$ verschoben ist. Genauso zeigt Gleichung (2.6), daß jeweils der impulsnormierte Feldvektor in die Berechnungen eingeht.

Das im Beschleuniger umlaufende Teilchenensemble muß jedoch nicht den mittleren Impuls p_0 haben, sondern der mittlere Teilchenimpuls weicht in der Regel um Δp vom Sollimpuls ab. Bei festem Magnetfeld und eingeschalteter Hochfrequenz (im folgenden als HF abgekürzt) ist durch deren Frequenz f_{HF} die relative Impulsabweichung $\frac{\Delta p}{p_0}$ bestimmt.

Ein Teilchenstrahl mit $\frac{\Delta p}{p_0} \neq 0$ hat eine andere Steifigkeit in den Magnetfeldern als ein Teilchenstrahl des Sollimpulses. Dies führt dazu, daß seine Gleichgewichtsbahn gegenüber der eines Strahls mit Sollimpuls verschoben ist. Beim Umlauf um den Beschleuniger ergibt sich dann eine andere Umlauflänge L, als für einen Strahl des Sollimpulses. Die Umlauflängenänderung ist in guter Näherung proportional zur relativen Impulsänderung des Teilchenstrahls:

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \alpha \frac{\Delta p}{p_0},$$

wobei α als Momentum-Compaction-Factor bezeichnet wird und in der Regel positiv ist. Bei eingeschalteter HF können Teilchen nur umlaufen, wenn sie im Mittel phasensynchron zur Schwingung der HF am Hohlraumresonator (im folgenden kurz als *Resonator* bezeichnet) anlangen. Daher muß die Bedingung:

$$\begin{aligned} T_{Uml} &= \frac{k}{f_{HF}} = \frac{L}{\beta} \simeq \frac{L_0}{\beta_0}\left(1 + \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta \beta}{\beta_0}\right) \\ &= \frac{L_0}{\beta_0}\left(1 + \frac{\Delta L}{L_0} - \frac{1}{\gamma_0^2}\frac{\Delta p}{p_0}\right) \\ &= \frac{L_0}{\beta_0}\left(1 + (\alpha - \frac{1}{\gamma_0^2})\frac{\Delta p}{p_0}\right) \end{aligned}$$

erfüllt sein, wobei k die Harmonischenzahl ist und die Zahl der Schwingungen der HF pro Teilchenumlauf angibt. Bei vorgegebener HF-Frequenz f_{HF} stellt sich auf Grund der Phasenfokussierung der Synchrotronschwingung $1 + \frac{\Delta p}{p_0}$ als mittlerer normierter Teilchenimpuls ein.

Im folgenden Text wird zwischen der mittleren konstanten Impulsabweichung eines Teilchens und dessen Energieschwingung unterschieden, die jeweils zu unterschiedlichen physikalischen Effekten führen. Zur besseren Unterscheidung wird die konstante Impulsabweichung mit $\frac{\Delta p}{p_0}$, der Momentanwert der Energieschwingung mit p_σ bezeichnet.

Lineare Hamiltonfunktion

In Gleichung (2.6) kann nun die Wurzel entwickelt werden, da $|\frac{p_s}{p_0}| \simeq 1$, während $|p_x|, |p_z| \ll 1$ sind. Zusätzlich kann der Ausdruck $\frac{p_s}{p_0} = \frac{1}{p_0}\sqrt{(p_\sigma p_0 \beta_0 + E_0)^2 - m^2}$ noch um $p_\sigma = 0$ entwickelt werden zu:

$$\frac{p_s}{p_0}(p_\sigma) = 1 + p_\sigma - \frac{1}{2\gamma_0^2}p_\sigma^2 - \frac{1}{2\gamma_0^2}p_\sigma^3 + \ldots$$

Beiträge bis zur zweiten Ordnung aus dem Feldvektor ergeben sich nur aus den Feldern von Resonator, Dipol und Quadrupol. Damit ist die lineare Hamiltonfunktion H_{lin}:

$$\begin{aligned} H_{lin} &= H_{lin,0} + H_{lin,x} + H_{lin,z} + H_{lin,\sigma} + H_{lin,Koppel} \text{ mit} \\ H_{lin,0} &= -\frac{1}{2} + \frac{LV'}{2\pi k p_0}\cos(\phi_0), \\ H_{lin,x} &= \frac{p_x^2}{2} + \frac{x}{2}(\frac{1}{\rho_x^0} - \frac{1}{\rho_x^{ref}}) + \frac{x^2}{2}(k_0 + \frac{1}{\rho_x^0 \rho_x^{ref}}), \\ H_{lin,z} &= \frac{p_z^2}{2} + \frac{z}{2}(\frac{1}{\rho_z^0} - \frac{1}{\rho_z^{ref}}) + \frac{z^2}{2}(-k_0 + \frac{1}{\rho_z^0 \rho_z^{ref}}), \\ H_{lin,\sigma} &= \frac{1}{2\gamma_0^2}p_\sigma^2 + \sigma\left(C_1(\frac{1}{\rho_x^0}^2 + \frac{1}{\rho_z^0}^2) - \frac{e}{p_0}V'\sin(\phi_0)\right) + \sigma^2\frac{\pi k}{L}\frac{e}{p_0}V'\cos(\phi_0), \\ H_{lin,Koppel} &= -\frac{p_\sigma x}{\rho_x^{ref}} - \frac{p_\sigma z}{\rho_z^{ref}}, \end{aligned}$$

wobei angenommen wurde, daß an einem Ort nicht gleichzeitig horizontale und vertikale Ablenkung sowie Ablenkung und Beschleunigung stattfindet. Die Anteile der Hamiltonfunktion $H_{lin,x}$, $H_{lin,z}$, $H_{lin,\sigma}$ fassen dabei jeweils die Terme in einer Koordinate und dem zugeordneten Impuls zusammen, während der Anteil $H_{lin,Koppel}$ die Kopplung beschreibt. Der konstante Anteil $H_{lin,0}$ hat keinen Einfluß auf die Bewegungsgleichungen und wird im folgenden weggelassen.

Der Anteil der Kopplung $H_{lin,Koppel}$, der von der Krümmung der Sollbahn herrührt, kann mit Hilfe der Dispersionsfunktionen $\vec{D} = (D_x(s), D_z(s))$ aufgehoben werden. Die Dispersionsfunktionen sind dabei horizontal und vertikal diejenigen Gleichgewichtsbahnen, denen ein Teilchen mit $p_\sigma \equiv 1$ folgen würde. In H_{lin} muß zu ihrer Bestimmung die Ersetzung $p_\sigma \to 1$, $(x, z) \to \vec{D}$, $(p_x, p_z) \to \vec{p}_D$ vorgenommen werden. Da D_x, D_z Gleichgewichtsbahnen sind, wird zusätzlich Periodizität mit dem Ringumfang L gefordert. Ferner sollen die Dispersionsfunktionen nicht den Anteil der Dipolstörung erfassen. Nach Unterdrückung der Dipolstörung ergibt sich für die transversalen Anteile der Hamiltonfunktion damit:

$$\begin{aligned} H_D &= H_{D,x} + H_{D,z}, \\ H_{D,x} &= \frac{p_{Dx}^2}{2} + \frac{D_x^2}{2}(k_0 + \frac{1}{\rho_x^0 \rho_x^{ref}}) - \frac{D_x}{\rho_x^{ref}}, \\ H_{D,z} &= \frac{p_{Dz}^2}{2} + \frac{D_z^2}{2}(-k_0 + \frac{1}{\rho_z^0 \rho_z^{ref}}) - \frac{D_z}{\rho_z^{ref}}, \end{aligned}$$

woraus als "Bewegungsgleichungen" für $\vec{D}$ folgt:

$$D_x'' = \frac{1}{\rho_x^{ref}} - D_x(k_0 + \frac{1}{\rho_x^0 \rho_x^{ref}}), \tag{2.7}$$

$$D_z'' = \frac{1}{\rho_z^{ref}} - D_z(-k_0 + \frac{1}{\rho_z^0 \rho_z^{ref}}). \tag{2.8}$$

Damit sind $H_{D,x}, H_{D,z}$ in der Standardform der linearen Hamiltonfunktion:

$$H_{lin,std} = \frac{1}{2} F p_\xi^2 + R\xi p_\xi + \frac{1}{2} G\xi^2 + S\xi + T p_\xi. \tag{2.9}$$

Die Lösung der dieser Hamiltonfunktion zugeordneten Bewegungsgleichung mittels eines (3×3)-Matrixformalismus ist in Anhang A.4 dargestellt. Die periodischen Lösungen können danach in einfacher Weise bestimmt werden, die Anfangsbedingungen der periodischen Lösungen folgen aus den Eigenvektoren der den Hamiltonfunktionen zugeordneten Ringmatrizen. Da im allgemeinen die Sollbahn des Beschleunigers in der horizontalen Ebene liegt und $\frac{1}{\rho_z} \ll 1$ gilt, ist $D_z(s) \ll 1$ und kann in der Praxis vernachlässigt werden.

Mit Hilfe der Funktionen $D_x(s), D_z(s)$ kann die Kopplung nun aufgehoben werden durch die kanonische Transformation [Barber86], S. 7.[6]

$$\begin{aligned} F_2(x, z, \sigma, \tilde{p}_x, \tilde{p}_z, \tilde{p}_\sigma; s) &= (x - \tilde{p}_\sigma D_x(s))\tilde{p}_x + \tilde{p}_\sigma D_x'(s) x - \frac{1}{2} D_x(s)' D_x(s) \tilde{p}_\sigma^2 + \\ &\quad (z - \tilde{p}_\sigma D_z(s))\tilde{p}_z + \tilde{p}_\sigma D_z'(s) z - \frac{1}{2} D_z(s)' D_z(s) \tilde{p}_\sigma^2 + \\ &\quad \tilde{p}_\sigma \cdot \sigma, \end{aligned}$$

so daß:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \tfrac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_x} &&= x - \tilde{p}_\sigma D_x, \\ p_x &= \tfrac{\partial F_2}{\partial x} &&= \tilde{p}_x + \tilde{p}_\sigma D_x', \\ \tilde{z} &= \tfrac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_z} &&= z - \tilde{p}_\sigma D_z, \\ p_z &= \tfrac{\partial F_2}{\partial z} &&= \tilde{p}_z + \tilde{p}_\sigma D_z', \\ \tilde{\sigma} &= \tfrac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_\sigma} &&= -D_x \tilde{p}_x + D_x'(x - \tilde{p}_\sigma D_x) - D_z \tilde{p}_z + D_z'(z - \tilde{p}_\sigma D_z) + \sigma \\ & &&= -D_x \tilde{p}_x + D_x' \tilde{x} - D_z \tilde{p}_z + D_z' \tilde{z} + \sigma, \\ p_\sigma &= \tfrac{\partial F_2}{\partial \sigma} &&= \tilde{p}_\sigma, \\ \frac{\partial F_2}{\partial s} & &&= \tilde{p}_\sigma \left(\tilde{p}_x D_x' + x D_x'' - \frac{p_\sigma}{2}(D_x'^2 + D_x D_x'') + \tilde{p}_z D_z' + z D_z'' - \frac{p_\sigma}{2}(D_z'^2 + D_x D_z'') \right) \end{aligned}$$

und sich in den neuen Koordinaten ergibt:

$$H_{lin} = H_{lin,x} + H_{lin,z} + H_{lin,\sigma} + H_{lin,VD},$$

[6] Man beachte den Unterschied der Transformation zu der in [Bengtsson], S. 25 angegebenen.

$$
\begin{aligned}
H_{lin,x} &= \frac{p_x^2}{2} + \frac{x}{2}\Delta\left(\frac{1}{\rho_x}\right) + \frac{x^2}{2}(k_0 + \frac{1}{\rho_x^0 \rho_x^{ref}}) + C_1(D_x p_x - D'_x x)(\frac{1}{\rho_x^0}^2 + \frac{1}{\rho_z^0}^2),\\
H_{lin,z} &= \frac{p_z^2}{2} + \frac{z}{2}\Delta\left(\frac{1}{\rho_z}\right) + \frac{z^2}{2}(-k_0 + \frac{1}{\rho_z^0 \rho_z^{ref}}) + C_1(D_z p_z - D'_z z)(\frac{1}{\rho_x^0}^2 + \frac{1}{\rho_z^0}^2),\\
H_{lin,\sigma} &= \frac{1}{2\gamma_0^2}p_\sigma^2 + \frac{p_\sigma}{2}(\Delta\left(\frac{1}{\rho_x}\right) D_x + \Delta\left(\frac{1}{\rho_z}\right) D_z) - \frac{p_\sigma^2}{2}(\frac{D_x}{\rho_x^{ref}} + \frac{D_z}{\rho_z^{ref}})\\
&\quad -\sigma^2 \frac{k\pi}{L}\frac{eV'}{p_0}\cos(\phi_0) - \sigma\frac{eV'}{p_0}\sin(\phi_0) + \sigma C_1(\frac{1}{\rho_x^0}^2 + \frac{1}{\rho_z^0}^2),\\
H_{lin,VD} &= H_{lin,VD}(\frac{V'(s)}{p_0}\cdot D_x,\ \frac{V'(s)}{p_0}\cdot D'_x,\ \frac{V'(s)}{p_0}\cdot D_z,\ \frac{V'(s)}{p_0}\cdot D'_z),
\end{aligned}
$$

wobei die Bewegungsgleichungen (2.7), (2.8) für $\vec{D}''$ eingesetzt und zur Vereinfachung die Tilden über den neuen Impulsen weggelassen wurden. Ferner wurde für die Feldabweichungen der Dipole vom Sollfeld die Bezeichnung $\Delta\left(\frac{1}{\rho_{x,z}}\right) = \frac{1}{\rho_{x,z}^0} - \frac{1}{\rho_{x,z}^{ref}}$ eingeführt.

Damit ist der Kopplungsterm $H_{lin,Koppel}$ aus der Hamiltonfunktion beseitigt, dafür taucht ein neuer Kopplungsterm $H_{lin,VD}$ auf. Im allgemeinen ist jedoch $D_{x,z}, D'_{x,z}$ am Ort eines Resonators verschwindend gering, so daß das Produkt aus $V'(s)/p_0$ und D bzw. D' sehr klein ist. Darum kann $H_{lin,VD}$ in der Regel gegenüber den linearen Termen der Störungsentwicklung vernachlässigt werden. Die Vernachlässigung von $H_{lin,VD}$ durchbricht jedoch im strengen Sinn die Störungsentwicklung.

Bei endlicher Dispersion im Resonator ist der Anteil $H_{lin,VD}$ jedoch nicht vernachlässigbar. Er ist insbesondere mitverantwortlich für die Erzeugung von Synchro-Betatron-Resonanzen.[7]

Nach Vernachlässigung von $H_{lin,VD}$ ist die Hamiltonfunktion H_{lin} entkoppelt und kann für die drei Phasenraumdimensionen unabhängig voneinander gelöst werden. Da die Anteile $H_{lin,x}, H_{lin,z}, H_{lin,\sigma}$ wieder in der Standardform (2.9) vorliegen, ist die Lösung mit dem in Anhang A.4 angegebenen Verfahren möglich. Wie im Falle der Dispersionsbahn wird jedoch zunächst versucht, den inhomogenen Anteil der Bewegungsgleichungen als periodische Bahn abzuspalten, der die mittlere Teilchenposition an einem Ort beim mehrfachen Umlauf um den Beschleuniger wiedergibt. Diese mittlere periodische Teilchenbahn ist der Closed-Orbit $\vec{C}$. Der Closed-Orbit wird ermittelt, indem in H_{lin} die Ersetzung $(x, z, \sigma) \to \vec{C}$ und $(p_x, p_z, p_\sigma) \to p_C$ durchgeführt wird. Die "Bewegungsgleichungen" für $\vec{C}$ ergeben sich aus den kanonischen Gleichungen zu:

$$
\begin{aligned}
C'_x &= p_{Cx} + C_1 D_x(\frac{1}{\rho_x^0}^2 + \frac{1}{\rho_z^0}^2),\\
C'_z &= p_{Cz} + C_1 D_z(\frac{1}{\rho_x^0}^2 + \frac{1}{\rho_z^0}^2),\\
C'_\sigma &= -p_{C\sigma}(\frac{D_x}{\rho_x^{ref}} + \frac{D_z}{\rho_z^{ref}}) + \frac{1}{2}(\Delta\left(\frac{1}{\rho_x}\right) D_x + \Delta\left(\frac{1}{\rho_z}\right) D_z),\\
p'_{Cx} &= -\frac{1}{2}\Delta\left(\frac{1}{\rho_x}\right) + C_1 D'_x(\frac{1}{\rho_x^0}^2 + \frac{1}{\rho_z^0}^2) - C_x(k_0 + \frac{1}{\rho_x^0 \rho_x^{ref}}),\\
p'_{Cz} &= -\frac{1}{2}\Delta\left(\frac{1}{\rho_z}\right) + C_1 D'_z(\frac{1}{\rho_x^0}^2 + \frac{1}{\rho_z^0}^2) - C_z(-k_0 + \frac{1}{\rho_z^0 \rho_z^{ref}}),\\
p'_{C\sigma} &= -C_1(\frac{1}{\rho_x^0}^2 + \frac{1}{\rho_x^0}^2) + \frac{eV'}{p_0}\sin(\phi_0) + C_\sigma \frac{k\pi}{L}\frac{eV'}{p_0}\cos(\phi_0).
\end{aligned}
$$

Für C_x, C_z lassen sich die Bewegungsgleichungen mit dem in Anhang A.4 angegebenen Verfahren unter Forderung der Periodizität lösen.

Für C_σ ist zunächst der Winkel als derjenige Winkel ϕ_0 zu bestimmen, für den gilt:

$$
< \frac{eV'}{p_0}\sin(\phi_0) - C_1(\frac{1}{\rho_x^2}^2 + \frac{1}{\rho_z^0}^2) >_s = 0,
$$

[7] Zur genaueren Analyse dieser Synchro-Betatron-Resonanzen siehe [Barber86], [Ripken], [Barber94].

also die mittlere pro Umlauf abgestrahlte Energie gleich der im Resonator aufgenommenen ist. Ferner ist zu beachten, daß die Koeffizienten von $H_{lin,\sigma}$ innerhalb eines Elementes nicht konstant sind, da sie jeweils die Dispersionsfunktion $D_{x,z}$ enthalten. Diese läßt sich jedoch, wie in Anhang A.4 dargestellt, analytisch integrieren, und so läßt sich der dort entwickelte Formalismus zur Lösung der $H_{lin,\sigma}$ zugeordneten Bewegungsgleichungen verwenden, wenn in der Lösung die Ersetzung $\epsilon \rightarrow \frac{1}{l}\int_0^l \epsilon(l')dl'$ durchgeführt wird, wobei $\epsilon = \{F,\ G,\ R,\ S,\ T\}$ jeweils ein Koeffizient der Standard–Hamiltonfunktion (2.9) ist. Ferner ist zu beachten, daß $C'_\sigma \neq p_{C,\sigma}$. Der hier hinzutretende Term ist durch die Dispersionstransformation (2.10) verursacht. Er führt zu einer sägezahnartigen Modulation des Closed-Orbit, die daher rührt, daß das Teilchen auf seinem Umlauf einen Energieverlust erleidet, der im Resonator wieder ausgeglichen wird.

Der longitudinale Closed-Orbit C_σ setzt sich zusammen aus zwei Anteilen. Zum einen aus einem Störungsanteil, der durch Dipolfehler verursacht ist, zum anderen, analog zum transversalen Closed-Orbit, aus einem mit dem Umlauf periodischen sägezahnförmigen Energieverlauf. Dieser ist durch einen kontinuierlichen Energieabfall in den Dipolen und einen sprungartigen Energiegewinn im Resonator gekennzeichnet.

Eine genaue Analyse der longitudinalen Bewegung findet sich in Anhang A.5.

Mit dem Closed-Orbit $\vec{C}$ läßt sich der inhomogene Anteil der Bewegungsgleichungen durch eine Koordinatentransformation eliminieren. Sei $\vec{\xi}$ der Vektor der Koordinaten $x,\ z,\ \sigma$ und $\vec{p}_\xi$ der Vektor der zugehörigen Impulse, dann ist:[8]

$$F_2 = (\vec{\xi} - \vec{C})(\vec{\tilde{p}}_\xi + \vec{p}_C),$$

und dem daraus folgenden Transformationsgesetz:

$$\begin{aligned} \vec{\xi} &= \vec{\tilde{\xi}} + \vec{C}, \\ \vec{p}_\xi &= \vec{\tilde{p}}_\xi + \vec{p}_C, \\ \frac{\partial F_2}{\partial s} &= -\vec{C}'\vec{p} + \vec{p}_C\vec{\tilde{p}}_\xi. \end{aligned}$$

Nach dieser Transformation ergibt sich H_{lin} in neuen Koordinaten zu:

$$\begin{aligned} H_{lin} &= H_{lin,x} + H_{lin,z} + H_{lin,\sigma} + H_{lin,s}, \\ H_{lin,x} &= \frac{p_x^2}{2} + \frac{x^2}{2}(k_0 + \frac{1}{\rho_x^0 \rho_x^{ref}}), \\ H_{lin,z} &= \frac{p_z^2}{2} + \frac{z^2}{2}(-k_0 + \frac{1}{\rho_z^0 \rho_z^{ref}}), \\ H_{lin,\sigma} &= \frac{p_\sigma^2}{2}(\frac{1}{\gamma_0^2} - \frac{D_x}{\rho_x^{ref}} + \frac{D_z}{\rho_z^{ref}}) - \sigma^2 \frac{k\pi}{L}\frac{eV'}{p_0}\cos(\phi_0), \\ H_{lin,s} &= H_{lin,s}(s). \end{aligned} \tag{2.10}$$

so daß in diesen Koordinaten eine quasiharmonische Schwingung um den Nullpunkt stattfindet. Dabei ist der Anteil $H_{lin,s}$ nur von der Weglänge s abhängig und spielt damit für die Entwicklung der Teilchenbewegung keine Rolle. Er kann also in den weiteren Gleichungen vernachlässigt werden.[9] Die so gefundenen Koordinaten stehen zu den ursprünglichen im Zusammenhang:

$$\vec{\xi}_{alt} = p_\sigma \vec{D} + \vec{C} + \xi_{neu}.$$

Optische Funktionen

Die quasiharmonische Teilchenbewegung kann mit Hilfe der optischen Funktionen $\alpha_\xi,\ \beta_\xi$ beschrieben werden, wobei ξ die Phasenraumdimensionen $x,\ z,\ \sigma$ bezeichnet. Als neue Koordinaten werden dabei ein Amplitudenfaktor J_ξ und die Phase der quasiharmonischen Schwingung ϕ_ξ eingeführt: (siehe z.B. [Wilson], S. 49):

$$F_1(x,\sigma,z,\phi_x,\phi_\sigma,\phi_z) = \sum_{\xi=x,\sigma,z} -\frac{\xi^2}{2\beta_\xi}(\tan(\phi_\xi) + \alpha_\xi),$$

[8] Zu einer analogen Transformation siehe [Barber94], S. 12 f.

[9] Der Anteil $H_{lin,s}$ der Hamiltonfunktion kann durch eine kanonische Transformation mit der Funktion $F_2 = \vec{\xi}\cdot\vec{\tilde{p}}_\xi - \int_{s0}^{s} H_{lin,s}(s')ds'$ eliminiert werden, wobei die Koordinaten unverändert bleiben, aber durch Addition von $\frac{\partial F_2}{\partial s}$ der Anteil $H_{lin,s}$ wegfällt.

$$
\begin{aligned}
p_\xi &= \frac{\partial F_1}{\partial \xi} = \frac{\xi}{\beta}(\tan(\phi_\xi) + \alpha_\xi), \\
J_\xi &= -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{\xi}} = -\frac{\xi^2}{2\beta_\xi}\frac{1}{\cos(\phi_\xi)^2}, \\
\frac{\partial F_1}{\partial s} &= -J_\xi \cos(\phi_\xi)^2(-\alpha' + (\alpha + \tan(\phi_\xi)\frac{\beta'}{\beta}) \\
&= -J_\xi \cos(\phi_\xi)^2(-\frac{1+\alpha^2}{\beta}F_\xi - \beta G_\xi) + 2(\alpha + \tan(\phi_\xi))\frac{\beta R_\xi - \alpha F_\xi}{\beta}.
\end{aligned}
$$

Dabei sind α_ξ, β_ξ mit dem Umlauf periodische Funktionen.[10] Die Berechnung der optischen Funktionen kann mit Hilfe der Transportmatrizen erfolgen, wie in Anhang A.4 dargestellt. Ebenfalls wurden für die Ableitungen der optischen Funktionen α'_ξ, β'_ξ die in Anhang A.4 hergeleiteten Ergebnisse eingesetzt. Die sich ergebenden neuen Koordinaten ϕ_ξ, J_ξ sind nicht mehr kartesisch. Sie werden als Winkel-Wirkungs-Variablen bezeichnet.

Die dargestellte Transformation entspricht dem in der Beschleunigerphysik üblichen Ansatz für die quasiharmonische Schwingung (siehe z.B.: [Courant], S. 11):

$$\xi(s) = \sqrt{2J\beta(s)}\cos(\phi_\xi).$$

Da sich alle optischen Funktionen auf $\beta(s)$ zurückführen lassen, wird die so beschriebene quasiharmonische Schwingung auch als Betatron-Schwingung bezeichnet.

Die neue Hamiltonfunktion ist:

$$\tilde{H}_{lin} = H_{lin} + \frac{\partial F_1}{\partial s} = \sum_{\xi=x,\sigma,z} \frac{F_\xi J_\xi}{\beta_\xi}.$$

Diese Funktion ist unabhängig von ϕ_ξ, und damit ist J_ξ eine Erhaltungsgröße der Bewegung. Jedoch ist $\tilde{H}_{lin}$ noch von s abhängig. Mit Hilfe der Funktion $\mu_\xi = \int F_\xi/\beta_\xi ds$ kann die Abhängigkeit aufgehoben werden, indem eine weitere Transformation mit der Erzeugenden:

$$F_2(\phi_x, \phi_\sigma, \phi_z, \tilde{J}_x, \tilde{J}_\sigma, \tilde{J}_z) = \sum_{\xi=x,\sigma,z} \tilde{J}_\xi \cdot (\frac{2\pi Q}{L}s - \mu_\xi + \phi_\xi),$$

mit $Q_\xi = \mu(s_0 + L) - \mu(s_0)$ durchgeführt wird.[11] Die Funktion μ_ξ mißt dabei den Phasenvorschub der Schwingung beim Umlauf um den Ring. Es folgt:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\phi}_\xi &= \frac{\partial F_2}{\partial s} &&= \frac{2\pi Q_\xi}{L}s - \mu_\xi + \phi_\xi, \\
J_\xi &= \frac{\partial F_s}{\partial \tilde{\phi}_\xi} &&= \tilde{J}_\xi, \\
\frac{\partial F_2}{\partial s} &= \frac{2\pi Q}{L} - \mu' &&= \frac{2\pi Q}{L} - \frac{F_\xi}{\beta_\xi},
\end{aligned}
$$

wobei der Wert für μ' aus Anhang A.4 eingesetzt wurde. Es ergibt sich als neue Hamiltonfunktion:

$$\tilde{H}_{lin} = H_{lin} + \frac{\partial F_2}{\partial s} = \sum_{\xi=x,\sigma,z} \frac{2\pi Q_\xi}{L} J_\xi.$$

Diese Hamiltonfunktion ist damit sowohl unabhängig von den Winkelvariablen ϕ_ξ als auch unabhängig vom Ort s im Beschleuniger. Die Teilchenbewegung in diesen Koordinaten ist gegeben als:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}J_\xi &= 0 &&\Leftrightarrow J_\xi = const, \\
\frac{\partial}{\partial s}\phi_\xi &= \frac{2\pi Q_\xi}{L} &&\Leftrightarrow \phi_\xi = \phi_{\xi 0} + \frac{2\pi Q_\xi}{L}(s - s_0),
\end{aligned}
$$

für $\xi = x, \sigma, z$. Die Wirkung J_ξ bleibt also erhalten, während sich der Winkel ϕ_ξ linear mit der Umlauflänge im Beschleuniger ändert.

[10] Allgemein kann die Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung mit periodischen Koeffizienten $\vec{x}'(s) = A(s)x(s)$, $A(s) = A(s+L)$ dargestellt werden als $P(s)\exp(R \cdot s)\vec{x}_0$, wobei $P(s) = P(s+L)$ periodisch und $R = const$ (Flouqet-Theorem).

[11] Da $\mu(s) = \int \frac{F(s)}{\beta} ds$, so ist $\mu(s_0 + L) - \mu(s_0) = \int^{s_0+L} \frac{F}{\beta} ds - \int^{s_0} \frac{F}{\beta} ds = \oint \frac{F}{\beta} ds$ unabhängig von s_0. Damit ist Q unabhängig von der Ringposition.

2.2.1 Nichtlineare Resonanzen

In den vorigen Abschnitten wurde nur der lineare Anteil der Teilchenbewegung betrachtet, d.h. nur Terme der Hamiltonfunktion in erster und zweiter Ordnung der Koordinaten und Impulse.

Terme höherer Ordnung führen zu einem geänderten Teilchenverhalten. Dabei wird die lineare Bahn im Phasenraum deformiert. Eine qualitative Änderung der Teilchenbahn ergibt sich jedoch nur im Falle von Resonanzen, wie zunächst gezeigt werden soll. Daher wird im weiteren das Teilchenverhalten in der Nähe von Resonanzen untersucht.

Nichtlinearer Anteil der Hamiltonfunktion

Der nichtlineare Anteil der Hamiltonfunktion hat verschiedene Ursachen. Diese sind:

- Nichtlineare Felder der optischen Elemente (nichtlineare Elemente und nichtlineare Fehler linearer Elemente),
- Geometrie des mitgeführten Koordinatensystems: Faktor $1 + \frac{x}{\rho_x^{ref}} + \frac{z}{\rho_z^{ref}}$,
- Taylorentwicklung der kinematischen Wurzel $\sqrt{\frac{p_s}{p_0}^2 - p_x^2 - p_z^2}$,
- Koordinatentransformation, speziell Dispersionstransformation,

wobei ein Term der Hamiltonfunktion auf unterschiedliche Ursachen zurückgehen kann.

Die Terme sind nach ihrer Stärke im relevanten Strahlbereich zu ordnen. Die Stärke ist zum einen bestimmt durch die Ordnung des Termes, zum anderen durch die Größe des Koeffizienten des Termes. Der relevante Strahlbereich ergibt sich entweder aus Messungen oder aus Abschätzung der sich aus dem Wechselspiel von Synchrotronlicht-Abstrahlung und Energiegewinn im Resonator ergebenden natürlichen Strahlbreite.

Schon beim Aufstellen der Hamiltonfunktion müssen bestimmte Annahmen über Feldstärken und deren Fehler gemacht werden. Die Auswahl der relevanten Terme der Hamiltonfunktion ist von diesen Annahmen abhängig. Erst im Vergleich mit experimentellen Daten kann entschieden werden, ob die berücksichtigten Terme der Hamiltonfunktion ein hinreichend exaktes Bild der Teilchenbewegung liefern.

Mit Feldelementen bis zur dritten Ordnung berücksichtigt, ist H_{nl} in energienormierten Koordinaten:

$$
\begin{aligned}
H_{nl} \quad = \quad & \underbrace{\frac{m_0}{6}\left((x+p_\sigma D_x)^3 - 3(x+p_\sigma D_x)(z+p_\sigma D_z)^2\right)}_{nichtlin.\ Felder} + \\
& \underbrace{\frac{1}{6}\frac{eV'}{p_0}\left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2 \sin(\phi_0)\cdot(\sigma + p_x D_x - x D_x' + p_z D_z - z D_z')^3}_{nichtlin.\ Felder} + \\
& \left(\underbrace{\frac{x+p_\sigma D_x}{\rho_x^{ref}} + \frac{z+p_\sigma D_z}{\rho_z^{ref}}}_{Krümmung} - \underbrace{p_\sigma}_{Entw.d.Wurzel}\right)\frac{(p_x+p_\sigma D_x')^2 + (p_z+p_\sigma D_z')^2}{2},
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

wobei Separated-Function-Magnete und verschwindende Dispersion am Ort des Resonators angenommen wurden.

Da bei **ELSA** eine Resonanzextraktion mit Sextupolen betrieben wird, sind Terme bis zur dritten Ordnung relevant, wobei die Stärke der Feldterme überwiegt. Im Simulator wird daher von einem Modell dritter Ordnung ausgegangen, jedoch ist das Hinzufügen von Termen höherer Ordnung durch den Benutzer leicht möglich.

Chromatizität

Hat ein Teilchen die Impulsabweichung $p_\sigma \neq 0$, so erfährt es in den Beschleunigermagneten andere fokussierende Kräfte als ein Teilchen mit Sollenergie $p_\sigma = 0$, was zu einem geänderten Arbeitspunkt

führt. Diese anschauliche Erklärung kann im Rahmen des Hamiltonformalismus begründet werden (siehe auch [Barber86], S. 46).

Im Beschleuniger ist in der Regel $Q_\sigma \ll Q_x, Q_z$, daher kann p_σ in guter Näherung als über einen Umlauf konstant angesehen werden. Der longitudinale Impuls p_σ kann damit als Parameter von H_{nl} aufgefaßt werden. Nach Potenzen von p_σ geordnet, ist H_{nl}:

$$H_{nl} = \sum_{i=0}^{3} H_{nl,i} p_\sigma^i,$$

wobei die $H_{nl,i}$ aus der Hamiltonfunktion (2.11) abgelesen werden können. Zur Berechnung der in p_σ linearen Arbeitspunktänderung, bedingt durch den Term $H_{nl,1}$, muß die Änderung der gemittelten Hamiltonfunktion berechnet werden. Die Änderung ist:

$$< \Delta H >_1 = p_\sigma < H_{nl,1} > = \frac{p_\sigma}{L(4\pi)^2} \oint d\phi_x d\phi_z H_{nl,1}(J_x, J_z, \phi_x, \phi_z),$$

wobei $H_{nl,1}$ zur Mittelung in Winkel-Wirkungs-Variablen ausgedrückt werden muß. Die Integration ergibt:

$$\begin{aligned} < \Delta H >_1 \quad = \frac{p_\sigma}{2L} \oint \quad & J_x \left(-\gamma_x - \frac{2\alpha_x D_x'}{\rho_x^{ref}} + \gamma_x \left(\frac{D_x}{\rho_x^{ref}} + \frac{D_z}{\rho_z^{ref}} \right) + m_0 D_x \beta_x \right) + \\ & J_z \left(-\gamma_z - \frac{2\alpha_z D_z'}{\rho_z^{ref}} + \gamma_z \left(\frac{D_x}{\rho_x^{ref}} + \frac{D_z}{\rho_z^{ref}} \right) - m_0 D_x \beta_z \right) ds. \end{aligned}$$

Bei diesem Integral ist die Wirkung der Randfelder der Dipolmagnete zu berücksichtigen, die zu Beginn und Ende jedes Dipols einen Term mit $k_0 = -\tan(\epsilon)/\rho^0 \cdot \delta(s - s_0)$ beitragen, wobei ϵ der Kantenwinkel und s_0 die Ein- bzw. Austrittsposition des Strahls ist. Der Kopplungsterm $H_{nl}(J_x \cdot J_z)$ fällt bei der Integration weg.[12] Die Arbeitspunktänderung in x, z ergibt sich dann, mit $\oint \gamma_{x,z}\, ds = \oint \beta_{x,z} \left(\pm k + \frac{1}{\rho_{x,z}^{ref} \rho_{x,z}^0} \right) ds$ (siehe Gleichung (A.4) in Anhang A.4 mit $F = 1$, G aus Gleichung (2.10)):

$$\begin{aligned} \Delta Q_{x,z} &= \frac{L}{2\pi} \frac{\partial < \Delta H >_1}{\partial J_{x,z}}, \\ \Delta Q_x &= \frac{p_\sigma}{4\pi} \oint \left[-\beta_x \left(k + \frac{1}{\rho_x^{ref} \rho_x^0} \right) - \frac{2\alpha_x D_x'}{\rho_x^{ref}} + \gamma_x \left(\frac{D_x}{\rho_x^{ref}} + \frac{D_z}{\rho_z^{ref}} \right) + m_0 D_x \beta_x \right] ds, \\ \Delta Q_z &= \frac{p_\sigma}{4\pi} \oint \left[-\beta_z \left(-k + \frac{1}{\rho_z^{ref} \rho_z^0} \right) - \frac{2\alpha_z D_z'}{\rho_z^{ref}} + \gamma_z \left(\frac{D_x}{\rho_x^{ref}} + \frac{D_z}{\rho_z^{ref}} \right) - m_0 D_x \beta_z \right] ds, \end{aligned}$$

was die bekannten Ausdrücke für die Chromatizität wiedergibt. Die Erweiterungen spielen speziell für kleine Beschleuniger eine Rolle. Dieses Verfahren kann durch analoge Behandlung von $H_{nl,2}, H_{nl,3}$ zur Berechnung der chromatischen Arbeitspunktänderung mit p_σ in höherer Ordnung verwendet werden.

Durch die chromatizitätsbedingte Arbeitspunktänderung ändert sich das Resonanzverhalten. Im folgenden sei jedoch zunächst $p_\sigma = 0$ angenommen. Das Verhalten eines Teilchens in der Nähe einer Resonanz wird untersucht. Erst danach wird betrachtet, wie ein endliches p_σ das Resonanzverhalten beeinflußt.

Nichtresonanter Fall

Ist der nichtlineare Anteil festgelegt, kann die Hamiltonfunktion in Winkel-Wirkungs-Variablen ausgedrückt werden. Da sie periodisch mit dem Umlauf ist, ist eine Fourierentwicklung möglich:

$$H = < H(\vec{J}) > + \sum_{\vec{n} \neq (0,\ldots,0)} H_{\vec{n}}(\vec{J}) \exp(i\vec{n} \cdot \vec{\phi}),$$

[12] Für Combined-Function-Magnete muß der Term $< \Delta H >_{1,cf} = J_x \beta_x k \cdot \left(3D_x/\rho_x^{ref} + D_z/\rho_z^{ref} \right) - J_z k \beta_z \cdot \left(D_x/\rho_x^{ref} + 3D_z/\rho_z^{ref} \right)$ zu $< \Delta H >_1$ hinzuaddiert werden.

wobei ein $\vec{\xi} = (\xi_x, \xi_\sigma, \xi_z, s)$ bezeichnet, und n_x, n_σ, n_z, n_s ganze Zahlen sind. Hierbei wird also ein erweiterter Phasenraum verwendet, in dem die Koordinate $\phi_s = s$ ist, jedoch der zugeordnete Impuls J_s nicht explizit auftaucht.

Um die $\vec{\phi}$-Abhängigkeit von H zu eliminieren, so daß die Wirkungen wiederum erhalten sind, muß eine kanonische Transformation durchgeführt werden. Mit:

$$\begin{aligned}
F_2(\vec{\phi}, \vec{\tilde{J}}) &= \vec{\phi} \cdot \vec{\tilde{J}} + S(\vec{\phi}, \vec{\tilde{J}}) \\
&= \vec{\phi} \cdot \vec{\tilde{J}} + \sum_{\vec{n} \neq (0,\ldots,0)} S_{\vec{n}}(\vec{\tilde{J}}) \exp(i\vec{n} \cdot \vec{\phi}), \\
\vec{J} = \frac{\partial F_2}{\partial \vec{\phi}} &= \vec{\tilde{J}} + \frac{\partial S(\vec{\phi}, \vec{\tilde{J}})}{\partial \vec{\phi}} \\
&= \vec{\tilde{J}} + i \sum_{\vec{n} \neq (0,\ldots,0)} \vec{n} S_{\vec{n}}(\vec{\tilde{J}}) \exp(i\vec{n} \cdot \vec{\phi}), \\
\vec{\tilde{\phi}} = \frac{\partial F_2}{\partial \vec{\tilde{J}}} &= \vec{\phi} + \frac{\partial S(\vec{\phi}, \vec{\tilde{J}})}{\partial \vec{\tilde{J}}},
\end{aligned}$$

soll versucht werden, die Abhängigkeit von H in linearer Ordnung aufzuheben. Dabei sind $H_{\vec{n}}, S$, $\frac{\partial S}{\partial \vec{\tilde{J}}}, \frac{\partial S}{\partial \vec{\phi}} \ll 1$, so daß Terme, in denen ein Produkt dieser Größen vorkommt, vernachlässigt werden können.

Es soll in den neuen Koordinaten $\frac{\partial \vec{\tilde{J}}}{\partial s} = 0$ sein. Dazu muß gelten:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \vec{\tilde{J}}}{\partial s} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \vec{\tilde{\phi}}} &= \frac{\partial}{\partial \vec{\tilde{\phi}}} < H(\vec{J}(\vec{\tilde{J}}, \vec{\tilde{\phi}})) > + \sum_{\vec{n} \neq (0,\ldots,0)} H_{\vec{n}}(\vec{J}(\vec{\tilde{J}}, \vec{\tilde{\phi}})) \exp(i\vec{n}\vec{\phi}) \\
&= \frac{\partial}{\partial \vec{\tilde{\phi}}} \left(< H(\vec{\tilde{J}} + \frac{\partial S}{\partial \vec{\phi}}) > + \sum_{\vec{n} \neq (0,\ldots,0)} H_{\vec{n}}(\vec{\tilde{J}} + \frac{\partial S}{\partial \vec{\phi}}) \exp(i\vec{n}\vec{\phi}) \right) \\
&\simeq \frac{\partial}{\partial \phi} \left(< H(\vec{\tilde{J}}) > + \frac{\partial < H(\vec{\tilde{J}}) >}{\partial \vec{\tilde{J}}} \frac{\partial S}{\partial \vec{\phi}} + \sum_{\vec{n} \neq (0,\ldots,0)} H_{\vec{n}}(\vec{\tilde{J}}) \exp(i\vec{n}\vec{\phi}) \right) \\
&= \sum_{\vec{n} \neq (0,\ldots,0)} i\vec{n} \left(i\vec{\omega}(\vec{\tilde{J}}) \cdot \vec{n} S_{\vec{n}} \exp(i\vec{n}\vec{\phi}) + H_{\vec{n}}(\vec{\tilde{J}}) \exp(i\vec{n}\vec{\phi}) \right),
\end{aligned}$$

wobei $\vec{\omega}(\vec{\tilde{J}}) = \frac{\partial < H(\vec{\tilde{J}}) >}{\partial \vec{\tilde{J}}}$ die lineare Frequenz ist und:

$$\vec{\omega}(0) = \begin{pmatrix} \frac{2\pi \vec{Q}}{L} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Vergleich der zu einer Fourierkomponente gehörigen Koeffizienten ergibt sich, daß diese verschwinden, falls:

$$S_{\vec{n}} = i \frac{H_{\vec{n}}}{\vec{\omega}\vec{n}}$$

für $n \neq (0, \ldots, 0)$. Diese, hier in linearer Ordnung dargestellte Transformation von H in Normalform kann zu höherer Ordnung durch Iteration weitergeführt werden (siehe z.B.: [Warnock87]).

Resonanzen

Es lassen sich nun zwei Fälle unterscheiden. Für $\vec{\omega} \cdot \vec{n} \simeq 1$ ist $S_{\vec{n}} \simeq H_{\vec{n}} \ll 1$. Damit ist die lineare Entwicklung gerechtfertigt, und die neuen Koordinaten $\vec{\tilde{J}}, \vec{\tilde{\phi}}$ weichen nur geringfügig von den alten Koordinaten ab. Es handelt sich also hier um eine leichte Deformation der linearen Trajektorie.

Für $\vec{\omega} \cdot \vec{n} \ll 1$ ist jedoch $S_{\vec{n}} \gg H_{\vec{n}}$. Damit gelten die bei der Herleitung von S gemachten Annahmen nicht mehr, eine in dieser Weise erzeugte Störentwicklung von S konvergiert nicht.

Dabei handelt es sich aber nicht um ein rein mathematisches Problem, sondern zu Grunde liegt eine starke Änderung der Phasenraumtrajektorie im Bereich $\vec{\omega} \cdot \vec{n} \ll 1$, die zu einem qualitativ geänderten Bild der Teilchenbewegung führt (siehe z.B.: [Licht] S. 77).

Ist in einem Phasenraumbereich $\vec{\omega} \cdot \vec{n} = 0$ erfüllt, so ist dort das Teilchenverhalten alleine durch $H_{\vec{n}}$ bestimmt. In der Umgebung überwiegt der Einfluß dieser Fourierkomponente den der anderen Komponenten. Die Bedingung:

$$\vec{\omega} \cdot \vec{n} = 0, \vec{n} \neq (0, \ldots, 0), \tag{2.12}$$

die ein ganzzahliges Verhältnis der Umlauffrequenzen der einzelnen Phasenraumdimensionen fordert, wird Resonanzbedingung genannt.

Da allein eine Resonanz im obigen Sinne die Phasenraumtrajektorie qualitativ ändert, wird im Simulator speziell das Verhalten der Teilchen bei Anwesenheit einer Resonanz untersucht, während ansonsten das lineare Teilchenverhalten als in guter Näherung gültig angesehen wird.[13]

In der Nähe der Resonanz muß also nur die resonante Komponente der Hamiltonfunktion berücksichtigt werden. Die Resonanzbedingung ist jeweils für $\pm\vec{n}$ erfüllt, weswegen beide Komponenten berücksichtigt werden müssen. Da H jedoch reellwertig ist, gilt $H_{\vec{n}} = H^*_{-\vec{n}}$. Damit ist die Umformung

$$\begin{aligned} H &\simeq < H > (\vec{J}) + H_{\vec{n}} \exp(i\vec{n}\vec{\phi}) + H_{-\vec{n}} \exp(-i\vec{n}\vec{\phi}) \\ &= < H > (\vec{J}) + h_{\vec{n}} \cos(\vec{n} \cdot \vec{\phi} + \psi_0), \end{aligned}$$

mit $h_{\vec{n}} = |H_{\vec{n}}|$ und $\psi_0 = \arctan\left(\frac{\Im(H_{\vec{n}})}{\Re(H_{\vec{n}})}\right)$, möglich.

Durch die Resonanz wird eine bestimmte Richtung im Phasenraum ausgezeichnet. Ein Teilchen, das die Bedingung:

$$0 = \vec{n} \cdot \vec{\omega} = \vec{n} \cdot \frac{\partial < H >}{\partial \vec{J}}$$

exakt erfüllt, behält im Mittel seinen Winkel in $\vec{n}$-Richtung bei, eine mittlere Winkeländerung geschieht nur in der Richtung senkrecht zu n.

Um die Resonanzeigenschaft in der Umgebung der Resonanz hervorzuheben, wird eine Koordinatentransformation durchgeführt, die die Richtung $\vec{n}$ als Koordinatenachse einführt und damit die Abweichung der Teilchenbewegung von der eines die Resonanzbedingung genau erfüllenden Teilchens wiedergibt. Diese Koordinate wird Resonanzkoordinate genannt. Für die Transformation muß zunächst eine Koordinate n_{res} ausgewählt werden, die nach der Transformation zur Resonanzkoordinate werden soll. Üblicherweise wird diejenige Koordinate aus n_x, n_σ, n_z, für die $min(|n_x|, |n_\sigma|, |n_z|, 1)$ minimal und positiv ist ausgewählt.[14]

Diese Transformation geschieht mit der Funktion:

$$\begin{aligned} F_2 &= \sum_{\xi \neq res} \phi_\xi \tilde{J}_\xi + \vec{n} \cdot \vec{\phi} \tilde{J}_{res}, \qquad (2.13) \\ \vec{\tilde{\phi}} &= \frac{\partial F_2}{\partial \vec{\tilde{J}}} = \begin{cases} \vec{n}\vec{\phi} \text{ für } \xi = res, \\ \phi_\xi \text{ sonst}, \end{cases} \\ \vec{J} &= \frac{\partial F_2}{\partial \vec{\phi}} = \begin{cases} n_{res} \tilde{J}_{res} \text{ für } \xi = res, \\ \tilde{J}_\xi + n_\xi \tilde{J}_{res} \text{ sonst}, \end{cases} \end{aligned}$$

und es ergibt sich als transformierte Hamiltonfunktion:

$$\begin{aligned} H &= < H > (\tilde{J}_1 + n_1 \tilde{J}_{res}, \ldots, n_{res} \tilde{J}_{res}, \ldots, \tilde{J}_s + n_s \tilde{J}_{res}) + h_{\vec{n}} \cos(n_{res}\phi_{res} + \psi_0) \\ &\simeq \underbrace{\sum_{\xi \neq res} \omega_\xi \tilde{J}_\xi}_{nichtresonant} + \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{\omega} \tilde{J}_{res} + h_{\vec{n}} \cos(n_{res}\phi_{res} + \psi_0)}_{resonant}. \end{aligned}$$

[13] Es ist möglich, vor Untersuchung der Resonanz die nichtresonanten Komponenten von $H_{\vec{n}}$ in linearer oder höherer Ordnung zu eliminieren. Da der Einfluß dieser Komponenten auf die Teilchenbewegung in der Praxis gering ist, wird dies vom Simulator zur Zeit nicht getan. Ein Hinzufügen einer Transformation zur Elimination nichtresonanter Komponenten ist jedoch einfach möglich.

[14] Die Wahl der Resonanzkoordinate ist, bis auf die Einschränkung, daß $n_{res} \neq 0$ sein muß, willkürlich. Die angegebene Wahl soll jedoch das neue Koordinatensystem möglichst eng am alten orientieren, so daß die Anschaulichkeit der Koordinatenachsen weitgehend erhalten bleibt.

In der Nähe der Resonanz spaltet die Hamiltonfunktion in den neuen Koordinaten in einen nichtresonanten Anteil H_{nres} und einen resonanten Anteil H_{res} auf. Der Anteil H_{nres} enthält dabei keine Winkelvariablen, während H_{res} nur von der Winkelvariablen ϕ_{res} abhängt. Damit ist:

$$\left.\begin{array}{l} J_\xi = J_{\xi 0} \\ \phi_\xi = s\omega_\xi - \phi_{\xi 0} \end{array}\right\} \text{ für } \xi \neq res,$$

da in der Nähe der Resonanz $\vec{\omega}\cdot\vec{n} \ll 1$. Für alle Koordinaten außer der Resonanzkoordinate sind damit die Bewegungsgleichungen gelöst, zu betrachten bleibt nur noch der Anteil H_{res}. In H_{res} können die $J_{\xi\neq res}$ als konstante Parameter angesehen werden, im folgenden wird die Abhängigkeit von diesen Parametern nicht ausgeschrieben, es wird die Bezeichnung $J = J_{res},\ \phi = \phi_{res}$ verwendet.

Modell-Hamiltonfunktion im Fixpunktbereich

In der Nähe der Resonanz kann H_{res} in J entwickelt werden:

$$\begin{aligned} H_{res} &= \vec{n}\cdot\vec{\omega}J + h_{\vec{n}}\cos(\phi+\psi_0) \\ &= \sum_{i=0}^{2}(G_i + F_i\cos(\phi+\psi_0))J^i \\ &= \sum_{i=0}^{2}(G_i + F_i\cos(\tilde{\phi}))J^i, \end{aligned} \tag{2.14}$$

wobei $\tilde{\phi} = \phi+\psi_0$ ist. Die Funktion (2.14) ist dabei als Modell[15] für H_{res} zu betrachten. Die Koeffizienten $G_i,\ F_i$ werden durch einen Fit des Modells an H_{res} im Bereich der Resonanz gewonnen (siehe Anhang A.6). Hierbei kann o.B.d.A. $G_0 = 0$ gesetzt werden, da ein konstanter Anteil der Hamiltonfunktion keinen Einfluß auf die Teilchenbewegung hat. Ferner ist, falls $J = 0$ im Bereich des Fits liegt, $F_0 = 0$, da ansonsten für ein Teilchen mit $J = 0$ nicht für alle ϕ eine Bahn definiert wäre.

Die Resonanz ist nun gekennzeichnet durch das Auftreten von Fixpunkten, für die die Ableitung der Hamiltonfunktion nach den Koordinaten verschwindet:

$$\begin{aligned} 0 = \quad & \tfrac{\partial J}{\partial s} = -\tfrac{\partial H}{\partial \phi} = -\textstyle\sum F_i J^i \sin(\phi) && \Leftrightarrow \phi = 0,\pi, \\ 0 = \quad & \tfrac{\partial \phi}{\partial s} = -\tfrac{\partial H}{\partial J} = \textstyle\sum i(G_i \pm F_i)J^{i-1} && \Leftrightarrow J = -\dfrac{G_1 \pm F_1}{2(G_2 \pm F_2)}, \end{aligned}$$

wobei die Tilde über der Winkelkoordinate unterdrückt wurde. Die Hamiltonfunktion H_{res} kann durch ihre Form bei $\phi = 0,\ \phi = \pi$ gekennzeichnet werden. Dabei muß zumindest ein Fixpunkt für $J > 0$ auftreten. Auftretende Fixpunkte können dabei stabil und instabil sein. Ein stabiler oder parabolischer Fixpunkt liegt vor, wenn ein Teilchen bei kleinen Abweichungen vom Fixpunkt eine kreisartige Bewegung um diesen Fixpunkt ausführt; ein instabiler oder hyperbolischer Fixpunkt liegt vor, falls ein Teilchen sich bei kleinen Abweichungen vom Fixpunkt von diesem wegbewegt. An der Hamiltonfunktion läßt sich die Art des Fixpunkts ablesen:

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial^2 H}{\partial J^2} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \phi^2} > 0 & \Rightarrow J_{fix} \text{ stabil}, \\ \text{sonst} & \Rightarrow J_{fix} \text{ instabil}. \end{array}$$

Obwohl J nur für positive Werte eine physikalische Bedeutung hat, kann in der Modell-Hamiltonfunktion (2.14) H auch für negative J berechnet werden. Dabei garantiert die quadratische Form der Modell-Hamiltonfunktion, daß immer jeweils ein Extremum für $H(\phi = 0)$ und $H(\phi = \pi)$ vorliegt, wobei eines dieser Extrema für ein negatives J auftreten kann. Ein solcher Fixpunkt sei im folgenden hypothetischer Fixpunkt im Gegensatz zum physikalischen genannt.

In Abbildung 2.3 sind die durch die Modell-Hamiltonfunktion erfaßbaren Resonanzen charakterisiert. Links sind die Kurven von H_{res} für die Winkel $\phi = 0,\ \pi$ dargestellt. Da sich das Teilchen im Winkel von $\phi = 0 \rightarrow \pi \rightarrow 2\pi \hat{=} 0$ bewegt, kann es sich in dieser Darstellung nur im Bereich zwischen den Kurven

[15] Die Funktion (2.14) ist eine Verallgemeinerung der in [Licht], S. 104 angegebenen Funktion, mit der die verschiedenen im Beschleuniger auftretenden Resonanztypen beschrieben werden können. Da i.a. $\vec{\omega} = \vec{\omega}(J)$, muß in der Modell-Hamiltonfunktion auch $G_2 \neq 0$ berücksichtigt werden.

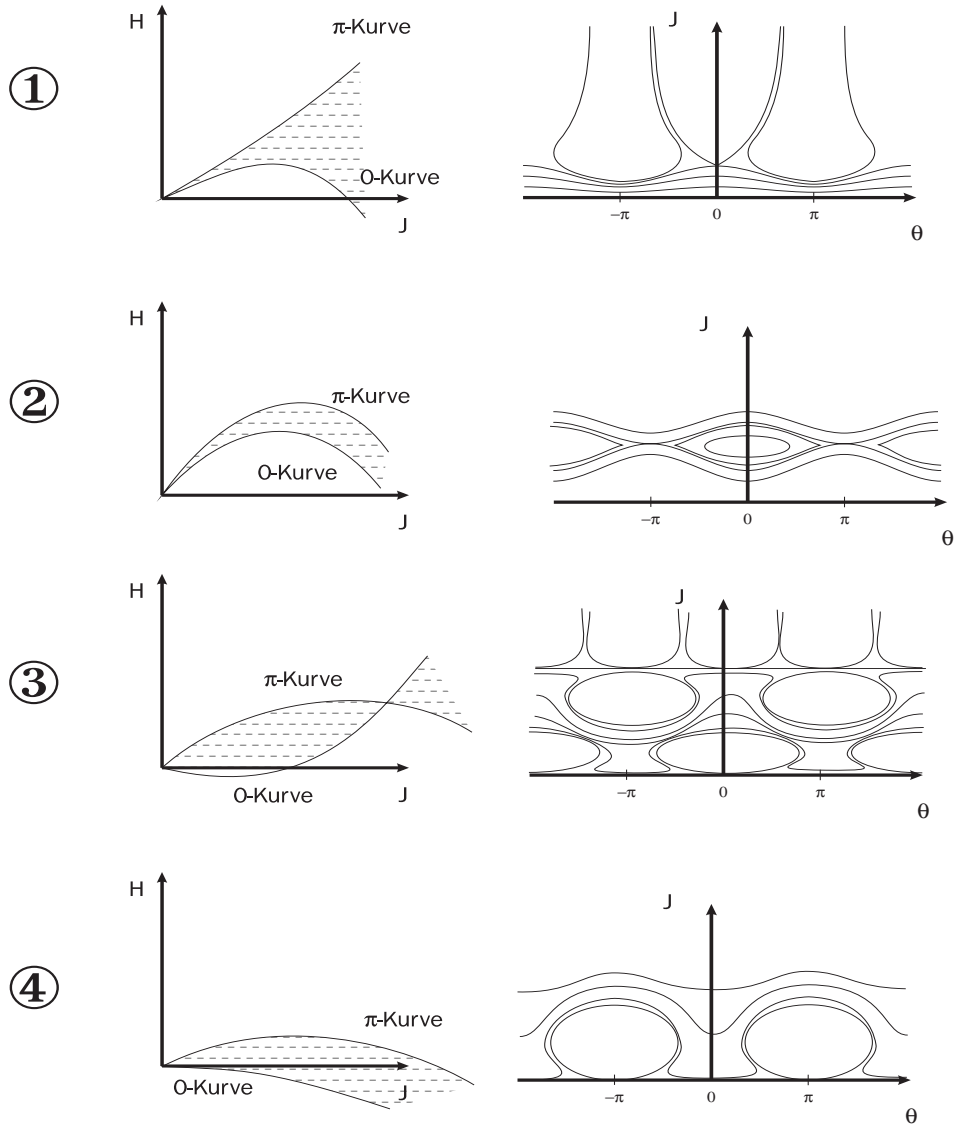


Abbildung 2.3: Charakterisierung von H_{res}

aufhalten. Rechts sind die entsprechenden Phasenraumfiguren in Winkel-Wirkungs-Variablen dargestellt. Hierbei treten die Resonanzen vom Typ 1 (z.B. Sextupolresonanz) und Typ 2 (z.B. Oktupolresonanz) im Beschleuniger auf, Typ 3 und 4 sind als Exoten anzusehen.

In der Modell-Hamiltonfunktion (2.14) tritt zumindest ein stabiler Fixpunkt auf, der hypothetisch oder physikalisch sein kann. Zudem ist bei im Beschleuniger relevanten Resonanzen zumindest ein instabiler physikalischer Fixpunkt vorhanden.

Sei nun J_{st}, ϕ_{st} der stabile Fixpunkt der Modell-Hamiltonfunktion. Dann kann H in $\Delta J = J - J_{st}$ und $\Delta\phi = \phi - \phi_{st}$ umgeschrieben werden. Der genaue Ablauf dieser Umformung sowie alle weiteren Berechnungen dieses Abschnitts sind ausführlich dargestellt in Anhang A.6. Zur Durchführung der hier angestrebten Transformation von H_{res} in eine winkelunabhängige Form sind komplexe mathematische Operationen notwendig. Hier jedoch geht es nur um die Darstellung der Vorgehensweise und des physikalischen Gehalts der Berechnungen.

Im folgenden sollen wieder J und ϕ für Wirkung und Winkel verwendet werden, wobei aber immer der Abstand zum stabilen Fixpunkt gemeint ist.

Kanonische Transformation zur Elimination der Winkelabhängigkeit

Gesucht ist nun eine Transformation, die die Hamiltonfunktion $\tilde{H}$ in Winkel-Wirkungs-Variablen überführt, so daß:

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \frac{1}{2\pi}\oint J d\phi, \\ \tilde{\phi} &= 2\pi \frac{d\int_0^\phi J d\phi'}{d\oint J d\phi'}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Die neue Wirkung $\tilde{J}$ ist also proportional der von der Teilchenbahn eingeschlossenen Fläche. Der neue Winkel $\tilde{\phi}$ ist proportional zu einem Flächenelement, das von den Bahnen zweier Teilchen mit $\tilde{J}$, $\tilde{J}+\delta$ sowie den Radiuslinien für $\phi = 0$ und ϕ begrenzt wird. Die Transformation ist in Abbildung 2.4 veranschaulicht.

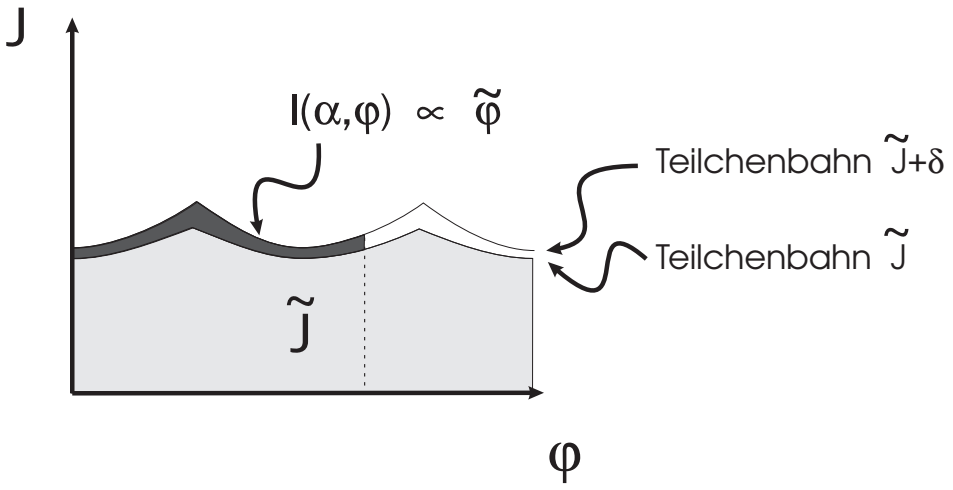


Abbildung 2.4: Transformation in Winkel-Wirkungs-Variablen

Diese Transformation ist flächenerhaltend und damit kanonisch (siehe z.B.: [Bell], S. 31), die neue Wirkung $\tilde{J}$ ist auf Grund des Liouville-Theorems eine Erhaltungsgröße der Bewegung.

Bei der Berechnung der Transformation ist es hilfreich, daß die Hamiltonfunktion H auch eine Erhaltungsgröße der Bewegung ist.

Sei $\alpha = H$. Dann kann $\tilde{\phi}$ berechnet werden als:

$$\tilde{\phi} = 2\pi \frac{\partial\left(\int_0^\phi J(\phi')d\phi'\right)}{\partial\left(\oint J(\phi')d\phi'\right)} = 2\pi \frac{\left(\frac{\partial\int_0^\phi J d\phi'}{\partial\alpha}\right)}{\left(\frac{\partial\oint J d\phi'}{\partial\alpha}\right)} = 2\pi \frac{\int_0^\phi \frac{\partial J}{\partial\alpha}d\phi'}{\oint \frac{\partial J}{\partial\alpha}d\phi'}.$$

Sei $I(\alpha,\phi) = \int_0^\phi \frac{\partial J(\phi')}{\partial\alpha}d\phi'$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\alpha I(\alpha', 2\pi)d\alpha', \\ \tilde{\phi} &= 2\pi \frac{I(\alpha,\phi)}{I(\alpha, 2\pi)}. \end{aligned}$$

Zu berechnen ist also $I(\alpha,\phi)$. Die geometrische Interpretation von $I(\alpha,\phi)$ ist Abbildung 2.4 zu entnehmen. Wie in Anhang A.6 hergeleitet, kann $I(\alpha,\phi)$ ausgedrückt werden als:

$$\begin{aligned} I(\alpha,\phi) &= \int_0^\phi \frac{\partial J(\phi')}{\partial\alpha}d\phi' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha g_2 B_2}}\int_0^{\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)} \frac{dt}{(t^2-t_1)(t^2-t_2)}. \end{aligned}$$

Hierbei sind die Parameter $t_{1,2} = t_{1,2}(F_i, G_i, \alpha)$ sowie $B_{1,2} = B_{1,2}(F_i, G_i, \alpha)$ nur von Konstanten bezüglich der Integration abhängig. Die Integration kann mit Hilfe der elliptischen Jacobi-Funktionen durchgeführt werden. Je nach Vorzeichen von $t_{1,2}$ muß jedoch eine Fallunterscheidung getroffen werden.

Zwei negative Nullstellen

Für den Fall $t_{1,2} < 0$ seien $t_{1,2}$ umbenannt in $t_>, t_<$ mit $|t_>| > |t_<|$. Dann ist mit $m = \frac{t_> - t_<}{t_>}$:

$$\tilde{\phi} = 2\pi \frac{I(\phi)}{I(2\pi)} = \frac{2\pi}{4K(m)} sc^{-1}\left(\frac{\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\sqrt{-t_<}}|m\right), \tag{2.16}$$

wobei $sc(u|m)$ eine elliptische Jacobi–Funktion ist und $K(m)$ die Viertelperiode der Funktion, entsprechend $\pi/2$ für die sin-Funktion, darstellt (siehe [Abram] S. 570-574,596).[16]

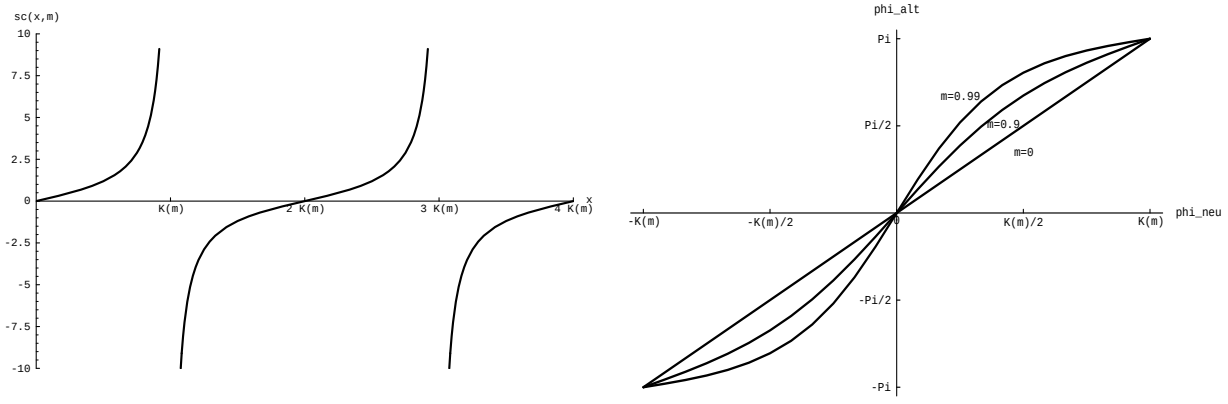
Durch Umkehrung erhält man:

$$\phi = 2\arctan\left(\sqrt{-t_<}\, sc\left(\frac{2}{\pi}K(m)\tilde{\phi}|m\right)\right). \tag{2.17}$$

Die Berechnung ergibt:

$$\tilde{J} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha} I(\alpha', 2\pi)d\alpha' = \frac{1}{2\pi}\int \frac{4K(m(\alpha'))}{\sqrt{-\alpha' g_2 B_2 t_>(\alpha')}}d\alpha'.$$

Die Integration erfolgt numerisch (siehe Anhang A.6). Die elliptische Jacobi-Funktion sc ist zusammen mit der Funktion $\phi(\tilde{\phi})$ in Abbildung 2.5 dargestellt. Das Bild der Funktion sc ist analog zum Bild tan-Funktion. Für $m = 1$ besteht ein linearer Zusammenhang zwischen dem alten und dem neuen Winkel. Für $m < 1$ wird die Funktion deformiert, wobei sich insbesondere in den Randbereichen der alte Winkel ϕ langsamer ändert als in der Mitte. Dies entspricht dem verlangsamten Phasenvorschub eines Teilchens in der Nähe der Fixpunkte. Der alte Winkel überstreicht dabei den vollen Winkelbereich $[0 \ldots 2\pi]$. Damit umlaufen die Teilchen vollständig den Koordinatenursprung. Es ergeben sich kontinuierlich fortlaufende Teilchentrajektorien, die lediglich deformierte Trajektorien der linearen Bewegung darstellen. Damit entspricht die Bewegung derjenigen außerhalb der Resonanz. In Abbildung 2.6 sind die verschiedenen Resonanzbereiche dargestellt. Die Bewegung außerhalb der Resonanz entspricht dabei dem Bereich Ia. Die alte Wirkung J kann dabei jedoch Polstellen haben. Dies führt zu auslaufenden Separatrixästen im Phasenraumbild, wie es in Bereich Ib in Abbildung 2.6 veranschaulicht ist.



(a) $sn(x, m)$ für $m = 0.5$

(b) $2\arctan(sn(\phi_{neu}|m))$

Abbildung 2.5: Phasenraumbild für $t_{1,2} < 0$

[16] Die Bezeichnung der elliptischen Integrale und Jacobi–Funktionen sowie die Bezeichnung der Argumente folgt der Konvention von [Abram].

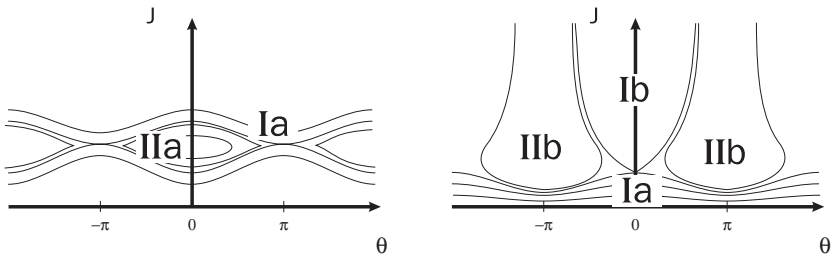


Abbildung 2.6: Resonanzbereiche

Nullstellen mit verschiedenen Vorzeichen

Für den Fall $t_1 \cdot t_2 < 0$ seien $t_{1,2}$ umbenannt in $t_+ > 0,\ t_- < 0$. Dann ist mit $m^* = \frac{t_+}{t_+ - t_-} = \frac{1}{m}$:

$$\tilde{\phi} = \frac{2\pi}{4K(m^*)} sd^{-1}\left(\frac{(t_+ - t_-)\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\sqrt{-t_- t_+}}|m^*\right), \tag{2.18}$$

sowie durch Umkehrung:

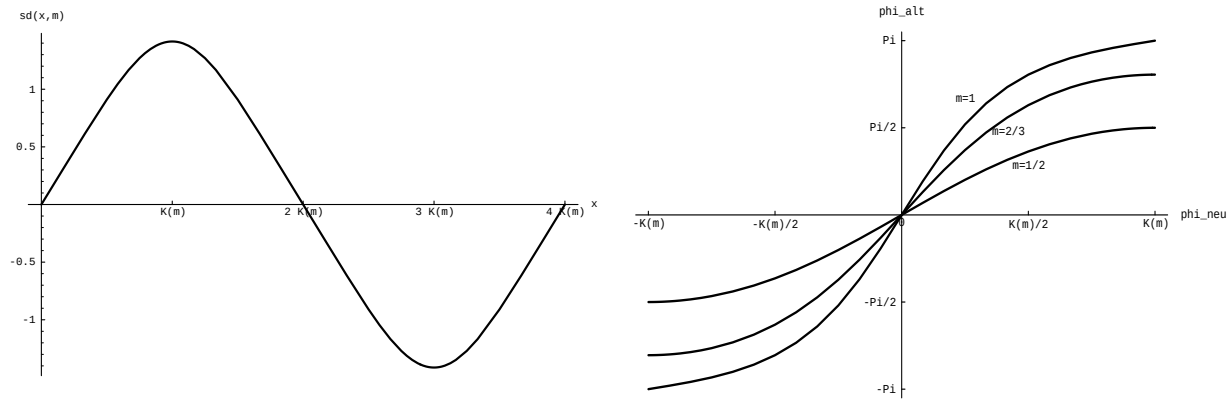
$$\phi = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{t_+ t_-}{t_- - t_+}} sd\left(\frac{2}{\pi}K(m^*)\tilde{\phi}|m^*\right)\right). \tag{2.19}$$

Wiederum wird zur Berechnung von $\tilde{J}$ das Integral

$$\tilde{J} = \frac{1}{2\pi}\int I(\alpha', 2\pi)d\alpha' = \frac{1}{2\pi}\int \frac{4K(m^*(\alpha'))}{\sqrt{\alpha' g_2 B_2(t_+(\alpha') - t_-(\alpha'))}}d\alpha'$$

numerisch ausgeführt (siehe Anhang A.6).

Die elliptische Jacobi-Funktion sd ist zusammen mit der Funktion $\phi(\tilde{\phi})$ in Abbildung 2.7 dargestellt. Die Darstellung entspricht derjenigen in Abbildung 2.5 für die hier behandelte Signatur der Nullstellen. Das Bild der Funktion sd ist analog zum Bild der sin-Funktion. Die Amplitude ist dabei durch den Wurzelterm in Gleichung (2.19) vorgegeben. Für m^* besteht ein linearer Zusammenhang zwischen altem und neuem Winkel. Für $m^* < 1$ ist wiederum der Winkelvorschub im Randbereich der Kurve verringert. Darüber hinaus wird aber auch der vom alten Winkel überstrichene Bereich kleiner als $[0 \ldots 2\pi]$, der alte Winkel verbleibt in einem beschränkten Winkelbereich. Ein Teilchen bleibt also in diesem Winkelbereich "gefangen". Im Phasenraum ergeben sich dann keine kontinuierlich fortlaufenden, sondern geschlossene Kurven. Diese Bewegung entspricht derjenigen innerhalb der Resonanz, der entsprechende Bereich ist in Abbildung 2.6 als IIa bezeichnet. Wiederum kann es durch Polstellen der alten Wirkung J zur Bildung von auslaufenden Separatrixästen kommen, wobei am Separatrixast jeweils Gebiete mit unterschiedlicher Signatur von $t_{1,2}$ aneinandergrenzen. Ein solcher Bereich ist in Abbildung 2.6 mit IIb bezeichnet.



(a) $sd(x,m)$ für $m = 0.5$

(b) $2\arctan(sd(\phi_{neu}|m))$

Abbildung 2.7: Phasenraumbild für $t_+ > 0, t_- < 0$

Berechnung der Transformation und Bestimmung des Arbeitspunkts

Die Berechnung der Transformation von alten auf neue Koordinaten kann mit Hilfe der oben angegebenen Formeln durchgeführt werden. Seien J, ϕ vorgegeben. Es wird $\alpha = H(J, \phi)$ bestimmt. Der neue Winkel $\tilde{\phi}$ läßt sich dann mit Hilfe von Gleichung (2.16) bzw. (2.18) berechnen. Die neue Wirkung $\tilde{J}$ errechnet sich durch Integration von $I(\alpha, 2\pi)$.

Die umgekehrte Transformation, von neuen auf alte Koordinaten, ist aufgrund der angegebenen Formeln nicht direkt möglich, sondern erfolgt in mehreren Schritten. Zunächst muß der $\tilde{J}$ zugeordnete Wert der Hamiltonfunktion $\alpha(\tilde{J})$ bestimmt werden. Da mit $I(\alpha, 2\pi) = 2\pi\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \alpha}$ die Ableitung von $\tilde{J}$ schon bekannt ist, bietet sich dazu das iterative Newton-Verfahren an (siehe z.B. [Bronstein], S. 123). Ausgehend von einem α_0 wird in Folge:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{(\tilde{J} - \tilde{J}(\alpha_n))}{I(\alpha_n, 2\pi)}$$

bestimmt, wobei $\tilde{J}(\alpha_n)$ durch Integration von $I(\alpha, 2\pi)$ gewonnen wird. Die Iteration wird fortgesetzt, bis $\tilde{J}$ und $\tilde{J}(\alpha_n)$ hinreichend gut übereinstimmen.

Mit bekanntem α kann der alte Winkel mit Hilfe von Gleichung (2.17) bzw. (2.19) berechnet werden. Die alte Wirkung J kann sodann aus $\alpha = H(J, \phi)$ durch Auflösen nach J erhalten werden.

Da $I(\alpha, 2\pi) = 2\pi\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \alpha}$ und $H = \alpha$ ist, kann die Umlauffrequenz eines Teilchens in den neuen Koordinaten bestimmt werden:

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial \tilde{J}} = \frac{2\pi}{I(\alpha(\tilde{J}), 2\pi)}.$$

Damit ist die analytische Bestimmung des zu einem $\tilde{J}$ gehörigen Arbeitspunkts sofort möglich, das Teilchenverhalten kann für beliebige Zeiten ermittelt werden als:

$$\begin{aligned} \tilde{J}(t) &= \tilde{J}_0, \\ \tilde{\phi}(t) &= \omega t + \phi_0. \end{aligned}$$

Soll die Position eines Teilchens zu verschiedenen Zeiten bestimmt werden, ist dabei nur einmal die Berechnung von $\omega(\tilde{J})$ vorzunehmen. Denn da sich ω während des Teilchenumlaufs nicht ändert, kann durch einfaches Einsetzten der gewünschten Zeit die neue Teilchenposition ermittelt werden. Damit liegt eine analytische Lösung der Bewegungsgleichungen des Teilchens vor.

Chromatische Kopplung

Bisher wurde davon ausgegangen, daß für ein resonantes Teilchen $p_\sigma = 0$ ist. Dies ist jedoch nicht immer gegeben. Dabei kann entweder ein zeitlich konstantes $p_\sigma = \frac{\Delta p}{p_0}$, bedingt durch die Frequenzein-

stellung der HF, vorliegen (siehe S. 23) oder eine Energieschwingung, wobei jedes Teilchen eine bestimmte longitudinale Emittanz J_σ hat.

Konstante Energieabweichung

Eine konstante Energieabweichung der Teilchen führt über die Chromatizität zu einer Änderung des Arbeitspunkts und damit des linearen Anteils der Hamiltonfunktion. Dies spiegelt sich auch in der gefitteten Modell-Hamiltonfunktion (2.14) wider. Der konstante lineare Anteil dieser Funktion wird durch G_1 beschrieben. Eine konstante Energieabweichung $\frac{\Delta p}{p_0}$ ändert G_1:

$$G_1 \rightarrow G_1 + \frac{2\pi}{L}\frac{C_{res}\frac{\Delta p}{p_0}}{n_{res}},$$

wobei $C_{res} = n_x C_x + n_z C_z$ die Chromatizität der Resonanzkoordinate ist. Die weitere Resonanzanalyse bleibt unberührt. In der Praxis kann bei konstantem $\frac{\Delta p}{p_0}$ auch ein neuer Fit der Modell-Hamiltonfunktion durchgeführt werden. Dies wird beim Simulator gemacht und erweist sich in Tests als numerisch weitgehend äquivalent zu einer direkten Änderung von G_1.

Energieschwingung

Ein Teilchen mit Energieabweichung erfährt eine Arbeitspunktänderung. Wie oben beschrieben, führt dies zu einer Änderung des linearen Termes der Modell-Hamiltonfunktion. Unter Berücksichtigung aller Phasenraumkoordinaten lautet die Hamiltonfunktion nun in der Nähe der Resonanz:

$$H =< H > (\vec{J}) + \frac{2\pi}{L}(C_x J_x + C_z J_z)p_\sigma + h_{\vec{n}}\cos(\vec{n}\vec{\phi} + \psi_0).$$

Hierbei durchbricht der Term in $p_\sigma = p_\sigma(J_\sigma, \phi_\sigma)$ die Form der Einzelresonanz. Der Term kann aber eliminiert werden, falls die longitudinale Schwingung des Teilchens im linearen Bereich bleibt, wo in guter Näherung $\frac{\partial\sigma}{\partial s} \simeq p_\sigma$ gilt. Dies geschieht durch die kanonische Transformation:[17]

$$\begin{aligned}
F_2(\tilde{J}_x, \tilde{J}_z, \phi_x, \phi_z) &= \tilde{J}_x(\phi_x - \frac{2\pi}{L}C_x\sigma) + \tilde{J}_z(\phi_z - \frac{2\pi}{L}C_z\sigma), \\
J_x &= \tilde{J}_x, \\
J_z &= \tilde{J}_z, \\
\tilde{\phi}_x &= \phi_x - \frac{2\pi}{L}C_x\sigma, \\
\tilde{\phi}_z &= \phi_z - \frac{2\pi}{L}C_z\sigma, \\
\frac{\partial F_2}{\partial s} &= -\frac{2\pi}{L}(C_x\tilde{J}_x + C_z\tilde{J}_z)\frac{\partial\sigma}{\partial s} \simeq \frac{2\pi}{L}(C_x\tilde{J}_x + C_z\tilde{J}_z)p_\sigma,
\end{aligned}$$

so daß die Hamiltonfunktion in neuen Koordinaten lautet:

$$H =< H > (\vec{J}) + h_{\vec{n}}\cos\left(\vec{n}\vec{\phi} - \sigma\frac{2\pi}{L}C_{res} + \psi_0\right).$$

Wie in Anhang A.5 dargestellt, ist die lineare Synchrotronschwingung gegeben durch:

$$\sigma = \sqrt{2J_\sigma\beta_\sigma}\cos\phi_\sigma.$$

Mit $\alpha = \sqrt{2J_\sigma\beta_\sigma}\frac{2\pi}{L}C_{res}$ ist damit:

$$H =< H > (\vec{J}) + h_{\vec{n}}\cos\left(\vec{n}\vec{\phi} - \alpha\cos(\phi_\sigma) + \psi_0\right).$$

Der cos(...cos())-Term von H kann nach Bessel-Funktionen $\mathcal{J}_m$ der Ordnung m entwickelt werden (siehe z.B. [Laclare], S. 266):

$$H =< H > (\vec{J}) + h_{\vec{n}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathcal{J}_m(\alpha)\cos\left(\vec{n}\vec{\phi} + m\phi_s + \psi_0 - m\frac{\pi}{2}\right).$$

[17] Bei diesem Vorgehen wird die Rückwirkung der Transformation auf die longitudinalen Koordinaten vernachlässigt, was in der hier betrachteten linearen Näherung der Synchrotronschwingung gestattet ist.

Durch die Energieschwingung wird damit aus einer Fourierkomponente der Hamiltonfunktion ein ganzes Band von Fourierkomponenten. Für jede Komponente des Bandes kann die Resonanzbedingung erfüllt sein mit:

$$\vec{\omega}\vec{n} + \omega_\sigma m = 0.$$

In diesem Fall bestimmt die Fourierkomponente $(\vec{n},\ m)$ der Hamiltonfunktion das Verhalten der Teilchen, andere Fourierkomponenten können vernachlässigt werden. Ist also z.B. für eine Kombination von $Q_x,\ Q_z$ die Resonanzbedingung erfüllt, so finden sich im Arbeitspunktdiagramm im Abstand von Vielfachen von $\frac{Q_\sigma}{n_{x,z}}$ weitere Resonanzen. Diese Situation ist in Abbildung 2.8 demonstriert. Die neuen Resonanzen werden im weiteren als *Synchrotronsatelliten* bezeichnet.

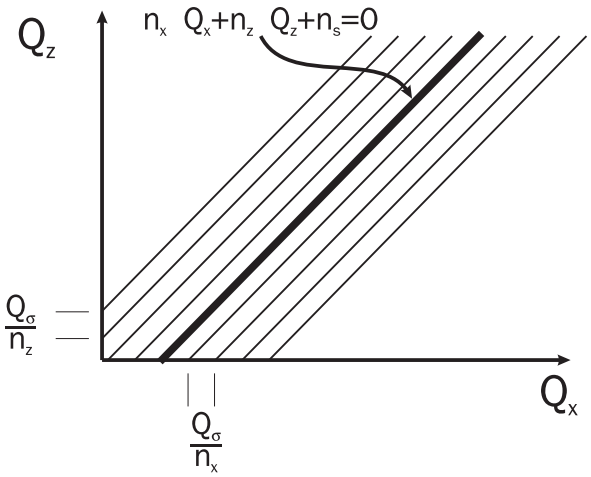


Abbildung 2.8: Synchrotronsatelliten einer Q_xQ_z-Resonanz

Die Stärke der Resonanz skaliert nun mit J_σ und damit mit der Amplitude der longitudinalen Schwingung, da der Koeffizient der resonanten Fourierkomponente gegeben ist als:

$$h_{\vec{n}} \cdot \mathcal{J}_m(\alpha) = h_{\vec{n}} \cdot \mathcal{J}_m(\sqrt{2J_\sigma\beta_\sigma}\frac{2\pi}{L}C_{res}).$$

Zwischen reinen transversalen Resonanzen und deren Synchrotronseitenbändern besteht damit ein wesentlicher Unterschied. Während die Lage der Fixpunkte bei reinen transversalen Resonanzen allenfalls von $\frac{\Delta p}{p}$, also einer zeitlich konstanten Energieverschiebung zur Sollenergie abhängt, so ist die Fixpunktlage bei den Synchrotronseitenbändern stark von der Amplitude der longitudinalen Schwingung abhängig.

Abbildung 2.9 zeigt Besselfunktionen der Ordnungen 0 bis 2. Für die reine transversale Resonanz ist damit der nichtlineare Anteil der Hamiltonfunktion am größten für Teilchen mit Energieschwingungsamplitude $J_\sigma = 0$. Für den Synchrotronsatelliten der Ordnung $m \neq 0$ ist jedoch der nichtlineare Anteil bei $J_\sigma = 0$ unsichtbar und wird für dasjenige $J_{\sigma,max}$ am größten, bei dem die Besselfunktion $\mathcal{J}_m(\alpha(J_\sigma))$ ihr Maximum hat.

Diese Abhängigkeit der Resonanzstärke bei Synchrotronsatelliten von transversalen Resonanzen muß berücksichtigt werden. Im Simulator kann dies geschehen, indem die Terme F_i der Modell-Hamiltonfunktion entsprechend skaliert werden. Der Fit der Modell-Hamiltonfunktion wird bei einem longitudinalen Impuls $J_{\sigma,0}$ durchgeführt und ergibt die Koeffizienten $F_i(J_{\sigma,0})$. Für andere longitudinale Impulse ergibt sich nun:

$$F_i(J_\sigma) = F_i(J_\sigma, 0) \cdot \frac{\mathcal{J}_m(\alpha(J_\sigma))}{\mathcal{J}_m(\alpha(J_{\sigma,0}))}.$$

Auf Grund des geringen Wertes von Q_σ liegen dabei die einzelnen Synchrotronsatelliten einer transversalen Resonanz dicht benachbart im Frequenzraum. Daher ist hier die Gefahr des Resonanzüberlapps gegeben (siehe Abbildung 1.4). Eine hinreichende Bedingung für den Überlapp der Resonanzen ist, daß der vom Mittelpunkt der Resonanz bis zum Erreichen der Separatrix zurückgelegte Arbeitspunkthub größer ist als der Abstand zwischen zwei Synchrotronsatelliten:

$$\Delta Q \leq \frac{Q_\sigma}{n_{res}},$$

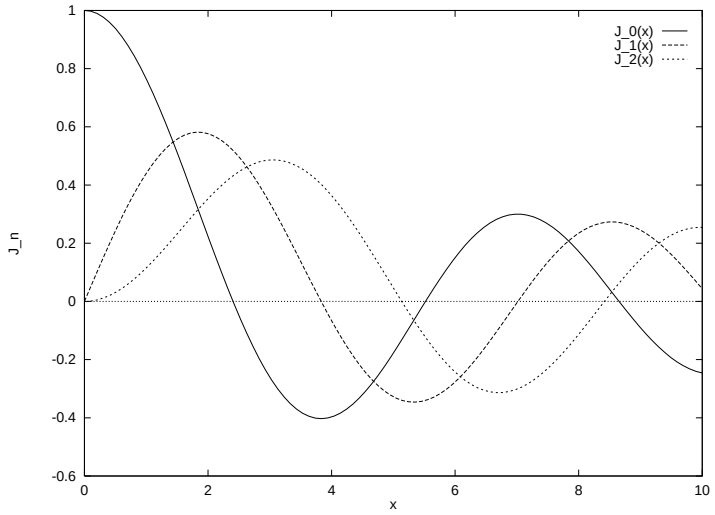


Abbildung 2.9: Besselfunktionen

wobei ΔQ der Arbeitspunkthub innerhalb der Resonanz ist. Für die Modell-Hamiltonfunktion kann dieser Arbeitspunkthub berechnet werden und ist proportional zur Steigung der Kurve $G_1 J + G_2 J^2$ am Ort des maximalen Arbeitspunkthubs innerhalb der Resonanz. Für offene Resonanzen (Typ 1 in Abbildung 2.3) ist $\Delta Q = \left|\frac{G_1}{n_{res}}\right|$. Für geschlossene Resonanzen (Typ 2 in Abbildung 2.3) ist $\Delta Q = \left|\frac{1}{n_{res}} G_1 - G_2 \frac{G_1 \pm F_1}{G_2 \pm F_2}\right|$, wobei das Vorzeichen, das den größten Wert für ΔQ ergibt, zu wählen ist.

Es zeigt sich wiederum, daß mit sinkendem Arbeitspunkt der Synchrotronschwingung Q_σ die Wahrscheinlichkeit des Resonanzüberlapps steigt. Bei überlappenden Resonanzen ist die Beschreibung des Systems durch eine Hamiltonfunktion nicht länger möglich, sondern der Teilchentransport muß als Diffusionsprozeß aufgefaßt werden, wie in Abschnitt 1.1.1 ausgeführt.

Vergleich mit Simulationsmethoden der Literatur

In der Literatur gibt es verschiedene Ansätze, um bei kleinen Störungen der Hamiltonfunktion explizit s-abhängige Lösungen der Störungstheorie zu erhalten. Jedoch ist nur der in [Guig], [Bengtsson] verfolgte Ansatz zur Beschreibung der Bewegung im Regime einer Resonanz geeignet. In [Bengtsson] wird für H bei einer $\vec{n}$-Resonanz die Form

$$H = \frac{2\pi}{L}\left(\vec{Q}\cdot\vec{J} + \kappa \prod_i J_i^{\frac{m_i}{2}} \sin(\vec{n}\cdot\vec{\phi})\right)$$

angenommen, wobei m_i die Ordnung der resonanzerzeugenden Multipolkomponenten in den Phasenraumdimensionen i sind.

Durch die Transformationsfunktion

$$\begin{aligned} F_2(\vec{\phi},\vec{\tilde{J}}) &= \vec{\phi}\cdot\vec{\tilde{J}} - \frac{\kappa}{\Delta}\prod_i \tilde{J}_i^{\frac{m_i}{2}} \sin(\vec{n}\cdot\vec{\phi}), \\ \tilde{\phi}_k &= \phi_k - \vec{m}_k J_k^{\frac{m_i-2}{2}} \frac{\kappa}{\Delta}\prod_{i\neq k} \tilde{J}_i^{\frac{m_i}{2}} \sin(\vec{n}\cdot\vec{\phi}), \\ \vec{J} &= \vec{\tilde{J}} - \frac{\kappa}{\delta}\vec{n}\prod_i \tilde{J}_i^{\frac{m_i}{2}} \cos(\vec{n}\cdot\vec{\phi}), \end{aligned}$$

mit $\Delta = \vec{Q}\cdot\vec{n}$, ergibt sich:

$$\tilde{H} = \frac{2\pi}{L}\left(\vec{Q}\cdot\vec{\tilde{J}} + \frac{2\pi\kappa^2}{L\Delta}\prod_i \tilde{J}_i^{m_i-1}[\sum_i n_i m_i J_i](1-\cos(2\vec{n}\vec{\phi}))\right),$$

wobei angenommen wird, daß der Term: $\kappa^2 \cdot \cos(2\vec{n}\vec{\phi})$ klein ist und über lange Zeit nicht zur Bewegung beiträgt.[18] Die neuen Wirkungen $\vec{J}$ sind damit näherungsweise Erhaltungsgrößen der Bewegung. Die Transformation entspricht der hier für den nichtlinearen nichtresonanten Fall angegebenen (siehe S. 30).

Eine Berechnung der alten Winkel $\vec{\phi}$ ist jedoch mit diesem Verfahren nicht analytisch möglich, sondern muß für jeden Winkel durch Iteration neu erfolgen. Da sich bei der zeitlichen Entwicklung der Teilchenkoordinate der Winkel ständig ändert, muß dabei jedesmal eine Neuberechnung erfolgen, während bei dem hier vorgestellten Verfahren der alte Winkel sofort analytisch berechnet werden kann. Ferner können Informationen über im Spektrum des Teilchensignals auftretende Frequenzen nicht unmittelbar erhalten werden. Eine schnell berechenbare erste Näherung kann jedoch gefunden werden durch $\sin(\vec{n} \cdot \vec{\phi}) \simeq \sin(\vec{n} \cdot \vec{\tilde{\phi}})$. Aus dieser Näherung können auch Aussagen über die bei Resonanz auftretenden Frequenzen im Spektrum gewonnen werden.

Für die Hamiltonfunktion ist eine spezielle Form angenommen worden. Sie gilt nur, falls die Resonanz von genau einer magnetischen Multipolkomponente bestimmt ist. Ferner gilt die Näherung für die Erhaltungsgrößen der Bewegung nur für kleine $\vec{J}$. Insbesondere ein auslaufender Separatrixast kann mit dem angegebenen Ansatz nicht beschrieben werden.

Daher wurde dieser Ansatz in der vorliegenden Arbeit nicht verfolgt.

2.3 Vielteilchenverhalten

Auf der Grundlage der Beschreibung des Einteilchenverhaltens durch H_{ext} können nun Effekte, die Teilchenverteilungen betreffen, betrachtet werden. Diese Vielteilcheneffekte können ihrem Ursprung nach wieder den verschiedenen Anteilen des Operators A der kinetischen Gleichung (1.1) zugeordnet werden.

Auch der Anteil A_{ham} der kinetischen Gleichung verursacht Effekte, die nur für Teilchenverteilungen sichtbar sind. Die Abhängigkeit der Schwingungsfrequenz von den Anfangsbedingungen im Einteilchenbild führt zur Filamentation, die für den Beobachter wie ein Abklingen der Schwingungsamplitude wirkt. Die Überlagerung nichtlinearer Resonanzen führt zur Ausbildung von Phasenraumbereichen, in denen sich Teilchen diffusionsartig ausbreiten können. Wechselwirkungen des vom Strahl erzeugten elektromagnetischen Feldes mit dem Strahl selbst können die Stabilität der Teilchenbewegung beeinflussen.

Mit Hilfe von A_{stoch} kann das Verhalten von Teilchenverteilungen in Anwesenheit von Rauschquellen beschrieben werden. Neben extern appliziertem Rauschen, wie Rauschen der HF oder eines Kickers zur ultralangsamen Extraktion, spielt hier vor allem das durch den quantenhaften Charakter der Abstrahlung von Synchrotronlicht erzeugte Rauschen eine Rolle.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit konnten nicht alle der genannten Vielteilcheneffekte berücksichtigt werden. Jedoch wurde durch den Ansatz, Teilchenverteilungen anstelle von Einzelteilchen zu betrachten, die Grundlage zur Erweiterbarkeit des Simulators zur Berücksichtigung jedes der genannten Effekte geschaffen. Im folgenden soll ein Überblick über den Status der Implementation von Vielteilcheneffekten gegeben werden. Dabei wurde wiederum ein analytisches Vorgehen angestrebt. Statt einer Verfolgung der Teilchenverteilung durch iterative Lösung der kinetischen Gleichung (1.1) ("Tracking") wurde eine analytische Lösung der Bewegungsgleichung gesucht und entsprechend implementiert.

2.3.1 Filamentation

Die Filamentation ist abhängig von der Frequenzbreite einer Teilchenverteilung im Phasenraum. Sie äußert sich in einer scheinbaren Verbreiterung der Teilchenverteilung und einem damit verbundenen Abklingen des kohärenten Anteils der Schwingung der Teilchenverteilung (siehe Abbildung 1.2). In Winkel-Wirkungs-Variablen spielt für eine kohärente Schwingung nur der Winkelanteil der Teilchenverteilung eine Rolle. Die Kohärenz der Schwingung kann über die mittlere quadratische Abweichung $< (\Delta\phi_\xi)^2 >$ der Teilchenverteilung abgeschätzt werden, wobei

$$< (\Delta\phi_\xi)^2 > = < (\phi_\xi - < \phi_\xi >)^2 >$$

[18] Zu beachten ist, daß in der neuen Hamilton–Funktion der Term $\cos(2\vec{n}\vec{\phi})$ in den alten Winkeln geschrieben ist. Da er vernachlässigt wird, braucht die Substitution nicht stattzufinden.

ist, $\xi = x,\ z,\ \sigma$ die Phasenraumdimension kennzeichnet und die Klammern $< \ldots >$ die Mittelung über alle Teilchen bedeuten. Für $< (\Delta\phi_\xi)^2 >= \pi^2$ liegt eine Gleichverteilung der Winkel vor, und es kann keine kohärente Schwingung beobachtet werden. Für $< (\Delta\phi_\xi)^2 > < \pi^2$ besteht eine kohärente Schwingung.

Lineare Maschine

Im linearen Fall sind die Schwingungsfrequenzen aller Teilchen im Phasenraum unabhängig von den Wirkungen J_ξ. Sei daher im folgenden eine Teilchenverteilung mit festem $\vec{J}$ angenommen. Hier erfährt die transversale Phasenraumbreite allenfalls eine durch die Chromatizität bedingte Modulation. Sei im integralen Modell der longitudinalen Schwingung (siehe Anhang A.5) $p_\sigma = \sqrt{\frac{2J_\sigma}{\beta_\sigma}} \sin(\frac{2\pi}{L} Q_\sigma (s - s_0) + \phi_{\sigma 0})$. Dann kann in:

$$\phi_\xi = \frac{2\pi}{L} \int (Q_\xi + \Delta Q_\xi)\, ds + \phi_{\xi 0},$$

mit $\xi = x,\ z$, die Änderung des Arbeitspunkts ausgedrückt werden durch: $\Delta Q_\xi = -C_\xi \sqrt{\frac{2J_\sigma}{\beta_\sigma}} \sin(\frac{2\pi}{L} Q_\sigma (s - s_0) + \phi_{\sigma 0})$. Für den Mittelwert und die Standardabweichung des Winkelanteils einer Teilchenverteilung ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
< \phi_\xi > &= < \frac{2\pi}{L} \int_{s_0}^{s} (Q_\xi + \Delta Q_\xi)\, ds + \phi_{\xi 0} >_\phi \\
&= \frac{2\pi}{L} \left(Q_\xi (s - s_0) + < \int \Delta Q_\xi ds >_\phi \right) + < \phi_{\xi 0} >_\phi \\
&= \frac{2\pi}{L} Q_\xi (s - s_0) + \frac{C_\xi \hat{p}_\sigma L}{2\pi Q_\sigma} < \cos \left(\frac{2\pi}{L} Q_\sigma (s - s_0) + \phi_{\sigma 0} \right) >_\phi + < \phi_{\xi 0} >_\phi, \\
< (\Delta\phi_\xi)^2 > &= < \phi_\xi^2 > - < \phi_\xi >^2 \\
&= \left(\frac{C_\xi \hat{p}_\sigma L}{2\pi Q_\sigma} \right)^2 \left(< \cos \left(\frac{2\pi}{L} Q_\sigma (s - s_0) + \phi_{\sigma 0} \right)^2 >_\phi - < \cos \left(\frac{2\pi}{L} Q_\sigma (s - s_0) + \phi_{\sigma 0} \right) >_\phi^2 \right) \\
&\quad + < \phi_{\xi 0}^2 >_\phi - < \phi_{\xi 0} >_\phi^2,
\end{aligned}$$

wobei $\hat{p}_\sigma = \sqrt{\frac{2J_\sigma}{\beta_\sigma}}$ die maximale relative Energieabweichung ist. Im Falle einer Gleichverteilung der longitudinalen Winkel vereinfacht sich das Ergebnis zu:

$$< (\Delta\phi_\xi)^2 >= \left(\frac{C_\xi \hat{p}_\sigma L}{2\pi Q_\sigma} \right)^2 \pi + < \Delta\phi_{\xi 0}^2 >_\phi \ .$$

Bei der rein linearen Maschine erfährt also die transversale Phasenraumverteilung eine mit der Synchrotronfrequenz modulierte Zu– und Abnahme der Phasenbreite. Dies führt zu einer Modulation der transversalen Momente der Verteilung. Die Stärke der Modulation hängt von der Energiebreite der Teilchenverteilung und der Verteilung der longitudinalen Winkel ab. Bei longitudinaler Gleichverteilung erfährt die transversale Verteilung lediglich eine konstante Verbreiterung. Diese Verbreiterung stellt auch im Falle der longitudinalen Ungleichverteilung die Maximalamplitude der Modulation dar. Als Grenzwert, bei dem die Momente der Verteilungsfunktion vollständig verschwinden, also $< (\Delta\phi_\xi)^2 >= \pi^2$ wird, kann

$$\hat{p}_\sigma^{grenze} = \sqrt{\pi} \frac{2\pi Q_\sigma}{L C_\xi}$$

angegeben werden. Für **ELSA** ist $p_\sigma^{grenze} \simeq 0.001$ für natürliche Chromatizität und Betrieb mit PETRA-Resonatoren.

Nichtlineare Maschine

Mit Hilfe der in Abschnitt 2.2.1 dargestellten Verfahren kann für nichtlineare Resonanzen die Schwingungsfrequenz eines Teilchens für jede Phasenraumposition ermittelt werden. Als Filamentationszeit kann in diesem Fall diejenige Zeit angegeben werden, nach der eine δ-förmige Winkelverteilung sich zu einer ausgeglichenen Winkelverteilung mit $< (\Delta\phi_\xi)^2 >= \pi^2$ entwickelt hat. Die Schwingungsfrequenz

der Teilchen ändert sich nur mit der Wirkungsvariablen J. Daher ist, ausgehend von der δ-förmigen Winkelverteilung mit $\phi(0) = \phi_0$ durch Mittelung über die Wirkungen:

$$\begin{aligned} <\phi_\xi> &= \frac{1}{N}\int dJ\rho(J)Q(J)\cdot\frac{2\pi}{L}(s-s_0)+\phi_0 \\ &= \frac{2\pi}{LN}(s-s_0)\int dJ\rho(J)Q(J)+\phi_0 \\ &= \frac{2\pi}{L}(s-s_0)<Q>_J+\phi_0, \quad \text{und:} \\ <(\Delta\phi_\xi)^2>(t) &= <\phi_\xi^2>_J - <\phi_\xi>_J^2 \\ &= \left(\frac{2\pi}{L}(s-s_0)\right)^2\left(<Q^2>_J - <Q>_J^2\right), \end{aligned}$$

und es folgt für die Filamentationszeit t_{fil}:

$$t_{fil} = \frac{L}{2\beta_0\sqrt{<(\Delta Q)^2>_J}}.$$

Die Filamentationszeit hängt damit wie erwartet von der Arbeitspunktbreite der Verteilung ab und wird mit steigender Breite kleiner. Die Filamentationszeit einer definierten Teilchenverteilungsfunktion wird vom Simulator berechnet. Bei Resonanzen mit instabilen Bereichen muß die Mittelwertbildung hierbei jeweils nur über den stabilen Phasenraumbereich durchgeführt werden, da instabile Teilchen nicht zum Erwartungswert der kohärenten Schwingung beitragen.

2.3.2 Strahlungsdämpfung

Lineare Maschine

Der Anteil der Strahlungsdämpfung an der Teilchenbewegung kann mit Hilfe der Fokker-Planck-Gleichung (siehe Anhang A.1) beschrieben werden. Die in Gleichung (1.3) angegebene Form ist jedoch nur gültig, falls die Impulse p erhalten sind und von einer Gleichverteilung der Koordinaten ausgegangen werden kann.

Daher müssen die Friktions– und Diffusionskoeffizienten A_1, A_2 der Fokker-Planck-Gleichung in Winkel-Wirkungs-Variablen angegeben werden. Dazu ist eine Koordinatentransformation notwendig. Diese kann für die Fokker-Planck-Gleichung durchgeführt werden. Die Möglichkeit der Koordinatentransformation ist gerade ein entscheidender Vorteil des Fokker-Planck-Formalismus.[19]

Eine im Beschleuniger umlaufende Teilchenverteilung erfährt eine Dämpfung, die durch das Wechselspiel zwischen Abstrahlung von Synchrotronlicht und Energiezufuhr im Resonator hervorgerufen wird. Die Parameter dieser Strahlungsdämpfung sind die Dämpfungszeiten τ_ξ mit $\xi = x, z, \sigma$, wobei $\tau_\xi \gg \frac{2\pi}{\omega_\xi}$. Ferner erfährt die Teilchenverteilung durch den quantenhaften Charakter der Abstrahlung eine Anregung. Die sich im Ausgleich von Dämpfung und Anregung ergebenden Strahlbreiten werden als natürliche Emittanzen ϵ_ξ bezeichnet. Diese Parameter können aus den optischen Funktionen analytisch berechnet werden (siehe [Wenzel], S. 46, [Farv], S. D-1,[Helm]).

Damit können die Koeffizienten der Fokker-Planck-Gleichung in Winkel-Wirkungs-Variablen für den Beschleuniger hergeleitet werden [Chin]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\rho_{lin}(\vec{J}) &= \left(\sum_\xi \frac{\partial}{\partial J_\xi}A_{1\xi} + \sum_{\xi\xi'}\frac{\partial^2}{\partial J_\xi \partial J'_\xi}A_{2\xi\xi'}\right)\rho_{lin}(\vec{J}) \text{ mit} \\ A_{1\xi} &= -\frac{2J_\xi}{\beta_0\tau_\xi} + 2\frac{\epsilon_\xi}{\beta_0\tau_\xi}, \\ A_{2\xi\xi'} &= 2\frac{\epsilon_\xi}{\beta_0\tau_\xi}J_\xi\delta_{\xi\xi'}. \end{aligned}$$

[19] Zur Koordinatentransformation der Fokker-Planck-Gleichung siehe z.B.: [Risken], S. 89 ff.

Es zeigt sich, daß für die lineare Maschine die Teilchenverteilungsfunktion durch einen Produktansatz:

$$\rho_{lin}(\vec{J}) = \prod_{\xi} \rho_{\xi}(J_{\xi})$$

gelöst werden kann, wobei sich für die einzelnen Phasenraumdimensionen unabhängige eindimensionale Fokker–Planck-Gleichungen ergeben:

$$\frac{\partial}{\partial s}\rho_{\xi} = \left(\frac{\partial}{\partial J_{\xi}} A_{1\xi} + \frac{\partial^2}{\partial J_{\xi}^2} A_{2\xi\xi} \right) \rho_{\xi}.$$

Für die lineare Maschine kann also die Entwicklung der Teilchenverteilungsfunktion in den verschiedenen Phasenraumdimensionen unabhängig voneinander betrachtet werden.

Bedingt durch die Strahlungsdämpfung wird sich eine vorgegebene Teilchenverteilung mit der Zeitkonstante τ_{ξ} einer Gleichgewichtsverteilung annähern, für die $\frac{\partial}{\partial s}\rho_{\xi} \equiv 0$ ist.[20] Diese Gleichverteilung kann ermittelt werden. Dabei läßt sich die Differentialgleichung der Gleichverteilung $0 = \left(\frac{\partial}{\partial j} A_1 + \frac{\partial^2}{\partial j^2} A_2 \right) \rho_{\xi}$ einmal integrieren zu:

$$const = \left(A_1 + \frac{\partial}{\partial j} A_2 \right) \rho_{\xi},$$

was gelöst wird durch:

$$\rho_{\xi}(J, \infty) = \rho_{0,\xi} e^{-aJ/q},$$

wobei $a = \frac{1}{\tau_{\xi}\beta_0}$ und $q = \frac{\epsilon_{\xi}}{\tau_{\xi}\beta_0}$ ist.

Wegen der angenommenen exponentiellen Entwicklung der Anfangsverteilung zur Gleichgewichtsverteilung ist mit gegebenen Anfangsverteilungen $\rho_{\xi}(J, 0)$ die Gesamtverteilung:

$$\rho_{lin}(J, t) = N \prod_{\xi} \left[\left(\rho_{\xi}(J, 0) - \rho_{\xi}(J, \infty) \right) e^{-\frac{t}{\tau_{\xi}}} + \rho_{\xi}(J, \infty) \right].$$

Die dargestellte Behandlung des Diffusionsproblems ist nur als Näherung zu betrachten. Eine vollständige Lösung des Diffusionsproblems erfordert den Einsatz komplexer numerischer Berechnungsmethoden. Zusätzliche Terme weißen Rauschens führen jedoch nur zur Änderung von ϵ_{ξ} und τ_{ξ}, so daß sie leicht in den vorgestellten Lösungsansatz integriert werden können.

Nichtlineare Maschine

Treten Nichtlinearitäten auf, so ändert sich die Situation, da die Erhaltungsgrößen der Bewegung nun nicht mehr die linearen Wirkungen, sondern die neuen Wirkungen, hier mit $\vec{\tilde{J}}$ bezeichnet, sind, die durch die Transformationen (2.13) $\vec{J} \to \vec{\tilde{J}}$ (Transformation auf Resonanzkoordinaten) und (2.15) $\vec{\tilde{J}} \to \vec{\hat{J}}$ (Transformation auf Separatrixkoordinaten) erzeugt werden. Hierbei müssen wiederum nur stabile Teilchen der nichtlinearen Resonanz betrachtet werden, da instabile Teilchen auf einer Zeitskala deutlich kleiner der Dämpfungszeiten verloren gehen. In stabilen Bereichen ist $\vec{\tilde{J}} =< \vec{\tilde{J}} >$ der Mittelwert von $\vec{\tilde{J}}$, so daß für lange Zeiten $t \gg T_{Uml}$, wie sie im Diffusionsprozeß eine Rolle spielen, $\vec{\tilde{J}} = \vec{\tilde{J}}$ gesetzt werden kann.

Ferner hängt $\vec{\tilde{J}}$ linear von $\vec{J}$ ab, Winkel und Wirkungen werden durch die Transformation nicht gemischt. Daher ist eine Lösung der Fokker-Planck-Gleichung in den Wirkungen $\vec{J}$ auch Lösung in $\vec{\tilde{J}}$. Damit kann aus der Lösung der Fokker-Planck-Gleichung für den linearen Fall eine näherungsweise Lösung im nichtlinearen Fall konstruiert werden.

Sei M_J die Transformationsmatrix der Impulse mit

$$\vec{\tilde{J}} = M_J \vec{J},$$

[20] Die Gleichgewichtsverteilung für $t \to \infty$ vernachlässigt die korrekten Randbedingungen des Problems: Reflektierende Wand für $J = 0$, $\rho = 0$ für $min(J_{fix}, J_{akz})$, wobei J_{fix} die Amplitude der Fixpunkte für eine instabile Resonanz (siehe Abschnitt 2.3.2) und J_{akz} die der Maschinenakzeptanz zugeordnete Amplitude ist.

dann ist

$$M_J = \begin{pmatrix} 1 & & -\frac{n_1}{n_{res}} & & \\ & \ddots & & & \\ & 1 & -\frac{n_{res-1}}{n_{res}} & & \\ & & \frac{1}{n_{res}} & & \\ & & -\frac{n_{res+1}}{n_{res}} & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & -\frac{n_N}{n_{res}} & & 1 \end{pmatrix}, \; M_J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & \uparrow & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \vec{n} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & \downarrow & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Da die lineare Transformation die Mittelung nicht beeinflußt, ist für $t \gg T_{Uml}$:

$$\vec{J} = M_J^{-1} \vec{\tilde{J}} = M_J^{-1} \vec{\hat{J}}.$$

Damit kann die Fokker–Planck-Gleichung gelöst werden durch:

$$\rho_{nl}(\vec{J}, t) = \rho_{lin}(M_J^{-1} \vec{J}, t).$$

Dazu muß jedoch die Anfangsverteilung $\rho(\vec{\hat{J}}, 0)$ auch in den linearen Winkel-Wirkungs-Variablen in ein Produkt zerfallen. Dies ist gewährleistet bei Anfangsverteilungen, die durch ihre Breiten $\tilde{\sigma}_\xi$ in den Wirkungen $\tilde{\hat{J}}_\xi$ gekennzeichnet sind:

$$\begin{aligned} \rho_{nl}(\vec{\hat{J}}, 0) &= \rho_0 e^{\vec{\tilde{\sigma}} \cdot \vec{\hat{J}}} \\ &= \rho_0 \exp\left(\vec{\tilde{\sigma}} M_J \vec{J}\right) = \rho_0 \exp\left((M_J^T \vec{\tilde{\sigma}}) \cdot \vec{J}\right) \\ &= \rho_0 e^{\vec{\sigma} \cdot \vec{J}}, \end{aligned}$$

mit $\vec{\sigma} = M_J^T \vec{\tilde{\sigma}}$, womit auch in den alten Wirkungen eine Produktzerlegung hergestellt ist. Im Simulator werden alle Teilchenverteilungen über ihre Breite in den jeweiligen Koordinaten gekennzeichnet. Zur zeitlichen Verfolgung der Verteilung werden die Breiten analog zu obiger Formel in die den linearen Winkel-Wirkungs-Variablen entsprechenden Breiten umgerechnet, die Fokker-Planck-Gleichung wird sodann in diesen Variablen gelöst.

2.4 Rampen

Der Simulator soll in der Lage sein, das Teilchenverhalten bei Veränderung von Parametern der Teilchenbewegung, wie sie z.B. durch Rampen der Netzgeräte hervorgerufen werden, wiederzugeben. Dabei kann allgemein vorausgesetzt werden, daß die Zeitkonstante der Parameteränderung wesentlich kleiner ist als die Umlaufzeiten der Teilchenbewegung im Phasenraum.

Zur Beschreibung der Teilchenbewegung bietet sich damit eine adiabatische Näherung an (siehe z.B. [Licht], S. 69).

Adiabatische Näherung

Für langsam veränderliche Parameter der Teilchenbewegung bleiben in guter Näherung die Wirkungsvariablen der Teilchenbewegung erhalten, während sich die Frequenz der Teilchenbewegung ändert:

Ohne Rampe		mit Rampe
J_0	$\rightarrow$	J_0
Q_0	$\rightarrow$	$Q(t)$

Somit kann der Teilchenort zu einer Zeit berechnet werden als:

$$\begin{pmatrix} J \\ \phi \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} J_0 \\ \phi_0 + \int_0^t d\tau Q(\tau) \end{pmatrix}.$$

Rampschritte

Im Simulator wird eine Rampe durch die zeitliche Änderung der Feldstärken der Beschleunigerelemente vorgegeben. Der Simulator analysiert nun in diskreten, einstellbaren zeitlichen Schritten die Phasenraumstruktur. Er nimmt damit "Schnappschüsse" des Teilchenverhaltens zu den verschiedenen Zeiten. Aus diesen, zu den einzelnen Rampschritten genommenen Schnappschüssen wird $Q(t)$ für jede Phasenraumdimension bestimmt, so daß der Winkel des Teilchens während der Rampe durch Integration ermittelt werden kann.

Um die Zahl der notwendigen Rampschritte gering zu halten, wird dabei angenommen, daß sich die Resonanzparameter zwischen den Rampschritten linear ändern. Zwischen den Rampschritten wird sodann aus den linear interpolierten Resonanzparametern das aktuelle $Q(t)$ bestimmt, das somit einen durchaus nichtlinearen Verlauf haben kann.

Dies ist insbesondere sinnvoll für Teilchen in der Nähe der Separatrix, wo $Q(t)$ beim Zulaufen des Teilchens auf die Separatrix zunächst abnimmt, um nach Verlassen der Separatrix wieder zuzunehmen.

Abbildung 2.10 illustriert den Zusammenhang zwischen Rampschritten und interpoliertem Teilchenverhalten.

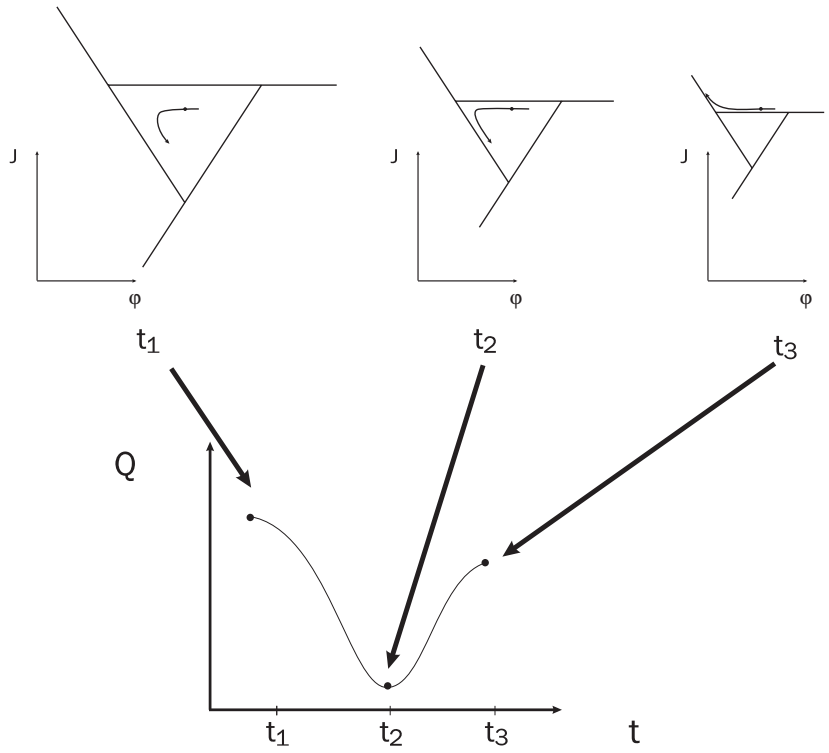


Abbildung 2.10: Rampschritte und Interpolation

Zur Bestimmung der Teilchenposition zur Zeit t muß dabei neben der Integration $\int Q(\tau)d\tau$ auch noch ermittelt werden, ob das verfolgte Teilchen den stabilen Bereich des Phasenraums verlassen hat. Dies geschieht, indem aus den interpolierten Resonanzparametern der Zeitpunkt und Phasenwinkel des Verlassens des stabilen Bereichs ermittelt wird. Das Teilchen wird sodann auf der instabilen Trajektorie bis zum maximalen Phasenraumwinkel dieser Trajektorie verfolgt und dann als verloren registriert.

In Abbildung 2.11 ist die Trajektorie eines durch Rampe verlorenen Teilchens dargestellt.

Zur Analyse des Teilchenverlustes bei vorgegebenen Teilchenverteilungen kann, da die Zeitkonstante der Rampe wesentlich größer als die des Umlaufs in den Phasenraumdimensionen ist, von einer Durchmischung der Winkelverteilung ausgegangen werden. Dann kann aus den interpolierten Resonanzparametern der Anteil der Teilchenverteilung im stabilen und instabilen Bereich bestimmt werden. So ist auf einfache Weise für eine Rampe und Teilchenverteilung der zeitliche Verlauf der Teilchenzahl und die

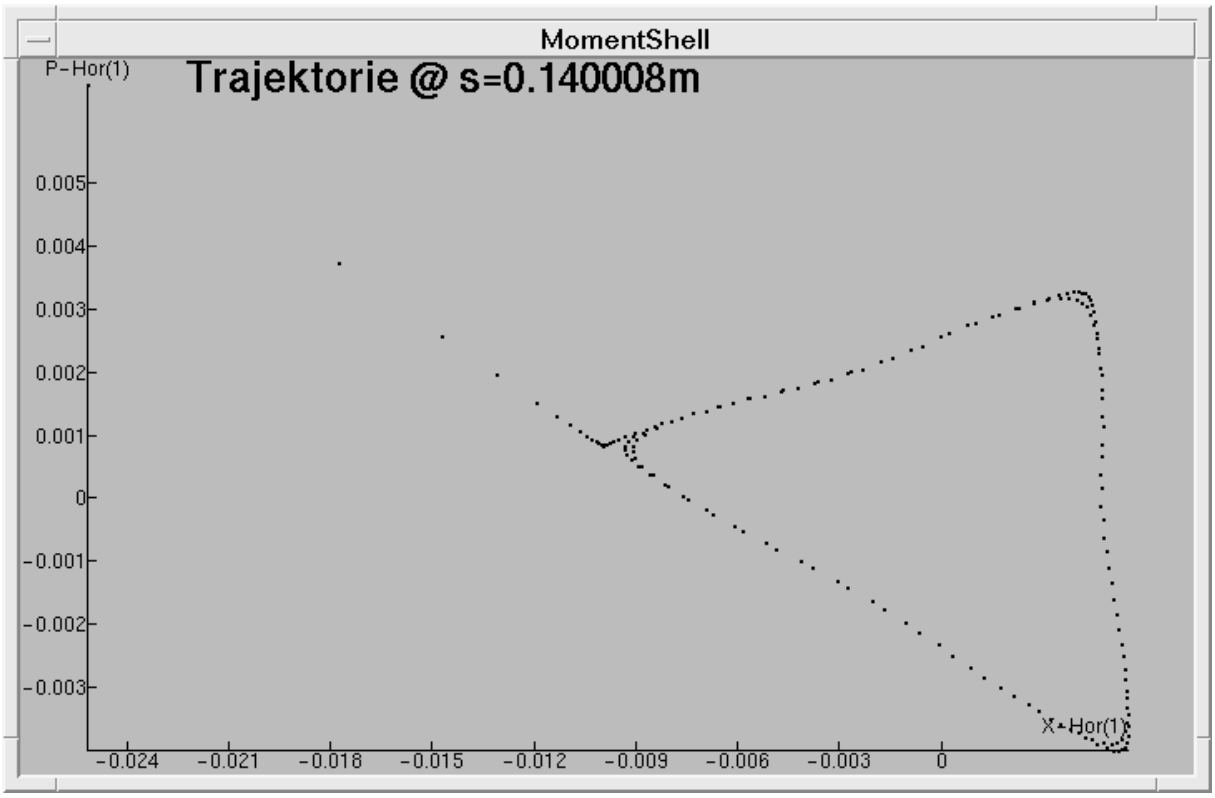


Abbildung 2.11: Teilchenverlust durch Rampe

Extraktionsrate zu ermitteln.

Die vorgestellten Verfahren zur Bestimmung des Extraktionszeitpunkts eines Teilchens oder der Extraktionsrate einer Teilchenverteilung, bei der nur ein einmaliger Übergang vom stabilen in den instabilen Bereich zugelassen ist, können jedoch nur für monotone Rampen angewendet werden.

Neue Resonanzen

Die adiabatische Näherung ist nur gültig, solange die Rampe nicht das Auftreten neuer Resonanzen im Phasenraum hervorruft.

Rampen können das Auftreten neuer Resonanzen im Phasenraum auf zweifache Weise hervorrufen. Zum einen können durch Rampen die Parameter der Teilchenbewegung so verändert werden, daß im durch den Teilchenstrahl ausgefüllten Bereich des Phasenraums eine neue Resonanzbedingung erfüllt wird, für die die Anregung hinreichend groß zur Erzeugung von Resonanzinseln ist. Es wird also im Parameterraum der Teilchenbewegung eine Resonanz durchlaufen. Dies kann allgemein auftreten, wenn die Rampen monoton (steigend oder fallend) sind.

Ist die Veränderung der Parameter der Teilchenbewegung periodisch, so kann dadurch zu einer bestehenden Resonanz ein ganzes Band von Seitenresonanzen im Phasenraum angeregt werden (siehe z.B. [Tennyson]). Die Resonanzen liegen um so dichter, je langsamer die Modulation der Parameter ist, für kleine Modulationsfrequenzen überlappen die Seitenresonanzen und bilden einen chaotischen Bereich der Teilchenbewegung (siehe dazu [Licht], S. 336 f.).

Im einfachsten Fall führt eine durch Rampen bedingte Parameteränderung jedoch nur zu einer quantitativen Veränderung der Teilchenbewegung, indem die Frequenz der linearen Bewegung oder Parameter einer schon bestehenden Resonanz sich ändern, wie dies z.B. bei der Resonanzextraktion geschieht. In diesem Falle bleibt die adiabatische Näherung gültig.

Im Simulator wird für jeden Rampschritt die Resonanzstruktur des Phasenraums untersucht. Aus diesen

Analysen zu den verschiedenen Rampschritten kann ermittelt werden, ob die Rampe eine neue Resonanz hervorruft.

Ist dies nicht der Fall, kann das Teilchenverhalten während der Rampe durch eine adiabatische Näherung beschrieben werden. Tritt eine neue Resonanz auf, kann die Teilchenbewegung nur während des Auftretens dieser Resonanz adiabatisch genähert beschrieben werden.

Die Behandlung von durch Modulation äußerer Parameter hervorgerufenen Resonanzen ist im Simulator zur Zeit nicht implementiert.

2.5 Generierung von Meßgrößen

Nachdem in der Analysephase Parameter des hamiltonischen und stochastischen Anteils der Teilchenbewegung ermittelt wurden, können diese abgerufen und mit ihrer Hilfe Simulationen der Bewegung von Einzelteilchen und Teilchenverteilung generiert werden.

Im folgenden sollen die verschiedenen vom Simulator gelieferten Ergebnisse dargestellt werden.

Parameter

Im Simulator können die Parameter der Teilchenbewegung, wie sie bei der oben dargestellten Analyse der Teilchenbewegung auftreten, auf komfortable Weise abgerufen werden. Parameter der Teilchenbewegung sind dabei wegabhängig, wie optische Funktionen und Closed-Orbit, oder integral, wie Arbeitspunkte, Dämpfungszeiten und Resonanzstärken. Diese Parameter können nicht direkt als Meßergebnisse erhalten werden, jedoch bestimmen sie das theoretische Verhalten der Maschine.

Die optischen Funktionen werden dabei in Abhängigkeit vom Ort des Beschleunigers dargestellt, wie in Abbildung 2.1 gezeigt, ihre Werte können jedoch, genau wie die integralen Parameter der linearen Bewegung, über das Popup-Menü des Simulators abgerufen werden, wie in Abbildung 2.12 dargestellt.

Erwartungswerte im Zeitraum

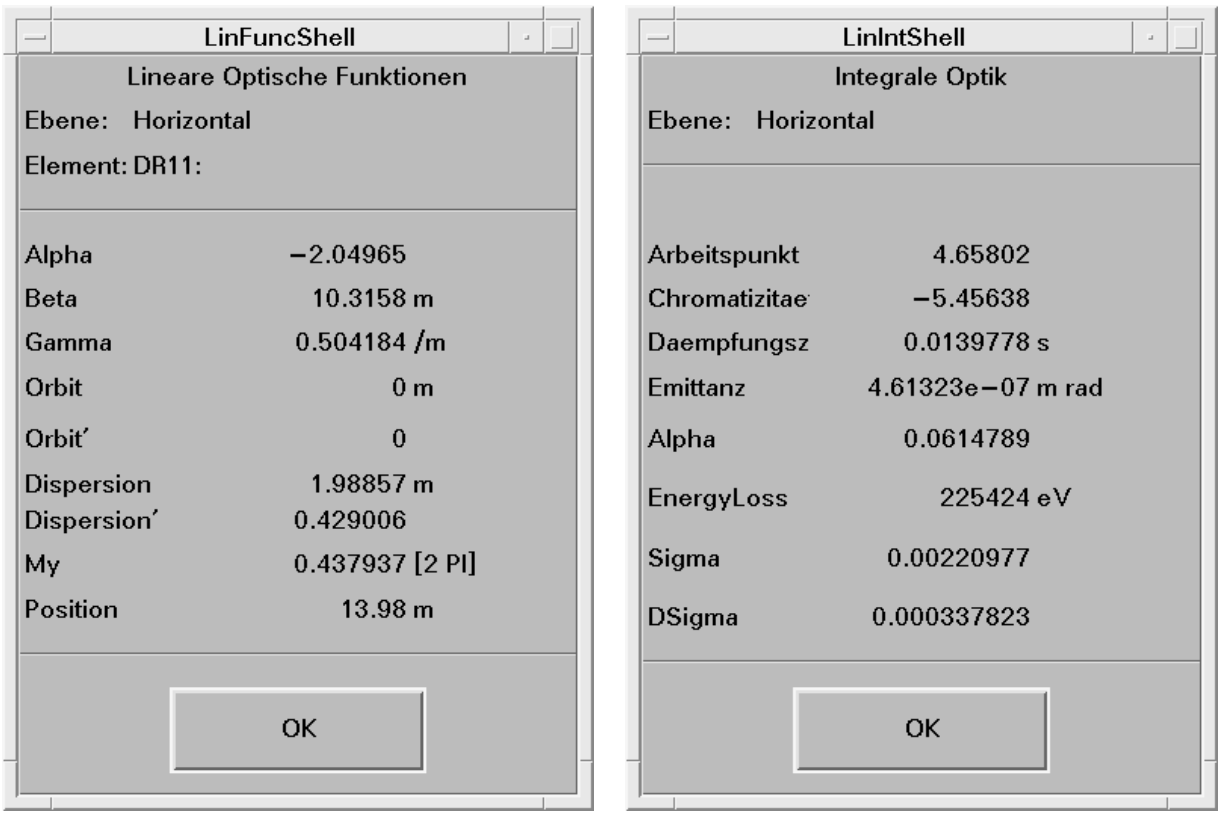
Diagnosemessungen am Beschleuniger geschehen mit Monitoren, die an einer Stelle des Beschleunigers ein zeitabhängiges Signal der vorbeifliegenden Teilchenverteilung aufzeichnen. Dabei bestimmen Bauart des Monitors und Erfassungselektronik die Empfindlichkeit des Monitors für verschiedene Frequenzbereiche und Momente der Teilchenverteilung. Allgemein liefert jedoch der Monitor ein integrales Signal der zu einer Zeit an der Position des Monitors befindlichen Teilchenverteilung.

Die Diagnosemessung soll eine Aussage über das Verhalten eines Teilchenensembles beim Umlauf im Beschleuniger machen. Das betrachtete Teilchenensemble ist dabei ein Ausschnitt aus der Ringfüllung. Das Teilchenensemble kommt im Abstand der Umlaufzeit am Ort des Monitors vorbei, so daß das Monitorsignal im Abstand der Umlaufzeit Informationen über das selbe Teilchenensemble enthält. Daher ist es sinnvoll, bei der Auswertung der Monitorinformation immer die Signale in Zeitabständen der Umlaufzeit zu vergleichen. Im einfachsten Fall wird die Signalnahme mit der Umlauffrequenz abgetastet.

Um Ergebnisse des Simulators unmittelbar mit Ergebnissen von Diagnosemessungen vergleichen zu können, muß das Signal einer Teilchenverteilung an einem Diagnosemonitor nachgebildet werden können. Dies bedeutet, daß an einem festen Ort des Beschleuigers die zeitliche Entwicklung der Momente einer beim Umlauf um den Ring verfolgten Teilchenverteilung ermittelt werden muß, die Signalgewinnung mit Monitoren geschieht im Zeitraum. Obwohl nach wie vor die Umlauflänge s die unabhängige Variable ist, werden daher hier alle signalbezogenen Größen in Abhängigkeit von $t(s) = s/\beta_0$ ausgedrückt. Dabei wird davon ausgegangen, daß die Signalnahme synchron zur Umlaufzeit im Beschleuniger geschieht:

$$M_n^k = M(n \cdot T) = \frac{1}{N} \int dJ^3 d\phi^3 \rho(\vec{J}, \vec{\phi}, t) \xi^k(\vec{J}, \vec{\phi}) \delta(t - n \cdot T - \frac{s_0}{\beta_0}),$$

wobei s_0 der Ort des Monitors, ξ die betrachtete Koordinate und n die Nummer des Umlaufs ist. Der Index k gibt die Potenz, zu der die betrachtete Koordinate im Integral genommen wird und damit die Ordnung des Moments M an. In der Regel interessieren jedoch nicht die Momente M_n^k der Ordnung k,



(a) Optische Funktionen

(b) Integrale

Abbildung 2.12: Optische Funktionen und Ringintegrale

sondern die zugehörigen mittleren Abweichungen. Aus den so berechneten Momenten M_n^k können die mittleren Abweichungen, die sogenannten Kumulanten K_n^k bestimmt werden:

$$\begin{aligned} K_n^0 &= M_n^0 && \text{relative Teilchenzahl,} \\ K_n^1 &= M_n^1 && \text{Mittelwert,} \\ K_n^2 &= M_n^2 - (M_n^1)^2 && \text{Streuung,} \\ K_n^3 &= M_n^3 - 3M_n^1 M_n^2 + 2(M_n^1)^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Momente M_n^k muß der Benutzer eine Verteilungsfunktion definieren. Dabei wird zunächst festgelegt, in welchen Koordinaten die Verteilungsfunktion angegeben wird.

Die Hamiltonfunktion wird, wie gezeigt, durch eine Folge von Koordinatentransformationen in eine Form gebracht, die unabhängig von den Winkelvariablen ist. Jede Transformation stellt dabei eine Stufe der Näherung der Hamiltonfunktion dar. Indem der Benutzer die Koordinaten der Verteilungsfunktion bestimmt, legt er gleichzeitig fest, in welcher Näherung die Hamiltonfunktion betrachtet werden soll. So ist z.B. zur Analyse einer Messung, die auf eine Bestimmung der optischen Funktionen ausgeht, nur die Berücksichtigung des linearen Anteils der Teilchenbewegung notwendig, während bei der Bestimmung der Fixpunkte einer Separatrix auch der nichtlineare Anteil der Hamiltonfunktion berücksichtigt werden muß. Ferner kann so der Unterschied der Teilchenbewegung, der durch die verschiedenen Anteile der Hamiltonfunktion hervorgerufen wird, erfaßt werden.

Die verschiedenen Koordinatensysteme gehen durch kanonische Transformationen auseinander hervor. Dabei wird die Umlauflänge s als unabhängige Variable nicht verändert. Solche Transformationen sind

volumenerhaltend (siehe z.B. [Bell]). Daher ist die Form des Volumenintegrals in den verschiedenen Koordinaten gleich.

Hat der Benutzer sich für ein Koordinatensystem zur Angabe der Verteilungsfunktion entschieden, wird im weiteren nur der Anteil der Hamiltonfunktion betrachtet, der durch diese Koordinaten erfaßt wird, d.h., es wird davon ausgegangen, daß die Wirkungen in diesen Koordinaten konstant bleiben. Der Benutzer kann jedoch unabhängig davon entscheiden, ob der stochastische Anteil der Bewegung berücksichtigt werden soll oder nicht.

Bei der Festlegung der Verteilungsfunktion kann der Benutzer Schwerpunkt, Breite und Form der Verteilungsfunktion in jeder Phasenraumkoordinate bestimmen. Die Verteilungsfunktion kann dabei zwischen einer δ-förmigen Verteilung, die das Verhalten eines Einzelteilchens wiedergibt und verschieden geformten Verteilungen mit endlicher Breite gewählt werden.

Ein Moment M_n^k ergibt sich in den gewählten Koordinaten als:

$$M_n^k = \frac{1}{N} \int dJ^3 d\phi^3 \rho(\vec{J}, \vec{\phi} + \omega_0 \vec{Q}(\vec{J})t) \xi^k(\vec{J}, \vec{\phi}) \delta(t - n \cdot T - \frac{s_0}{c}),$$

wobei ω_0 die Umlauffrequenz ist. Der Benutzer kann auswählen, welche Kumulanten K_n^k bezüglich welcher Phasenraumkoordinate ermittelt werden soll. Dabei müssen zwei Kumulanten ausgewählt werden, die graphisch gegeneinander aufgetragen werden. Wird dabei die Zeit als eine Phasenraumkoordinate ausgewählt, so wird auf der entsprechenden Achse jeweils n aufgetragen, da wegen des $\delta(t - n \cdot T - \frac{s_0}{c})$-Termes in M_n^k für die Zeit nur $K_n^1 = n$ von Null verschieden ist. Ferner kann der Zeitabstand der Signalnahme sowie die zu simulierende Gesamtzeit in Vielfachen der Umlaufzeit angegeben werden.

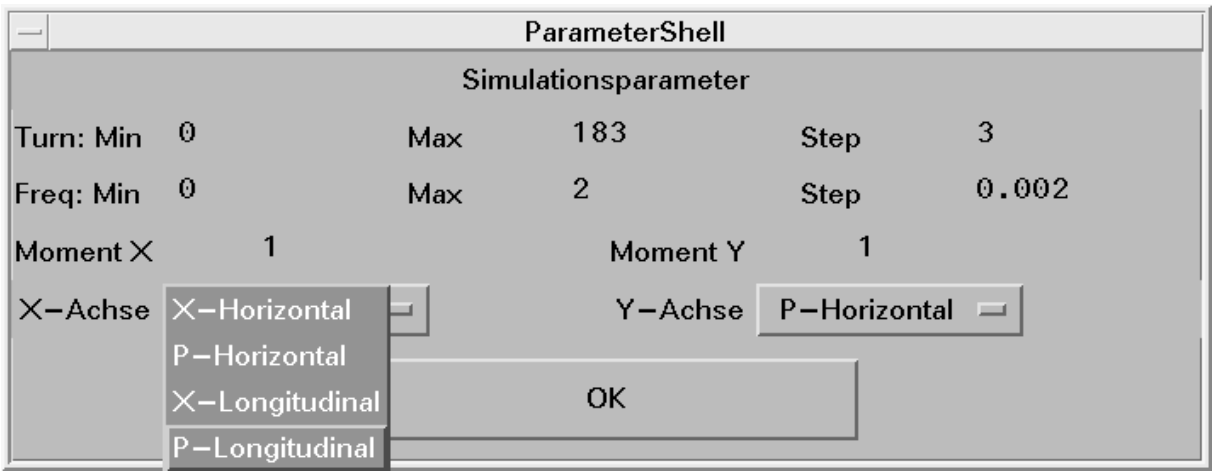


Abbildung 2.13: Parameter des Teilchentrackings

Das Eingabefenster ist in Abbildung 2.13 dargestellt. Nach Eingabe der Parameter wird die Berechnung des Monitorsignals über das Popup-Menü des Simulators angestoßen. Dabei wird die aktuelle Mausposition als Ort des Monitors, dessen Signal nachgebildet werden soll, angenommen.[21]

Das Ergebnis der Simulation wird in einem eigenen Fenster dargestellt, wobei die gewählten Momente der Phasenraumkoordinaten gegeneinander aufgetragen werden.

Das Beispiel des Ergebnisses einer Simulation ist in Abbildung 2.14 zu sehen.

Erwartungswerte im Frequenzraum

Charakteristisch für das Verhalten der Teilchen im Phasenraum ist der Frequenzgehalt der Monitorsignale.

In der Praxis wird der Frequenzgehalt durch eine Fouriertransformation von Monitorsignalen erhalten. Das Monitorsignal, das in die Fouriertransformation eingeht, kann nur über einen endlichen Zeitraum

[21] Soll das Signal eines Einzelteilchens statt einer Teilchenverteilung nachgebildet werden, so wird auch die Position des Teilchens auf den Ort der aktuellen Mausposition gesetzt, damit das Signal des Teilchens mit dem angenommenen Zeitpunkt der Meßwertnahme übereinstimmt.

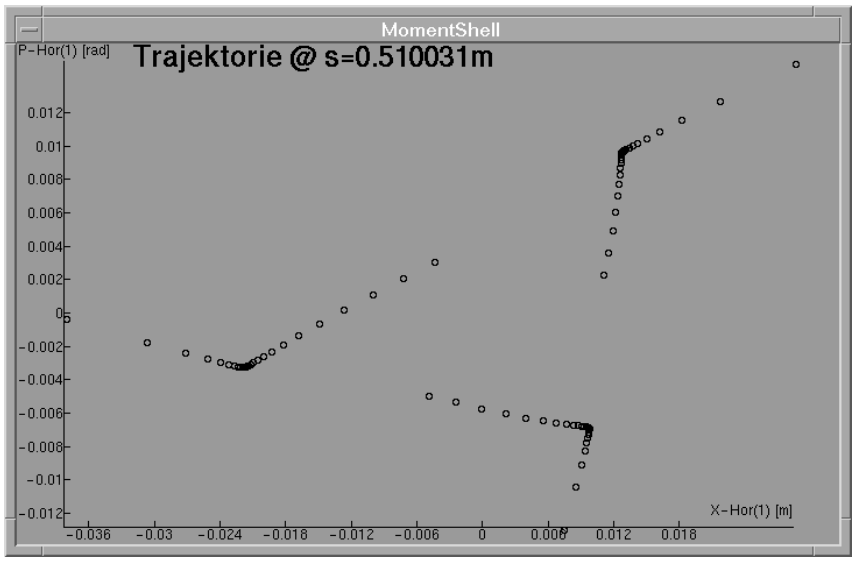


Abbildung 2.14: Beispiel eines Simulationsergebnisses

erfaßt werden. Dieser Zeitabschnitt ist als "Fenster" anzusehen, das aus dem theoretisch unendlich ausgedehnten Signalzug am Monitor den erfaßten Ausschnitt herausschneidet. Nach dem Faltungstheorem ist das Ergebnis der Fouriertransformation dann die Faltung aus der Fouriertransformierten des unendlich ausgedehnten Signalzugs und der Fensterfunktion (siehe z.B. [Goetz90], S. 38 ff.). Dies kann zu Aufweitung, Verschiebung und Änderung der Höhe der Spektrallinien führen. Durch geschickte Formung der Fensterfunktion auf dem Träger der Zeitdauer der Signalnahme können diese Effekte verringert werden, es muß jedoch dabei immer ein Kompromiß zwischen den verschiedenen das Spektrum verfälschenden Einflüssen eingegangen werden (siehe z.B.: [LeCroy], S. 11-19 f.). Um den signalverfälschenden Einfluß der Fensterfunktion gering zu halten, muß bei der Berechnung des Frequenzspektrums ein möglichst langer Signalzug betrachtet werden. Alternative Methoden der Modellierung des Frequenzspektrums aus Monitordaten ohne Verwendung der Fouriertransformation können die geschilderten Nachteile zum Teil vermeiden.[22]

Im Simulator kann dieser Frequenzgehalt jedoch direkt bestimmt werden, da für jede Phasenraumposition die lokale Umlauffrequenz $Q(\vec{J},\vec{\phi})$ und die Teilchendichte bekannt ist. Zur direkten Berechnung des Spektrums wird neben den Arbeitspunkten nur die Form der Phasenraumtrajektorie benötigt. Daher genügt es, die Teilchenposition an Stützstellen im Bereich $[0\ldots 2\pi]$ in jeder Phasenraumdimension zu bestimmen. Die Zahl der Stützstellen ist dabei durch die Zahl der zu erfassenden Seitenbänder gegeben. Sie ist jedoch unabhängig vom gewünschten Frequenzband oder der Frequenzauflösung.

Neben der Einsparung der Rechenzeit für die Fouriertransformation bietet die direkte Berechnung des Frequenzspektrums damit den Vorteil, daß das Teilchensignal nur an relativ wenigen Punkten berechnet werden muß. Darüber hinaus bleiben Form, Höhe und Position der Frequenzlinien unbeeinflußt.

Bei der Bestimmung des Frequenzspektrums des Teilchensignals ist zu beachten, daß der longitudinale Anteil der Teilchenbewegung σ zu einer Phasenmodulation des Monitorsignals führt: Passiert das Sollteilchen den Monitor zur Zeit t_0, so passiert ein Teilchen, daß dem Sollteilchen um σ vorauseilt, den Monitor zur Zeit $t_0 - \sigma/\beta_0$. Der transversale Anteil der Teilchenbewegung hingegen führt zu einer Amplitudenmodulation des Signals.

Spektrum ohne Phasenmodulation

Die Teilchenverteilung sei zerlegbar in $\rho(\vec{J},\vec{\phi}) = \rho_J(\vec{J}) \cdot \rho_\phi(\vec{\phi})$. Zunächst soll $\sigma = 0$ angenommen werden. Für ein festes $\vec{J}$ berechnet sich das Frequenzspektrum als der Mittelwert aller Winkel über die Fourier-

[22] Zur Auswirkung von Fenstern, Frequenzauflsung und alternativen Methoden der Modellierung des Frequenzspektrums siehe [Goetz94].

transformierte des Teilchensignals M^k. Im Gegensatz zur Erzeugung von Phasenraumbildern muß hier jedoch das zeitlich kontinuierliche Signal $M^k(t)$ betrachtet werden. Damit spiegelt sich die Ringfüllung im erhaltenen Signal und damit auch im Spektrum wider. Anstatt wie bisher die Umlauflänge s immer nur bei $s = s_0$ zu betrachten, muß s jetzt explizit berücksichtigt werden. Sei also s_0 der Ort des Monitors, so ist:

$$\begin{aligned} F^k(\omega) &= \int dt \cdot e^{i\omega t} M^k(t) \\ &= \int dt \cdot e^{i\omega t} \sum_n \int d^3\phi \rho_\phi(\vec{\phi} + \omega_0 \vec{Q} t; s_0 + \beta_0 t) \xi^k(\vec{\phi}; s_0). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Fouriertransformierten von ρ, bzw. ξ in den Phasenraumwinkeln kann das Frequenzspektrum berechnet werden. Dabei muß ρ auch nach der Umlauflänge s fouriertransformiert werden. Da ρ, ξ in allen Phasenraumwinkeln und der Umlauflänge s periodisch sind,[23] existiert für sie eine Fourierreihenentwicklung. Seien $\tilde{\xi}^k_{\vec{q}}$ und $\tilde{\rho}_{\vec{p},n}$ also die Komponenten der Fouriertransformation von ξ^k bzw. ρ_ϕ, wobei der Index n die Transformationskomponenten nach s kennzeichnet, während die Fouriertransformierte der Koordinate für $\xi^k(s_0)$ bestimmt wurde. Dann ist:

$$\begin{aligned} F^k(\omega) &= \int dt \int d^3\phi e^{i\omega t} \sum_{n,\vec{p},\vec{q}} \tilde{\rho}_{\vec{p},n} \tilde{\xi}^k_{\vec{q}} \exp\left(i[\vec{p}(\vec{\phi} + \omega_0 \vec{Q} t) + n \frac{2\pi}{L}(s_0 + \beta_0 t)] \right) e^{i\vec{q}\vec{\phi}} \\ &= \sum_{n,\vec{p}} F^k_{n,\vec{p}} \delta(\omega + \omega_0 \vec{p}\vec{Q} - n\omega_0), \end{aligned}$$

mit:

$$F^k_{n,\vec{p}} = \tilde{\rho}_{\vec{p},n} \tilde{\xi}^k_{-\vec{p}} \exp\left(in \frac{2\pi}{L} s_0 \right).$$

Für die genaue Herleitung dieser Formel sei auf Anhang A.7 verwiesen. Das Spektrum der Teilchenverteilung wiederholt sich also im Abstand der Umlauffrequenz durch den Term $n\omega_0$ in der δ-Funktion. Die Höhe der Peaks an dieser Stelle ist durch den Index n von $\tilde{\rho}_{\vec{p},n}$, also durch die Fouriertransformierte der longitudinalen Ringfüllung gegeben. Für $\vec{p} \neq \vec{0}$ bekommen die Umlaufharmonischen Seitenbänder im Abstand $\omega_0 \vec{p}\vec{Q}$. Die Höhe ist gegeben durch $\tilde{\rho}_{\vec{p}} \tilde{\xi}_{-\vec{p}}$. Es muß aufgrund dieses Produkttermes zur Ausbildung von Seitenbändern bei $\omega_0 p_\eta Q_\eta$ in der Phasenraumdimension η eine echte Abhängigkeit sowohl der Dichtefunktion ρ alsauch der Koordinate ξ vom Winkel ϕ_η bestehen. Für die Teilchenverteilung bedeutet dies, daß bezüglich ϕ_η eine kohärente Schwingung vorliegt. Für die Koordinate ξ muß eine Kopplung zur Phasenraumdimension η existieren. Falls die Phasenräume entkoppelt sind, sind nur für $\eta = \xi$ Seitenbänder $\omega_0 p_\xi Q_\xi$ der Umlaufharmonischen zu beobachten. Für eine nichtlineare Maschine sind die Arbeitspunkte $Q(J)$ der Teilchen unterschiedlich. In diesem Fall überlagern sich die Frequenzspektren der Teilchen, und die Arbeitspunktpeaks werden verschmiert. Die Linien der Umlaufharmonischen bleiben jedoch scharf.

Spektrum mit Phasenmodulation

Für $\sigma \neq 0$ muß an Stelle der Zeit t nun in obiger Formel jeweils $t - \sigma(t)/\beta_0$ eingesetzt werden. Damit wird das oben berechnete Signal phasenmoduliert mit $\sigma(nT)$. Die Phasenmodulation produziert zu jeder Linie im obigen Spektrum eine Kette von Seitenlinien, deren Amplitude mit der Besselfunktion moduliert ist (siehe dazu [Laclare]).

Bedingt durch eine Impulsänderung der Teilchen ändert sich der Phasenvorschub pro Zeit, und es ergibt sich (siehe Anhang A.7) mit $\vec{\Omega}_C = \frac{1}{1/\gamma_0^2 - \alpha} \vec{C} \omega_0$:

$$\vec{\phi}(s) = \vec{Q}\omega_0(t + \frac{\sigma}{\beta_0}) + \vec{\Omega}_C \frac{\sigma}{\beta_0}.$$

Damit ergibt sich, wie in Anhang A.7 ausgeführt, $F^k(\omega)$ als:

$$\begin{aligned} F^k(\omega) &= \int dt e^{i\omega t} \int d^3\phi \rho_\phi \left(\vec{\phi} + \omega_0 \vec{Q}(t + \frac{\sigma}{\beta_0} + \Omega_c \frac{\sigma}{\beta_0}; s_0 + \beta_0(t + \frac{\sigma}{\beta_0})) \right) \xi^k(\vec{\phi}; s_0) \\ &= \sum_{n,\vec{p},\vec{m}} F^k_{n,\vec{p}} K_{\vec{m},\vec{p}} \delta(\omega + \omega_0 \vec{p}\vec{Q} + n\omega_0 + \omega_0 \sum_r m_r r Q_\sigma), \end{aligned}$$

[23] Die an dieser Stelle geforderte strenge Periodizität in s, die zur Analyse des Frequenzspektrums eines Teilchens als Linienspektrum führt, bedingt, daß die hier gegebene Ableitung nur für Zeiten kleiner als die Zeitkonstante der stochastischen Bewegung gültig ist. Für längere Zeiten kommt es zur Verschmierung des hier erhaltenen Spektrums.

wobei $\vec{m}$ ein Vektor mit $r_{max}+1$ Komponenten aus ganzen Zahlen und

$$K_{\vec{m},\vec{p}} = \prod_r i^{-m_r} \left(\mathcal{J}_{m_r}(2(\omega_0 \vec{p}\vec{Q} + \vec{\Omega}_C \vec{p} - n\omega_0)|\tilde{\sigma}_r|) \exp\left(i m_r \phi_{\sigma,r}\right) \right)$$

ist.

Durch die Phasenmodulation bekommt damit jede Frequenzlinie des unmodulierten Spektrums $F^k_{n,\vec{p}}$ Seitenlinien im Abstand der Vielfachen von $\omega_0 Q_\sigma$. Dies sind die Synchrotronseitenbänder.

Teilchenverlustraten

Bedingt durch Abstrahlung und Änderung der Resonanzparameter im Phasenraum können im Beschleuniger umlaufende Teilchen ihre Bahn ändern. Insbesondere ist es möglich, daß ein Teilchen dabei aus einem Bereich stabiler Umlaufbahnen auf eine instabile Bahn gelangt. Der Anteil der Teilchen, die zu einem Zeitpunkt stabil umlaufen ergibt sich aus dem Überlapp des stabilen Phasenraumbereichs zu einer Zeit mit der zu dem Zeitpunkt bestehenden Phasenraumverteilung.

Sei $\Gamma(\vec{J},\vec{\phi},t)$ definiert als:

$$\Gamma(\vec{J},\vec{\phi},t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \vec{J},\vec{\phi} \text{ auf stabiler Teilchentrajektorie zur Zeit } t, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da die Teilchenbahn allein von $\vec{J}$ bestimmt ist, ist $\Gamma = \Gamma(\vec{J},t)$. Ferner wurde die Separierbarkeit der Verteilungsfunktion ρ in einen Winkelanteil ρ_ϕ und einen Wirkungsanteil ρ_J angenommen.

Damit ergibt sich der Anteil der stabil umlaufenden Teilchen als:

$$N_{stab}(t) = \int dJ \Gamma(\vec{J},t)\rho_J(\vec{J},t).$$

Da in der Regel eine Gleichverteilung der Teilchen über die Winkel schon nach einigen hundert Umläufen geschehen ist, und die Entwicklung der Teilchenverteilung über Zeiten in der Größenordnung des Beschleunigerzyklus von Interesse ist, gibt N_{stab} in guter Näherung den Anteil der tatsächlich im Beschleuniger umlaufenden Teilchen wieder. Die Teilchenverlustrate ("Spill") $\frac{\partial N}{\partial t}$ ergibt sich aus der Ableitung von $N_{stab}(t)$ und kann numerisch durch einen Differenzenquotienten angenähert werden.

Zur Analyse des Spills auf Zeitskalen kleiner als die Umlaufzeiten im Phasenraum $\frac{T}{Q_x}$, $\frac{T}{Q_z}$, $\frac{T}{Q_\sigma}$ muß unter der Annahme kohärenter Schwingungen in zumindest einer Phasenraumdimension die Teilchenverteilung in ihrer zeitlichen Entwicklung verfolgt und die Rate der instabil werdenden Teilchen erfaßt werden.

Kapitel 3

Realisierung des Simulators

Im vorliegenden Kapitel soll der Simulator aus der Sicht des Programmentwicklers beschrieben werden. Darüber hinaus wird auf die Einbindung des Simulators in das Konzept der vereinheitlichten Kontrolle, Diagnose und Simulation eingegangen.

3.1 Verwendete Entwicklungswerkzeuge und Standards

Vom softwaretechnischen Standpunkt muß der Simulator mehreren, sich teilweise ergänzenden Anforderungen genügen. Zum einen muß die Entwicklung komfortabel und in angemessener Zeit durchführbar sein. Weiterhin soll die entstandene Software portabel und somit nicht an eine Hardwareplattform gebunden sein. Schließlich soll das Programm auf einer Hardware ablaufen können, die in guter Kosten–Nutzen Relation Rechenleistung zur Verfügung stellt.

Als Hardwareplattform zur Entwicklung des Simulators wurden Rechner der Workstation-Klasse der Firma HP gewählt, die zum Zeitpunkt, als die Entscheidung über die zu benutzende Hardware fiel (1992) die preiswerteste Rechenleistung anboten. Andere Rechnerkonzepte, wie Transputer der Firma INMOS, schienen zunächst attraktiv. Die sprunghafte Zunahme der Rechenleistung bei Computern der Workstation-Klasse sowie die komfortablere und besser standardisierte Entwicklungsumgebung auf diesen Rechnern schloß die Realisierung alternativer Rechnerkonzepte jedoch aus.

Da die vorliegende Arbeit die physikalischen Aspekte des Programms betont, muß die Programmierumgebung Bedingungen schaffen, in denen physikalische Inhalte in möglichst einfacher und schneller Weise in Software umgesetzt werden können. Voraussetzung dafür ist zunächst die Programmierung in einer strukturierten Programmiersprache, bei der Funktionseinheiten des Programms getrennt und in hierarchischer Weise gekapselt werden können. Die strukturierte Programmierung bietet die Möglichkeit, trotz einer komplexen Problemstellung einen klar gegliederten Programmablauf zu schaffen. Insbesondere wird hierdurch die Softwarepflege und –erweiterung maßgeblich erleichtert.

Als Programmiersprache des Simulator–Projektes wurde die Sprache "C" gewählt. Neben ihrer Mächtigkeit und weiten Verbreitung auf verschiedenen Rechnersystemen ist sie gut auf die Erstellung strukturierter Programme abgestimmt,[1] und es existieren Compiler mit leistungsfähiger Codeoptimierung für diese Sprache.

Die strukturierte Programmierung bietet zudem die Möglichkeit, definierte Programmteile auszusondern, deren Funktionalität dann nicht direkt in der "C"-Sprache, sondern mit Hilfe von vorhandenen Entwicklungswerkzeugen implementiert werden kann. So wurden alle Elemente der Graphik und der Benutzerinteraktion während des Programmablaufs, der sogenannten Benutzerschnittstelle, unter Verwendung von speziell für diesen Zweck vorgegebenen Funktions-Bibliotheken programmiert. Diese Bibliotheken folgen den auf Workstations verbreiteten X11- und OSF/Motif-Standards. Diese Standards erlauben auf einfache Art die Gestaltung einer graphikorientierten Benutzerschnittstelle, und stellen ein konformes Erscheinungsbild verschiedener mit diesen Standards programmierter Anwendungen sicher. Sie sind kompatibel zur "C"-Sprache und bieten mit ihrer weiten Verbreitung auf Unix-

[1] Die Entwicklung des Simulators in der noch besser auf Strukturierung ausgelegten Sprache "C++" war im softwaretechnischen Umfeld nicht sinnvoll.

Workstations optimale Voraussetzungen zur Portabilität unter Computersystemen mit hoher Rechenleistung zu wirtschaftlichem Preis. Die statischen Graphikelemente der Benutzerschnittstelle wurden mit einem Benutzerschnittstellen–Generator erstellt. Dabei wurde der Schnittstellen–Generator UIM eingesetzt. Ein solcher Generator erspart dem Programmierer die Entwicklung eines Quelltextes für die Benutzerschnittstelle, er kann ihr Aussehen und ihre Funktionalität auf einfache Weise durch Benutzung der Maus analog zu einem Zeichenprogramm direkt entwerfen. Der Benutzerschnittstellen–Generator UIM ist auf verschiedenen Rechnersystemen lauffähig. Zudem erstellt er aus den Benutzereingaben einen "C"–Code, der direkt auf anderen Rechnern in ein lauffähiges Programm übersetzt werden kann, auch wenn dort kein UIM-Programm installiert ist.

Die Funktionalität des Einlesens der Parameterdateien wurde mit speziellen Werkzeugen implementiert. Beim Einlesen solcher Dateien müssen zunächst die einzelnen in der Datei vorkommenden Elemente klassifiziert werden. Diese sogenannte lexikalische Analyse findet z.B. aus dem Text `KFStärke = 0.5` die Elemente *Name*, *Gleichheitszeichen* und *Zahl*. Die Ergebnisse der lexikalischen Analyse werden dann auf das Vorkommen bestimmter Syntaxkonstrukte untersucht. So entspricht z.B. die Elementfolge *Name*, *Gleichheitszeichen*, *Zahl* der Syntax einer *Wertzuweisung*. Nach Finden eines Syntaxkonstrukts erfolgt dann jeweils eine Aktion, wie hier die Zuweisung des gefundenen Wertes `0.5` zur Variablen `KFStärke`.

Die lexikalische Analyse wurde mit dem Werkzeug FLEX, die Syntaxanalyse mit BISON programmiert. Es handelt sich hierbei um öffentlich zugängliche Versionen der auf Unix-Rechnern verbreiteten Werkzeuge LEX und YACC (siehe z.B. [Levine]). FLEX und BISON wurden von der am MIT beheimateten GNU-Softwaregruppe entwickelt. Mit Hilfe dieser Werkzeuge können Eingabedateien, die z.B. Beschreibungen der Beschleunigerstruktur enthalten, auf einfache Weise ausgewertet werden. Hierbei wurde BISON/FLEX statt den Unixwerkzeugen LEX/YACC gewählt, da BISON/FLEX auf einer weiten Palette von Rechnern, insbesondere auch Nicht-Unix Rechnern lauffähig sind. Zudem unterscheiden sich die LEX/YACC-Implementationen auf einzelnen Rechnern. Ferner bietet BISON/FLEX Geschwindigkeitsvorteile gegenüber LEX/YACC bei der Textanalyse.

Im übrigen konnten verschiedene mathematische Funktionen aus der in der "C"-Sprache vorliegenden Sammlung [Press] übernommen werden, wie Fouriertransformation, Berechnung der Jacobifunktionen sn, cn, dn und der Besselfunktionen $\mathcal{J}_n$.

3.2 Programmaufbau

Der Simulator gliedert sich in, seinen unterschiedlichen Funktionalitäten entsprechende, Programmteile.

Im sogenannten Interface werden alle Ein– und Ausgaben des Programmes gehandhabt. Partner des dabei erfolgenden Datenaustausches kann der Benutzer, ein anderes Programm oder eine Datei sein. Daten müssen dabei von einer simulator-internen Repräsentation in eine dem Partner des Datenaustausches verständliche umgewandelt werden. Zuvor muß der Kommunikationsweg des Datenaustausches etabliert werden.

Im eigentlichen Simulator werden die Berechnungen zur Simulation durchgeführt. Die Funktionalität ist dabei in einen Analyse– und einen Generierungsteil, in dem Meßwerte generiert werden, aufgespalten.

Den Aufbau des Simulators zeigt Abbildung 3.1. Im folgenden wird auf die einzelnen Komponenten des Simulators näher eingegangen.

Interface

Im Interface des Simulators werden alle Datenein- und -ausgaben gehandhabt. Dabei müssen die Daten jeweils in eine für die Übertragung geeignete Form konvertiert werden. Die Kommunikation des Simulators mit Partnern läßt sich in drei Teile aufspalten: Die Benutzerinteraktion, die Anbindung an die Kontrolle und die Dateiein- bzw. Ausgabe. Entsprechend sind auch die Interfaceroutinen dreigeteilt. Alle Routinen greifen jedoch auf einen gemeinsamen Satz von Konvertierungsfunktionen zurück.

Zur Interaktion mit dem Benutzer müssen alle Ausgaben in ein von ihm lesbares Format umgewandelt werden. Die Ausgaben lassen sich in in graphische und nichtgraphische unterteilen. Bei der graphischen Ausgabe wird ein Bild der auszugebenden Daten erstellt. Im Simulator wurde unter dem X11-Standard ein Satz von Routinen implementiert, der in einfacher Weise die Ausgabe von zweidimensionalen Graphen

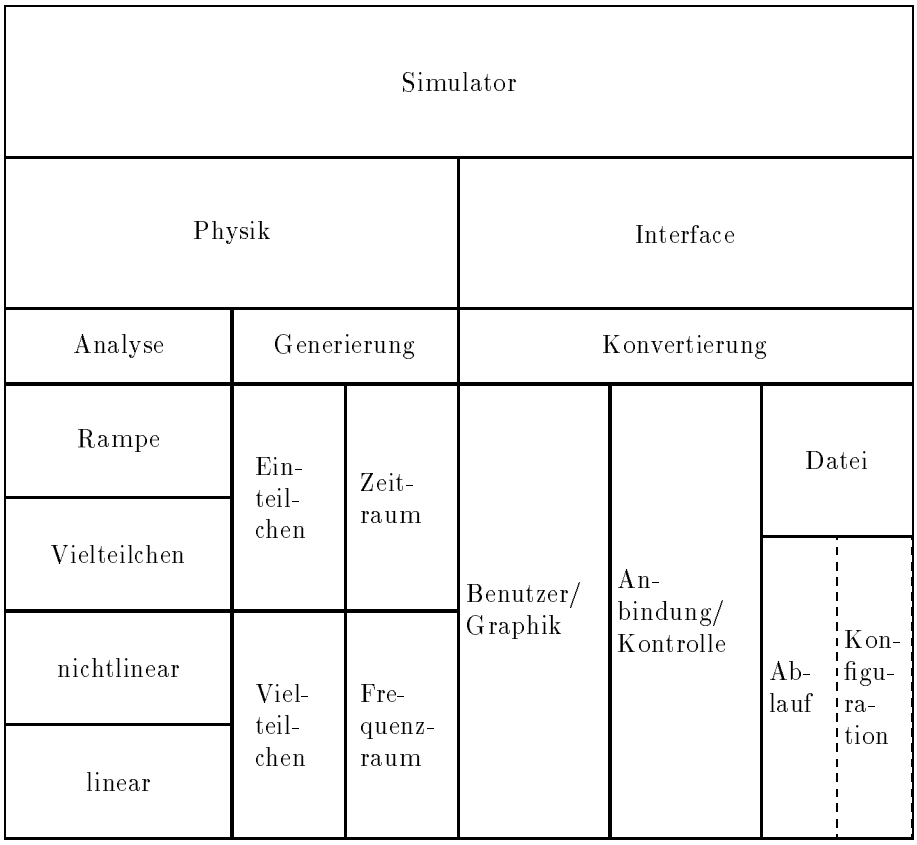


Abbildung 3.1: Aufbau des Simulators

inklusive Achsen und Beschriftungen erlaubt. Ferner kann der Benutzer mit die Graphik interagieren. Er kann ihre Größe ändern, Lage und Abstand von Punkten der Graphik in physikalischen Einheiten bestimmen, die Darstellungsart (Farbe und Symbole) wählen sowie die Graphik ausdrucken. Jede Graphik des Simulators verfügt über die angegebenen Interaktionsmöglichkeiten, die die Interpretation und Auswertung der Bilder vereinfachen.

Bei der nichtgraphischen Ausgabe muß die interne Repräsentation eines Parameters in eine lesbare Zahl mit Einheit umgewandelt werden. Darüber hinaus muß dem Benutzer die Möglichkeit der Veränderung der Parameter gegeben werden. Diese Funktionen wurden innerhalb der unter X11 und OSF/Motif zur Verfügung gestellten Funktions-Bibliotheken programmiert. Damit sind einheitliches Aussehen und Bedienung gewährleistet. Simulationsparameter werden, in sinnvollen Gruppen geordnet und in Fenstern als editierbarer Text dargestellt. Bei einer Vielzahl von Parametern, wie z.B. den Stärken der optischen Elemente, ist die Änderung mittels eines Schiebers vorgesehen. Für Simulationsparameter wird ferner ein Standard-Wert sowie die Art der Anbindung an das Kontrollsystem dargestellt. Die Benutzerinteraktion stellt einen wesentlichen Teil des Programmieraufwands des Simulators dar.

Zur Anbindung an das Kontrollsystem wird ein Satz von Routinen bereitgestellt, der die Datenkommunikation und die evtl. notwendige Umwandlung der Datenformate zwischen Kontrollsystem und Simulator vornimmt. Da ein Kontrollsystemparameter eine ganze Reihe von Simulatorparametern beeinflussen kann, ist eine Verteilung des Kontrollsystemwertes auf alle entsprechenden Simulatorparameter notwendig. Dabei muß jeweils die Art der Anbindung des Simulatorparameters an das Kontrollsystem berücksichtigt werden. Ferner wird der Benutzer von Änderungen benachrichtigt.

Die Dateianbindung ist in zwei Abschnitte aufgeteilt. Beim Programmstart liest der Simulator Informationen zur Konfiguration aus verschiedenen Dateien ein. Während des Programmablaufes können Simulationsparameter aus Dateien eingelesen und Ergebnisse der Simulation in Dateien ausgegeben werden.

Das Einlesen der Konfiguration folgt der in der sogenannten *Startup-Datei* angegebenen List von Dateinamen. Dabei werden zunächst Parameter, die für den Ablauf der Simulation von Bedeutung sind, aus der *Variablen-Datei* eingelesen. Hier werden z.B. zu berücksichtigende Phasenraumdimensionen, Grenzen und Schrittweiten beim Suchen von Resonanzen, Zahl der Rampschritte aber auch die Teilchenenergie und Masse festgelegt.

Mit der *Elemente-Datei* wird die Beschleunigerstruktur eingelesen, und es werden Standard-Werte für die Feldstärken der optischen Elemente vorgegeben. Dabei werden jeweils die impulsnormierten Feldstärken angegeben, so daß die Definitionen der *Elemente-Datei* unabhängig von der Teilchenenergie sind.[2]

Alle Konfigurationsdateien werden, wie beschrieben, durch die FLEX/BISON-Werkzeuge ausgewertet. Die komplexe Syntax der *Startup*, *Variablen-* und *Elemente-Datei* ist Anhang A.8 zu entnehmen.

Das Datei-Interface dient der Anbindung an ein Kontrollsystem ohne frei zugängliche Applikationsschnittstelle und zur Übermittelung von Simulatordaten an dritte Programme. Auf das Datei-Interface wird in Abschnitt 3.3 näher eingegangen.

Physik

Die Funktionalität des Simulators zur Teilchenphysik spaltet in einen Analyse- und einen Generierungsteil auf.

Im Analyseteil werden die verschiedenen, die Teilchenbewegung beeinflussenden Effekte analysiert. Für den hamiltonischen Anteil der Bewegung wird eine Transformation auf winkelunabhängige Koordinaten gesucht. Für den stochastischen Anteil der Bewegung werden die Diffusions- und Friktionskoeffizienten bestimmt. Die Analyse folgt dabei dem in den Abschnitten 2.2 bis 2.4 angegebenen Verfahren. Nach Berechnung der linearen Optik werden die Teilchenkoordinaten auf normalisierte Winkel-Wirkungs-Variablen transformiert. In diesen Koordinaten wird sodann nach dem Auftreten einer nichtlinearen Resonanz gesucht. Die Koordinaten werden zunächst in Resonanzkoordinaten transformiert, um danach in eine für die gefundene Resonanz winkelunabhängige Form gebracht zu werden. Die Analyse von Vielteilcheneffekten erfolgt in diesen Koordinaten. Die gesamte Analyseprozedur wird für alle vorgegebenen Rampschritte wiederholt.

Im Generierungsteil werden sodann mit Hilfe der Analysedaten und der vom Benutzer vorgegebenen Verteilungsfunktion Ergebnisse generiert, die Diagnosemessungen am Beschleuniger nachbilden sollen. Hier kann der Benutzer auswählen, welche Anteile der hamiltonischen und stochastischen Bewegung zu berücksichtigen sind. Ferner kann der Benutzer zwischen Generation von Daten im Zeit– und im Frequenzraum wählen. Die Generation von Ergebnissen folgt dem in Abschnitt 2.5 angegebenen Vorgehen.

Während die Schritte der Analysephase aufeinander aufbauen und ihre Abfolge damit vorgegeben ist, kann der Benutzer in der Generationsphase die zu berücksichtigenden Effekte frei wählen.

3.3 Anbindung an das Kontrollsystem

Beim Einsatz des Simulators während des Maschinenbetriebs ist die Berücksichtigung aktueller Betriebsparameter bei der Simulation wünschenswert. Genauso sollen durch die Simulation ermittelte Parameter auf den Beschleuniger übertragbar sein. Betriebsparameter werden im Kontrollsystem des Beschleunigers gehalten. Durch Zugriff auf die im Kontrollsystem gehaltenen Parameter kann der Simulator in einfacher Weise den aktuellen Zustand der Maschine abfragen und beeinflussen.

Dazu ist die Anbindung des Simulators an das Kontrollsystem notwendig. Ziel dieser Anbindung ist es, daß die Datenübertragung zwischen Simulator und Kontrollsystem für den Benutzer unsichtbar wird: der Benutzer kann Daten des Kontrollsystems "per Knopfdruck" anfordern oder setzen, ohne Kenntnis der technischen Realisierung dieser Datenübertragung zu benötigen.

Aufgrund der verschiedenen Gegebenheiten der Kontrollsysteme bei **ELSA** [Goetz94][Picard94] und **COSY** [Hacker] wurde eine unterschiedliche Art der Realisierung der Anbindung notwendig.

[2] Eine Ausnahme hiervon ist z.Zt. die Resonator-Spannung, die in Volt eingegeben wird.

Anbindung an das ELSA–Kontrollsystem

Das **ELSA**–Kontrollsystem ist als "Betriebssystem" eines Beschleunigers konzipiert, das Anwenderprogrammen den Zugriff auf Ressourcen des Beschleunigers ermöglicht. Programme, die auf diese Ressourcen zugreifen, werden "Applikationen" genannt. Dabei kann eine Applikation Parameter des Beschleunigers lesen und setzen. Darüber hinaus kann die Applikation Interesse an einem Parameter anmelden und wird dann durch einen Benachrichtigungsmechanismus über jede Änderung des entsprechenden Parameters informiert. Beispiele solcher Applikationen sind die graphische Benutzeroberfläche des Kontrollsystems sowie seine Regelmaschinen, die sogenannten *Experten*.

Der Simulator kann sich als Applikation an das **ELSA**–Kontrollsystem ankoppeln. Danach kann ein Datenaustausch zwischen Kontrollsystem und Simulator stattfinden. Dabei ist der Rechner, auf dem der Simulator abläuft, als Kontrollsystem-Rechner konfiguriert und nimmt damit an der vom verteilten **ELSA**-Kontrollsystem zur Verfügung gestellten Infrastruktur teil, er kann darüber hinaus auf jedem anderen Kontrollsystemrechner arbeiten und so auch parallel zur Berechnung verschiedener physikalischer Effekte benutzt werden.

Da eine Simulation mit einem festen Satz von Parametern geschehen soll, werden Parameteränderungen des Kontrollsystems nicht automatisch in den Simulator übernommen. Vielmehr fragt der Simulator in regelmäßigen Abständen Änderungen der ihn betreffenden Parameter ab und benachrichtigt den Benutzer zunächst nur. Der Benutzer kann für jeden Simulatorparameter einstellen, ob eine Änderung des entsprechenden Kontrollsystemparameters immer, nur einmal oder gar nicht übernommen werden soll.

Genauso kann der Simulator berechnete Parameter an das Kontrollsystem übermitteln. Auch hier kann der Benutzer wählen, ob der Parameter immer, nur einmal oder gar nicht übermittelt werden soll.

Die Art der Ankopplung wird für jeden Parameter in der Beschreibungsdatei der Beschleunigerstruktur vorgegeben, kann aber während des Programmablaufs vom Benutzer geändert werden.

Bibliothek

Die bisher geschilderte Art der Anbindung ist für die interaktive Benutzung des Simulators mit Kontrollsystemanbindung geeignet, bei dem das Kontrollsystem auf Anfrage des Simulators Ressourcen zur Verfügung stellt.

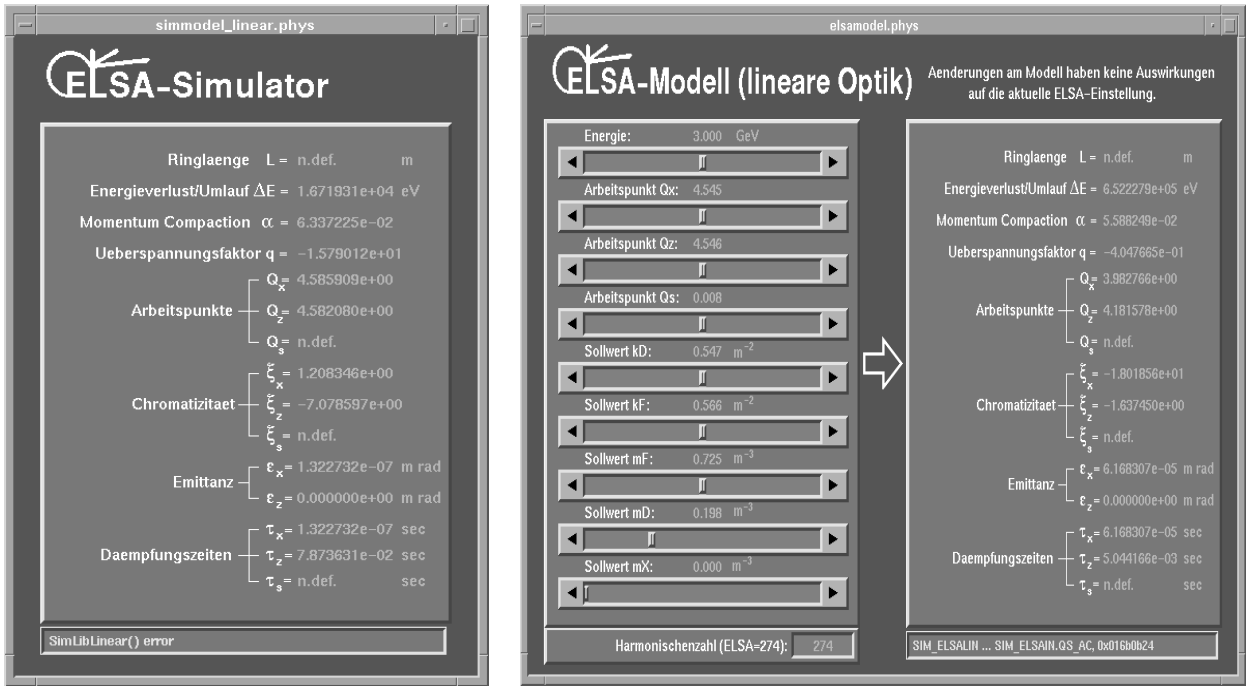
Simulatorparameter, die zur unmittelbaren Steuerung des Beschleunigers verwendet werden können, müssen vom Simulator auf Anfrage des Kontrollsystems berechnet werden. Hier ist jedoch kein Eingreifen eines Benutzers notwendig. Daher wurde eine Version des Simulators ohne Benutzerinterface, jedoch mit "C"–Zugriffsroutinen auf jeden Simulatorparameter erstellt. Zusammen mit einem Satz einfach aufrufbarer Routinen zum Anstoß von Berechnungen kann der Simulator so als Bibliothek in jedes Programm eingebunden werden.

Insbesondere konnten mit Hilfe dieser Bibliothek Regelmaschinen des **ELSA**-Kontrollsystems programmiert werden, die den Einfluß von Parameteränderungen des Kontrollsystems auf maschinenoptische Größen erfassen. Dabei wurden zunächst zwei Regelmaschinen zur linearen Optik implementiert [Goetz94] [Picard94]. Die Regelmaschine *simlin* berechnet anhand der aktuell eingestellten Maschinenparameter Größen der linearen Maschinenoptik. Die Regelmaschine *elsamodel* hingegen berechet die lineare Optik auf Grund von hypothetischen Parametereinstellungen der Maschine, die der Benutzer direkt über das **ELSA**-Kontrollsystem eingeben kann. Damit kann der Einfluß von Parameteränderungen studiert werden, ohne die Maschinenparameter selbst zu modifizieren. Die Erscheinungsbilder der Regelmaschinen im Menü des **ELSA**-Kontrollsystems zeigt Abbildung 3.2.

Damit ist der bidirektionale Datenaustausch zwischen **ELSA**–Kontrollsystem und Simulator implementiert. Die doppelte Verknüpfung des Simulators mit dem **ELSA**-Kontrollsystem, zum einen als eigenständiges Programm, zum anderen als Regelmaschine, gewährleistet eine konsistente Kopplung von Simulation, Kontrolle und Diagnose unter verschiedenen Anforderungen und Betriebsparametern.

Anbindung an das COSY–Kontrollsystem

Der Simulator ist in der Lage, aus einer Datei, in der Paare von Parameternamen und -werten stehen, die ihn betreffenden Parameter zu extrahieren und deren Werte einzulesen. Dies wird zur Anbindung an das



(a) SimLin (b) ElsaModel

Abbildung 3.2: Regelmaschinen für den Simulator im **ELSA**-Kontrollsystem

COSY–Kontrollsystem genutzt. Eine **COSY**-Parameterdatei, die das Kontrollsystem auf Anfrage des Operateurs schreibt, wird zunächst in ein für den Simulator verwendbares Format umgewandelt. Dies geschieht mit Hilfe des auf Unix-Rechnern vorhandenen Werkzeugs zur automatisierten Bearbeitung von Textdateien *awk* (siehe z.B.: [Abrahams], S. 353 ff.). Hierbei findet eine Namenskonversion der Parameter auf Simulatornamen statt. Ferner müssen, da das **COSY**–Kontrollsystem zur Zeit nur technische Größen wie Ströme und Spannungen ausgibt, alle Parameter auf die entsprechenden physikalischen Größen wie Magnetfeldstärke und Ablenkwinkel umgerechnet werden.

Das *awk*-script wird dem Simulator bei der Definition der Anbindung in der Variablendatei vorgegeben. Aufruf des awk-scripts und Einlesen der Parameter geschehen dann in regelmäßigen Zeitabständen automatisch. Diese Art der Anbindung ist nur zum Lesen von Daten durch den Simulator geeignet. Simulatordaten können so nicht vom Kontrollsystem genutzt werden. Die Anbindung ist zunächst für alle Hauptmagnete von **COSY** realisiert, wobei die im **COSY**-Kontrollsystem vorgebbaren Impulsskalierungen für einzelne Rampen, die sogenannten *Flattop-Skalierungen* mit berücksichtigt werden. Zur Berücksichtigung weiterer Parameter können in den entsprechenden Beschreibungsdateien des Simulators deren Namen jederzeit hinzugefügt werden.

Ferner wurde auch für **COSY** eine Bibliotheksversion des Simulators erstellt, die die einfache Einbindung von Berechnungsfunktionen des Simulators für **COSY** in andere Programme erlaubt.

Datenausgabe

Um Simulatordaten mit weiteren Programmen auswerten zu können, ist die Ausgabe von berechneten Parametern in eine Datei vorgesehen. Dabei kann der Benutzer beim Aufruf des Simulators festlegen, welche Daten er im Dateiformat ausgeben möchte. Insbesondere kann er zwischen Daten der linearen Optik, der nichtlinearen Optik, der Dichtefunktionen und der Ankopplung an das Kontrollsystem wählen. Es kann jeweils zwischen einer kurzen und einer ausführlichen Form der Parameterausgabe entschieden werden.

Die Dateiausgabe wird beim Programmaufruf über eine Option gesteuert, wobei die Daten entweder auf dem Bildschirm ausgegeben, oder in eine Datei geschrieben werden können.

Zum Abspeichern von Simulatoreinstellungen und Vergleich von Simulatorergebnissen mit anderen Simulationsprogrammen wurde die Ausgabe der aktuell im Simulator eingestellten Optik in eine Datei implementiert. Der Benutzer kann dabei zwischen verschiedenen Ausgabeformaten wählen, je nachdem mit welchem Programm die Optik weiter berechnet werden soll. Zur Zeit implementiert sind Ausgabeformate für den Simulator selber, MAD 8.1[Grote], BETA 5.5 [Farv] und COSY INFINITY 5 [Berz90].

Kapitel 4

Simulationsergebnisse

Um die Berechnungen des Simulators zu verifizieren, wurden Simulatorergebnisse, soweit möglich, mit den Ergebnissen anderer Simulationsprogramme verglichen. Dabei wurden die Programme MAD 8.1[Grote], BETA 5.5 [Farv] und COSY INFINITY 5 [Berz90] verwendet. Die aktuelle Simulatoroptik wurde jeweils im entsprechenden Ausgabeformat des Simulators in eine Datei abgespeichert und dann mit dem jeweiligen Programm analysiert. Diese Vergleichstests, die jeweils für das **ELSA**- und das **COSY**-Lattice durchgeführt wurden, werden zunächst dargestellt.

Danach wird auf den Vergleich von Ergebnissen des Simulators mit Meßergebnissen eingegangen. Anhand dieses Vergleichs ist ein Abgleich der Feldstärken der optischen Elemente im Simulator mit den entsprechenden Parametern des **ELSA**-Kontrollsystems möglich.

Schließlich werden erste Ergebnisse der Anwendung des Simulators vorgestellt. Dabei werden die Extraktionsbedingungen im Stretchermode und im Nachbeschleunigungmode untersucht.

4.1 Vergleich mit anderen Simulationsprogrammen

4.1.1 Optische Funktionen und Ringintegrale

Zum Vergleich der Simulationsergebnisse mit Resultaten anderer Programme wurden für das **ELSA**-Lattice folgende Parameter gewählt:

$$\begin{aligned} k_d &= -0.597604\frac{1}{m^2}, \\ k_f &= 0.636002\frac{1}{m^2}. \end{aligned}$$

Mit diesen Quadrupoleinstellungen wurden die optischen Funktionen an einem charakteristischen Ort bestimmt. Als Ort des Vergleichs der optischen Funktionen wurde für **ELSA** der Beginn des fokussierenden Quadrupols in Halbzelle 10, der **ELSA**-Nomenklatur folgend als F 10 bezeichnet, gewählt.

Für **COSY** wurde als Ort des Vergleichs der Beginn des Target-Teleskops gewählt. Die Quadrupoleinstellungen wurden für einen Arbeitspunkt in der Nähe der Resonanz $Q_x = \frac{11}{3}$ wie folgt gewählt:

MQT1:	-0.6723 m^{-2},	MQU1:	-0.2827 m^{-2},
MQT2:	0.5789 m^{-2},	MQU2:	0.40443 m^{-2},
MQT3:	0.6504 m^{-2},	MQU3:	-0.2827 m^{-2},
MQT4:	-0.5735 m^{-2},	MQU4:	0.40443 m^{-2},
MQT5:	0.6265 m^{-2},	MQU5:	-0.2827 m^{-2},
MQT6:	-0.5766 m^{-2},	MQU6:	0.40443 m^{-2},
MQT7:	-0.6635 m^{-2},		
MQT8:	0.5856 m^{-2}.		

In Tabelle 4.1 und 4.2 sind die Ergebnisse für die optischen Funktionen der verschiedenen Programme zusammengestellt. Dabei sind die optischen Funktionen α, β horizontal und vertikal, sowie die Dispersion D und ihre Ableitung D' horizontal aufgelistet. Es zeigt sich innerhalb der Rechengenauigkeit des Computers Übereinstimmung der Ergebnisse.

Analog wurde ein Vergleich der Ringintegrale für die verschiedenen Simulationsprogramme durchgeführt. Zur Berechnung der Dämpfungszeiten und longitudinalen Parameter wurde für **ELSA** eine Energie von 2.3 GeV und eine HF-Spannung $\hat{U} = 132000\ V$ in jedem PETRA-Resonator angenommen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.3 dargestellt. Hierbei sind die Arbeitspunkte Q, der Überspannungsfaktor q, die Chromatizitäten C, die Dämpfungszeiten τ und die natürlichen Emittanzen ϵ angegeben. Ferner werden die natürliche Energiebreite $(\Delta p/p_0)_{nat}$, der Momentum-Compaction-Faktor α und die mittlere abgestrahlte Energie pro Umlauf U_0 aufgelistet. Die Ergebnisse der Rechnungen stimmen gut überein. Unstimmigkeiten lassen sich mit Berechnungsfehlern der einzelnen Programme erklären.[1]

Für **COSY** wurde eine Resonator-Spannung von $\hat{U} = 10000\ V$ und eine Gesamtenergie der Teilchen von $E = 1.2\,\mathrm{GeV}$ angenommen. Die Ergebnisse des Vergleichs sind in Tabelle 4.4 zu sehen. Die Bezeichnungen entsprechen denen in Tabelle 4.3. Für eine Protonenmaschine im Energiebereich von **COSY** ist dabei die Angabe von natürlichen Emittanzen ϵ und Dämpfungszeiten τ nicht sinnvoll.

Die Werte der Arbeitspunkte Q_x, Q_z stimmen innerhalb der Rechengenauigkeit des Computers überein. Auffällig ist die Abweichung der Q_σ-Werte bei BETA. Hier wird die stabile Phase der Synchrotronschwingung zu $\phi_0 = 0$ berechnet und ferner eine Formel zur Berechnung des Arbeitspunkts der Synchrotronschwingung (im folgenden kurz *Synchrotronarbeitspunkt* genannt) verwendet, die sich von der korrekten Formel (siehe auch Abschnitt A.5) um den Faktor $\frac{1}{\beta_0}$ unterscheidet. Auf Grund der guten Übereinstimmung der Berechnung von Q_σ des Simulators mit der von MAD kann der Wert als vertrauenswürdig angesehen werden.[2] Die geringen Abweichungen der Chromatizitäten der Programme rühren von verschiedenen Berechnungsmethoden, wie unterschiedlicher Berücksichtigung der Randfeldeffekte und verschiedener Integrationsmethoden her. Die Abweichungen liegen aber deutlich unterhalb der Meßgenauigkeit. Insgesamt ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung der berechneten Ringintegrale bei den verschiedenen Programmen.

4.1.2 Poincaréschnitt

Zum Vergleich der nichtlinearen Berechnungen der verschiedenen Programme wurde die drittelzahlige Resonanz im horizontalen Phasenraum analysiert. Dazu wurden für **ELSA** bei oben angegebener Maschineneinstellung die Extraktionssextupole auf eine Feldstärke von $m_{sx} = 1\ m^{-3}$ gesetzt. Das Ergebnis der Simulation mit den verschiedenen Programmen ist in Abbildung 4.1 zu sehen. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung der durch die verschiedenen Programme ermittelten Fixpunktlagen.

Zum Vergleich der Fixpunktlagen für **COSY** wurde im Unterschied zu den oben angegebenen Quadrupoleinstellungen die Quadrupolstärke MQT1 auf $0.577\ m^{-2}$ gesetzt, was zu einem Arbeitspunkt von $Q_x = 3.65848$ führt. Ferner wurde die drittelzahlige Resonanz durch Wahl der Sextupolstärke von MX01 zu $4\ m^{-3}$ angeregt. In Abbildung 4.2 auf S. 66 sind die von den verschiedenen Simulationsprogrammen ermittelten Fixpunkte aufgetragen. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Fixpunktlagen.

Zur Verifikation der nichtlinearen Berechnungen im longitudinalen Phasenraum wurden die vom Simulator berechneten Fixpunktlagen mit den von MAD ermittelten verglichen.[3] Dabei wurde für **ELSA** eine Energie von 2.3 GeV vorgegeben und eine für das Teilchen sichtbare Spannung von 132000 V in jedem PETRA-Resonator angenommen. Die Simulationsergebnisse zeigt Tabelle 4.5. Des weiteren erfolgte ein Vergleich der Parameter mit den sich aus den Formeln in Anhang A.5 ergebenden Resultaten. Die Bezeichnungen sind analog zu diesem Anhang gewählt. Dabei ist ϕ_0 der Phasenwinkel des Sollteilchens, $\Delta\sigma$ die Bucketlänge und $p_{\sigma,max}$ die maximale relative Impulsabweichung im Bucket. Es zeigt sich gute Übereinstimmung zwischen den vom Simulator und der Theorie vorausgesagten Werten.

[1] MAD berechnet die Chromatizität ohne Berücksichtigung von Randfeldeffekten und mit einer quadratischen Näherung für die optischen Funktionen im Inneren der Elemente. Wegen fehlerhafter Berechnung von α in MAD 8.7 wurden longitudinale Berechnungen für **COSY** mit MAD 8.10 durchgeführt. BETA berechnet den Phasenwinkel fälschlicherweise als $\phi_0 = 0$. Ferner berechnet BETA den Synchrotronarbeitspunkt um den Faktor $\frac{1}{\beta_0}$ falsch.

[2] Eine experimentelle Verifikation des Arbeitspunktwertes ist an **ELSA** nicht möglich, da die HF-Leistung nicht absolut gemessen werden kann.

[3] MAD berechnet nicht die Bucketlänge, sondern nur die der natürlichen Energiebreite entsprechende Bunchlänge.

	β_x [m/rad]	α_x [1/rad]	D_x [m]	D'_x	β_z [m/rad]	α_z [1/rad]
XSim	17.366	-2.786	3.298	0.486	2.226	0.546
MAD	17.366	-2.786	3.298	0.486	2.226	0.546
Beta	17.366	-2.786	3.298	0.486	2.226	0.546
COSY	17.366	-2.786			2.226	0.546

Tabelle 4.1: Berechnung der optischen Funktionen für **ELSA** im Vergleich

	β_x [m/rad]	α_x [1/rad]	D_x [m]	D'_x	β_z [m/rad]	$\alpha_z[1/rad]$
XSim	5.582	-0.014	4.262	-0.080	36.114	-0.215
MAD	5.582	-0.014	4.262	-0.080	36.114	-0.215
BETA	5.582	-0.014	4.262	-0.080	36.114	-0.215

Tabelle 4.2: Berechnung der optischen Funktionen für **COSY** im Vergleich

	XSim	MAD	BETA	COSY
Q_x	4.65802	4.65802	4.658023	.658028
Q_z	4.61696	4.61696	4.616965	.616968
Q_σ	0.012659	0.012543	0.017514	
q	1.17113	1.17108		
C_x	-5.50698	-5.437227	-5.45713	
C_z	-6.2785	-5.91596	-5.891058	
$\tau_x[s]$	0.0139778	0.013071	0.013096	
$\tau_z[s]$	0.0111902	0.011190	0.011178	
$\tau_s[s]$	0.00508779	0.0052196	0.0052076	
$\epsilon_x[\pi m \cdot rad]$	$4.61323 \cdot 10^{-7}$	$4.2903 \cdot 10^{-7}$	$4.3380 \cdot 10^{-7}$	
$\epsilon_z[\pi m \cdot rad]$	0	0	0	
$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{nat}$	0.00056693	0.00057422	0.00057460	
α	0.06148	0.06148	0.06148	
$U_0[eV]$	225424	225430	225720	

Tabelle 4.3: Berechnung der Ringintegrale für **ELSA** im Vergleich

	XSim	MAD	BETA
Q_x	3.66663	3.666627	3.666623
Q_z	3.69322	3.693217	3.693218
Q_σ	0.001143	0.001107	0.000712
C_x	-3.1315	-2.814052	-3.1241
C_z	-8.1967	-7.397058	-8.6286
α	0.2288	0.228764	0.2288
η	-0.3825		-0.3825

Tabelle 4.4: Berechnung der Ringintegrale für **COSY** im Vergleich

	$\phi_0[^0]$	$\Delta\sigma[m]$	$p_{\sigma,max}$
XSim	121.36	0.159	0.00048
MAD	121.36	–	0.00048
Theorie	121.36	0.159	0.00048

Tabelle 4.5: Berechnung der longitudinalen Fixpunkte für **ELSA** im Vergleich

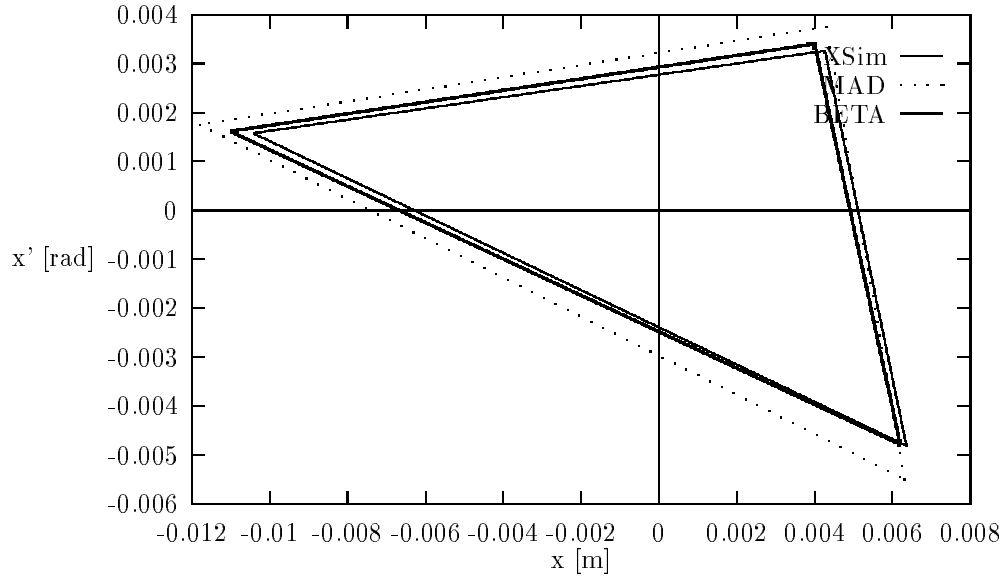


Abbildung 4.1: Fixpunkte der drittelzahligen Resonanz bei **ELSA**

4.2 Vergleich mit Meßergebnissen

4.2.1 Ringintegrale

Die in [Goetz94] mit dem dort beschriebenen System zur Spektralanalyse der Teilchenbewegung in Echtzeit erstellte Meßreihe der zu verschiedenen Quadrupoleinstellungen gehörenden horizontalen Arbeitspunkte im Bereich $Q_x = 4.2 \ldots 4.8$ konnte zum Vergleich der Simulationsergebnisse mit den tatsächlichen Gegebenheiten an **ELSA** genutzt werden. Es stellte sich heraus, daß der gemessene horizontale Arbeitspunkt im gesamten erfaßten Bereich jeweils um $\Delta Q_x = 0.027$ höher als der berechnete lag. Unter Berücksichtigung des Offsets ΔQ_x war die Restabweichung im Arbeitspunkt jedoch im Bereich von ca. 1/1000.

Eine vergleichbare Messung des vertikalen Arbeitspunkts konnte aus technischen Gründen nicht durchgeführt werden [Goetz94].

Eine konstante Arbeitspunktabweichung ist vermutlich auf eine fehlerhafte Anpassung zwischen Quadrupolströmen und Dipolstrom zurückzuführen, die sich in einem begrenzten Arbeitspunktbereich als Offset auswirkt. Korrekte Ergebnisse für den Arbeitspunkt liefert der Simulator, wenn die Quadrupolstärken für F- und D-Quadrupole um den Faktor $k_{korr} = 1.0043$ korrigiert werden. In diesem Falle ist für die vertikale Arbeitspunktabweichung ein Wert von $\Delta Q_z = -0.025$ im betrachteten Arbeitspunktbereich zu erwarten.

Der Arbeitspunkt zeigt bei **ELSA** eine Abhängigkeit von den eingestellten Sextupolstärken. Diese wurde vermessen, die Ergebnisse sind in Tabelle 4.6 dargestellt. Dabei ist $\frac{\partial Q_x}{\partial m_f}$ die gemessene Arbeitspunktverschiebung bei Änderung der Anregung der Sextupolfamilie f. Diese Arbeitspunktänderung kann durch eine mittlere Verschiebung des Closed-Orbit im Sextupol $< \Delta x >_{sxpol}$ aufgefaßt werden mit:

$$\Delta Q_x = \frac{1}{4\pi} \int \beta m_f \, \Delta x(s) ds \simeq \frac{< \Delta x >_{sxpol}}{4\pi} \int \beta \, m_f \, ds.$$

Mit Hilfe des Simulators wurde die mittlere Verschiebung im Sextupol, die zur beobachteten Arbeitspunktänderung führt, ermittelt.

Die entsprechenden Offsets wurden als Verschiebungen der Sextupole in der Elemente-Datei (siehe Anhang A.8) des Simulators eingetragen, die Arbeitspunktverschiebungen werden korrekt reproduziert. Damit ist der Simulator in der Lage, den Einfluß der Sextupole auf den horizontalen Arbeitspunkt zu erfassen.

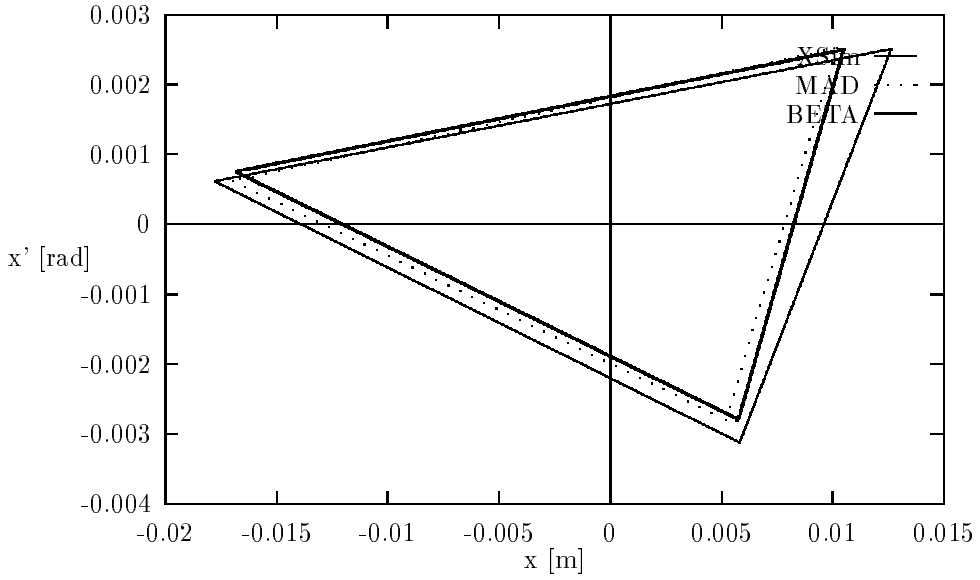


Abbildung 4.2: Fixpunkte der drittelzahligen Resonanz bei **COSY**

	m_{sf}	m_{sd}	m_{sx}
$\frac{\partial Q_x}{\partial m_f}$ $[\frac{1}{m^3}]$	.005	0	-0.002
$< \Delta x >_{sxpol}$ $[mm]$	3.4	0	-1.4

Tabelle 4.6: Auswirkung der Sextupole auf den Arbeitspunkt

In die analytische Bestimmung des longitudinalen Arbeitspunkts Q_σ geht die vom Strahl gesehene Resonator-Spannung V_0 ein (siehe Anhang A.5). Zum Vergleich der Meßergebnisse mit den Simulatorberechnungen für Q_σ muß also zunächst V_0 ermittelt werden. Bei **ELSA** ist zur Zeit[4] die Resonator-Spannung nicht direkt, sondern nur ein zur Resonator-Leistung proportionales Signal für den DORIS-Resonator verfügbar. Sei $P_{Doris} \propto V_0^2 = \kappa^2 S$ die zum Signal S proportionale Leistung des DORIS-Resonators, wobei S die Leistung der Auskoppelschleife des DORIS-Resonators in Watt beim gegenwärtigen Meßaufbau ist. So ist:

$$Q_\sigma^4 = \left(\frac{(\alpha - \frac{1}{\gamma_0^2})k}{2\pi\beta_0^2 p_0 c} \right)^2 \left((e\kappa)^2 S - U_0^2 \right).$$

Nach Messung von Q_σ gegen S kann durch einen gewichteten Geradenfit von $Q_\sigma^4 = mS + b$ die gesuchte Größe κ bestimmt werden zu:

$$\kappa \quad = \quad \sqrt{m} \frac{2\pi\beta_0^2 p_0 c}{(\alpha - \frac{1}{\gamma_0^2})k},$$

wobei κ ein konstanter Proportionalitätsfaktor, und damit nicht energieabhängig ist. Die Messung wurde durchgeführt, indem die Ansteuerung der HF verstellt, das von einem Monitor [Keil] gesehene Strahlsignal durch einen Spektrumanalysator erfaßt und daraus der Synchrotronarbeitspunkt ermittelt wurde. Dies wurde für verschiedene Energien wiederholt. Die Messung ist mit Hilfe des EPOS-Systems und des neuen Kontrollsystems [Goetz94][Picard94] weitgehend automatisiert. Auslesen des Spektrumanalysators, Vermessen der Arbeitspunktpeaks, Berechnung des Arbeitspunkts, graphische Darstellung des Ergebnisses und Einstellung der HF-Ansteuerung werden durch ein EPOS-Programm durchgeführt. Der Benutzer muß nur noch kontrollieren, ob die Meßergebnisse physikalisch sinnvoll sind. Es ergibt sich:

$$\kappa \quad = \quad 2.00 \cdot 10^6 V/\sqrt{W}.$$

[4]Stand: 12. Juli 1994. Das Leistungssignal der DORIS-Resonator wird mit dem als *s7* bezeichneten Meßgerät im **ELSA**-HF-Raum gemessen.

Ein Vergleich der gemessenen Arbeitspunkte Q_σ für verschiedene Energien mit den vom Simulator berechneten Werten zeigt Abweichungen $\Delta Q_\sigma < 0.0002$, wobei allerdings zu beachten ist, daß für kleine Resonator-Leistungen auf Grund des schnellen Strahlverlusts die Meßungenauigkeit des Synchrotronarbeitspunkts größer als $\Delta Q_{\sigma,max}$ ist.[5]

Die horizontale Chromatizität von **ELSA** wurde durch Veränderung des Stromes der Hauptdipole gemessen.[6] Eine Stromänderung ΔI der Hauptmagnete führt zu einer Feldänderung von $\frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta I}{I}$. Da bei fester HF-Frequenz für die Elektronenmaschine $\frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta p}{p_0}$ ist, kann so für verschiedene Impulsabweichungen der Arbeitspunkt gemessen werden. Die Messung wurde durchgeführt, und es ergibt sich für die natürliche Chromatizität ein Wert von $C_x = -5.8 \pm 0.11$. Bei Änderung von $\frac{\Delta B}{B}$ verschiebt sich der Closed-Orbit nicht, da die umlaufenden Teilchen, bedingt durch die Phasenfokussierung, eine entsprechende $\frac{\Delta p}{p_0}$-Änderung vollziehen. Damit ist die $\frac{\Delta B}{B}$-Methode nur sensitiv auf die durch die Änderung der Fokussierungsstärke der Quadrupole hervorgerufene Arbeitspunktänderung. Effekte der Bahnverschiebung und damit Sextupoleffekte werden nicht erfaßt. Unter Vernachlässigung all dieser Einflüsse liefert der Simulator für die eingestellte Optik eine Chromatizität von $C_{x,sim} = -6.1$ in hinreichend guter Übereinstimmung mit der Messung.

Ein bislang ungelöstes Problem ergibt sich jedoch bei Messung der Chromatizität durch Änderung von $\frac{\Delta f}{f_0}$. Durch diese Frequenzänderung wird dem Strahl eine Impulsänderung $\frac{\Delta p}{p_0}$ aufgezwungen (siehe S. 23); die Teilchen laufen auf Dispersionsbahnen. Mit dieser Methode wird die Chromatizität zu $C_x = -10.5$ gemessen. Der Wert wurde in einer Anzahl von Messungen verifiziert, trotz Berücksichtigung von bei dieser Messung auftretenden Verschiebungen des Closed-Orbit im Simulator weicht dessen Rechenergebnis $C_{x,sim} = -5.5$ beträchtlich vom Meßwert ab. Dieser Widerspruch ist bislang ungeklärt, jedoch sind auch bei anderen Beschleunigern Abweichungen von anhand der linearen Optik berechneter zu gemessener Chromatizität beobachtet worden (siehe z.B.: [Zotter]).

4.2.2 Phasenraummessungen

Die in [Picard94] mit dem dort beschriebenen System zur Phasenraummessung aufgenommenen Daten konnten zum Vergleich der nichtlinearen Berechnungen des Simulators mit den Verhältnissen an **ELSA** herangezogen werden. Mit diesem Meßsystem werden an jeweils zwei Monitoren in **ELSA** gleichzeitig die Ablagen eines in **ELSA** umlaufenden Teilchenensembles umlaufsynchron erfaßt. Aus den so erhaltenen Daten kann ein Phasenraumbild der kohärenten Schwingung des Teilchenensembles an beiden Monitoren berechnet werden.[7] Den schematischen Aufbau des Systems zur Phasenraummessung zeigt Abbildung 4.3.

Dabei wird das Lagesignal eines Teilchenensembles an zwei Orten im Ring mit Hilfe von Strahllagemonitoren aufgenommen. Da diese Monitore nur die mittlere Strahllage erfassen können, muß zur Messung der Strahl kohärent angeregt werden. Aus den beiden erhaltenen Ablagen können, mit Hilfe der Transfermatrix zwischen den Monitorpositionen, die zugehörigen Richtungen berechnet werden. Seien x_1, x_2 die gemessenen Lagen und $\mathcal{M} = \{m_{ij}\}$ die Transfermatrix zwischen den Positionen 1 und 2. Dann ist:

$$x_1' = \frac{x_2 - m_{11}x_1}{m_{12}},$$
$$x_2' = \frac{m_{22}x_2 - x_1}{m_{12}}.$$

Dabei muß nur die Transfermatrix zwischen den Monitoren bekannt sein. Ferner muß die Signalnahme umlaufsynchron getriggert werden. Bei **ELSA** geschieht dies durch die aus dem HF-Signal abgeleitete Umlauf-Clock des neuen Timing-Systems[Goetz94][Picard94]. Ferner müssen Laufzeitunterschiede zwischen den Monitoren ausgeglichen werden und die Verstärkung der Monitorelektroniken muß gleich sein.

Im einfachsten Fall sind dabei die Positionen 1 und 2 identisch, und die Signale x_1 und x_2 bilden die Ablagen des Teilchenensembles bei aufeinanderfolgenden Umläufen. So kann mit einem Monitor ein Phasenraumbild an der Position des Monitors erzeugt werden. Dadurch entfällt auch die Notwendigkeit,

[5] Für die PETRA-Resonatoren ist die Angabe eines entsprechenden Eichfaktors κ zur Zeit nicht möglich, da die Koppelfaktoren der in beiden Resonatoren installierten Koppelschleifen unbekannt und verschieden sind. Ferner kann die Leistung der einzelnen PETRA-Resonatoren nicht unabhängig voneinander geregelt werden.

[6] Die durch einen Kontrollsystem-Experten [Goetz94] realisierte automatische wechselseitige Angleichung von Dipolstrom und Energienormierung der Quadrupole und Sextupole mußte für diese Messung abgeschaltet werden.

[7] Zu den hier vorgestellten Auswertungen analogen Ergebnissen vergleiche [Picard94].

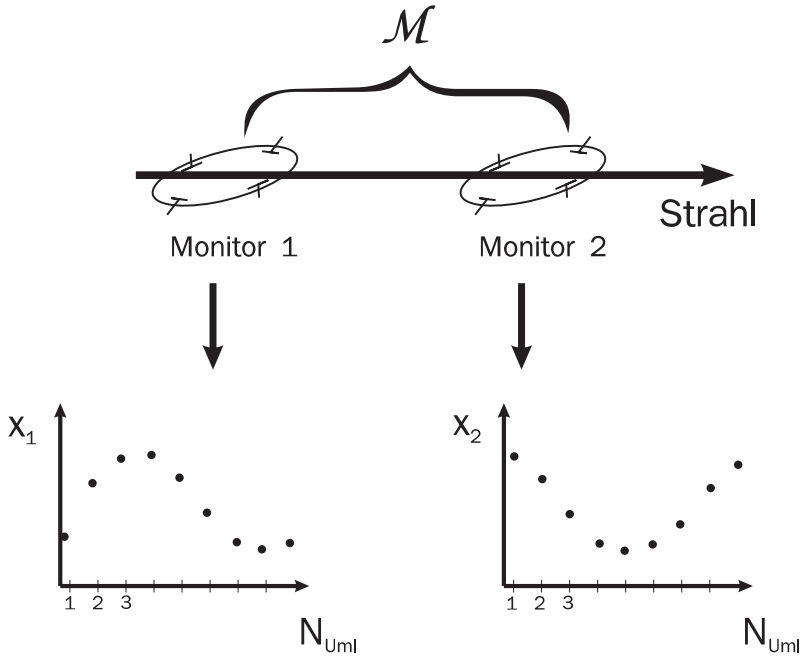


Abbildung 4.3: System zur Phasenraummessung

Laufzeit und Verstärkung anzugleichen. Jedoch muß hier zur Berechnung des Impulses die gesamte Ringmatrix als bekannt vorausgesetzt werden. Damit entspricht der Informationsgehalt der mit einem Monitor ermittelten Phasenraumfigur derjenigen in normalisierten Koordinaten, während die mit zwei Monitoren bestimmte Phasenraumfigur sinnvoll in x, x'-Koordinaten aufgetragen werden kann. Die Auswertung der mit einem Monitor gewonnenen Daten kann dann direkt in normalisierten Koordinaten erfolgen, wobei die Ableitungen x' aus den Differenzen jeweils zweier aufeinanderfolgender Ablagen ermittelbar ist.[8]

Das so erhaltene Signal kann nach Frequenzanteilen aufgespalten werden. Das Lagesignal x ist zusammengesetz aus:

$$x = x_{CO} + x_D + x_\beta.$$

Dabei ist x_{CO} der Anteil des Closed-Orbit, der an einer Position zeitunabhängig ist. Der Dispersionsanteil x_D verändert sich abhängig von der Teilchenenergie und damit mit der Zeitkonstante der Energieschwingung $f_0 Q_\sigma$ von ca. 50 kHz bei **ELSA**, wo die Umlauffrequenz $f_0 = 1.823\ MHz$ ist. Der Betatronanteil x_β ändert sich mit der Zeitkonstante des Betatronarbeitspunkts $f_0 Q_x \gg f_0 Q_\sigma$ im MHz-Bereich (siehe auch Tabelle 1.1). Daher können die verschiedenen Anteile der Teilchenbewegung, durch Herausfilterung der jeweils anderen Frequenzanteile aus dem Signal, getrennt werden. Durch einen Tiefpaß wird der Closed-Orbit-Anteil x_{CO} aus dem Signal gewonnen, mit einem Bandpaß kann der Dispersionsanteil x_D ermittelt werden und durch einen Hochpaß ergibt sich der Betatronanteil x_β.[9] Die Signalfilterung ist mit den EPOS-Werkzeugen zum Entwurf und der Anwendung digitaler Filter [Picard94] leicht ausführbar, was die Bedeutung der komplexen Signalanalysewerkzeuge von EPOS für Diagnosemessungen unterstreicht.

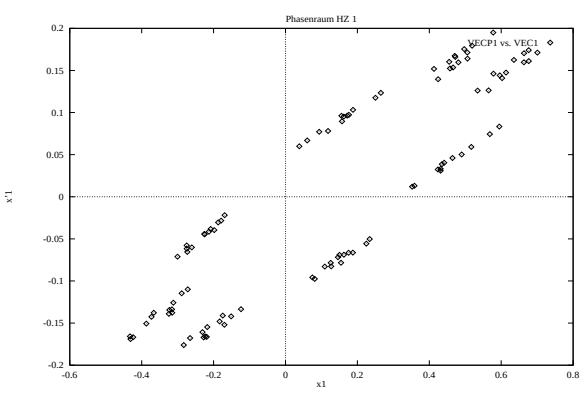
Bei **ELSA** ist die umlaufsynchrone Datennahme eines kalibrierten Monitorsignals zur Zeit nicht möglich. Jedoch wirkt sich die fehlende Kalibrierung für kleine Ablagen nur in einem Skalierungsfaktor und einem

[8] Eine numerisch genauere Methode zur Ermittlung von x' in normalisierten Koordinaten geschieht mit Hilfe der Fouriertransformation. Ist x das gemessene Signal und $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation, so ist $x' = -i\mathcal{F}^{-1}\left(\omega\left(\mathcal{F}(x)\right)(\omega)\right)$. Bei dieser Methoden muß zwar, im Gegensatz zur im Text vorgestellten Methode, der Arbeitspunkt Q_x zur Auswertung nicht explizit bekannt sein, dieser kann jedoch leicht mit hinreichender Genauigkeit aus den gemessenen Daten bestimmt werden.

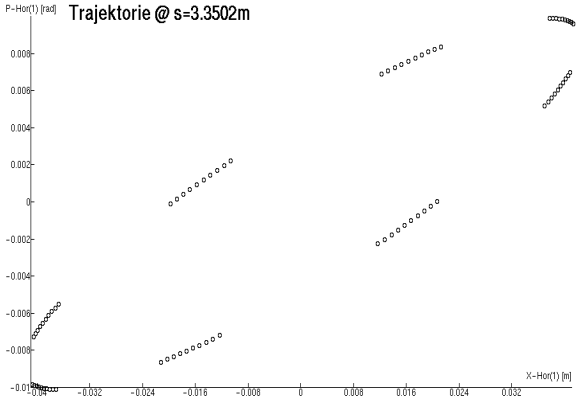
[9] Falls der Abstand im Frequenzraum zwischen einer der charakteristischen Frequenzen $0, Q_\sigma f_0$ und $Q_x f_0$ sehr klein ist, müssen Filter sehr hoher Ordnung verwendet werden, die Zahl der Datenpunkte muß deutlich größer als der Kehrwert des kleinsten vorkommenden Frequenzabstandes sein. Als Tiefpaß zur Bestimmung des Closed-Orbit-Anteils dient im einfachsten Fall die Mittelwertbildung über alle Datenpunkte. Die Mittelwertbildung liefert jedoch nur korrekte Ergebnisse, falls kein nennenswerter Frequenzanteil im Signal bei Vielfachen der Abtastfrequenz vorhanden ist (siehe [Keil]). Ansonsten muß ein spezieller Tiefpaßfilter verwendet werden (siehe [Picard94]).

Offset der Phasenraumfigur aus, die unbekannt sind. Die Form und relative Größe der Phasenraumbilder bleibt erhalten, der Offset führt allenfalls zu einer Verschiebung der Phasenraumfigur.

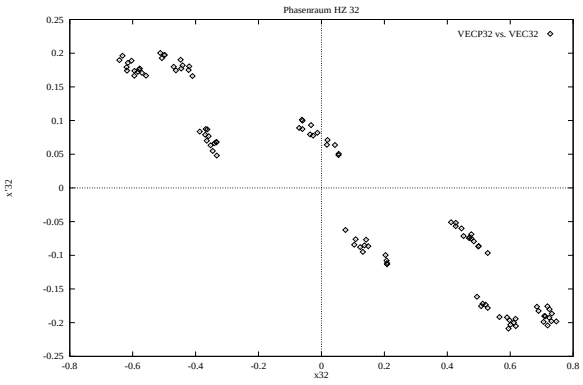
Mit dem beschriebenen System wurden in [Picard94] an **ELSA** mit den Monitoren in den Halbzellen (im folgenden als *HZ* bezeichnet) 1 und 32 bei ausgeschalteten Extraktionssextupolen Phasenraummessungen durchgeführt.



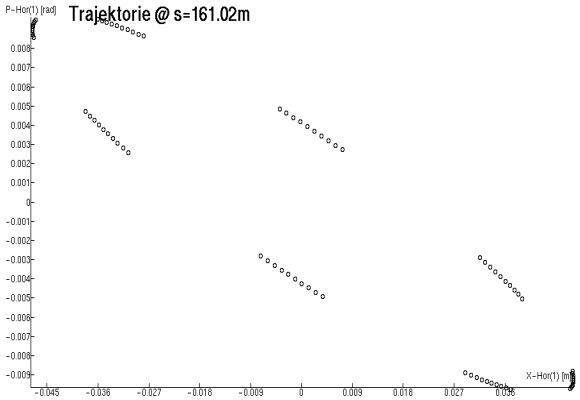
(a) Messung HZ 1



(b) Simulation HZ 1



(c) Messung HZ 32



(d) Simulation HZ 32

Abbildung 4.4: Vermessung des linearen Phasenraums

Das Beispiel einer Messung und der zugehörigen Simulation zeigt Abbildung 4.4. Hierbei wurde nur der Betatronanteil betrachtet, da sowohl in HZ 1 als auch in HZ 32 die Dispersionsfunktion verschwindet. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Form und Lage der Phasenraumellipse. Die inselartige Struktur des Bildes ist damit zu erklären, daß der Arbeitspunkt in der Nähe von $Q_x = 4.625$ lag, so daß sich bei jedem achten Umlauf das Teilchen wieder in der Nähe des Ausgangspunkts befindet. So gliedern sich die dargestellten ca. 100 Umläufe in acht Gruppen, die vom Teilchen zyklisch durchlaufen werden.

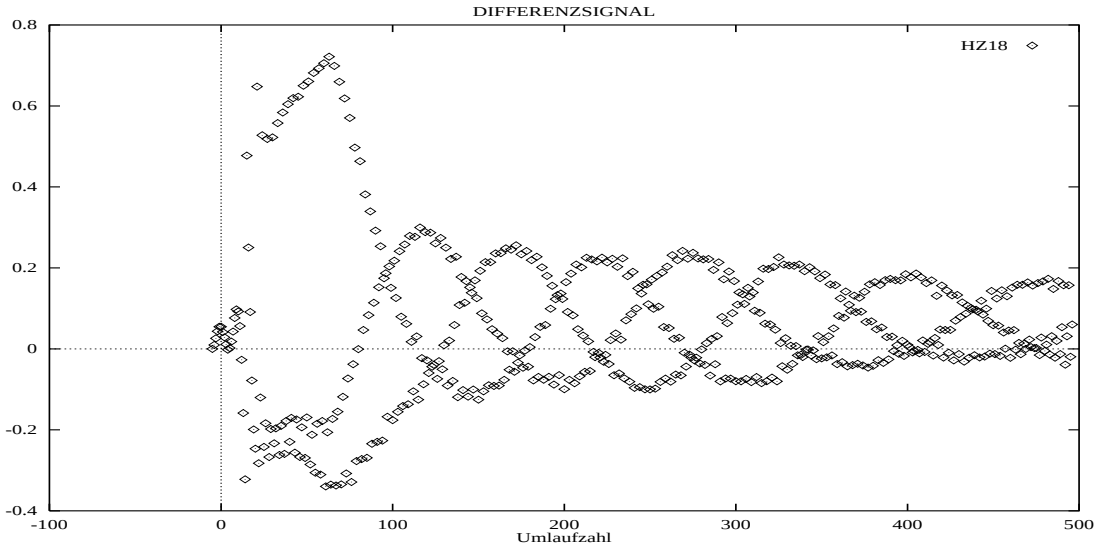
Abstand der Umläufe	Drehsinn links	Drehsinn rechts
1	$q > 0.5$	$q < 0.5$
m	$Q < \frac{n}{m}$	$Q > \frac{n}{m}$

Tabelle 4.7: Drehsinn der Teilchenbewegung

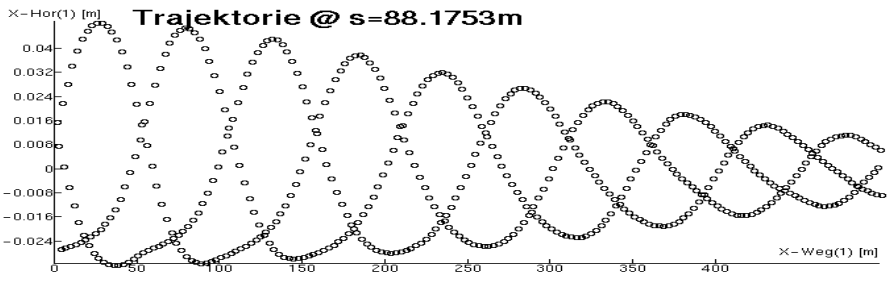
Neben der Form und Lage des Phasenraumbildes kann noch der Drehsinn der Teilchen beim fortlaufenden Durchstoß durch die Phasenraumebene am Ort des Monitors betrachtet werden. Der Drehsinn hängt davon ab, ob der fraktionelle Anteil des Arbeitspunkts q mit $Q = k + q,\ k \in N$ größer oder kleiner als

0.5 ist [Picard91]. Ferner kann in der Nähe einer Resonanz mit $Q \simeq \frac{n}{m}$ für jeden m-ten Datenpunkt ein Drehsinn definiert werden. In Tabelle 4.7 sind die Drehrichtungen zusammengefaßt.

In den in Abbildung 4.4 gezeigten Fällen ist der Drehsinn bei jedem Umlauf für Messung und Simulation links, in Übereinstimmung mit $q = 0.625 > 0.5$. Der Arbeitspunkt ist in der Nähe einer achtelzahligen Resonanz. Der aus diesen Daten durch Fouriertransformation ermittelte Arbeitspunkt war $Q_x = 4.625$, wobei sich innerhalb der Meßungenauigkeit des Arbeitspunkts nicht unterscheiden ließ, ob der Arbeitspunkt unter- oder oberhalb von $\frac{37}{8}$ war. Der Drehsinn bei jedem achten Umlauf des Phasenraumbildes ist jedoch rechts, so daß aus dem Phasenraumbild $Q > \frac{37}{8}$ folgt. Der Simulator bietet eine Darstellungsweise, bei der jeder Phasenraumpunkt mit der Nummer des Umlaufs markiert ist, wie in Abbildung 1.1 auf S. 6, die vom Simulator erstellt wurde, beispielhaft dargestellt ist. Daran kann sofort der Drehsinn bei jedem bzw. jedem m-ten Datenpunkt ermittelt werden.



Teilchenverlust	Filamentation



(b) Simulation

Abbildung 4.5: Lagedaten bei nichtlinearer Maschine für HZ 18

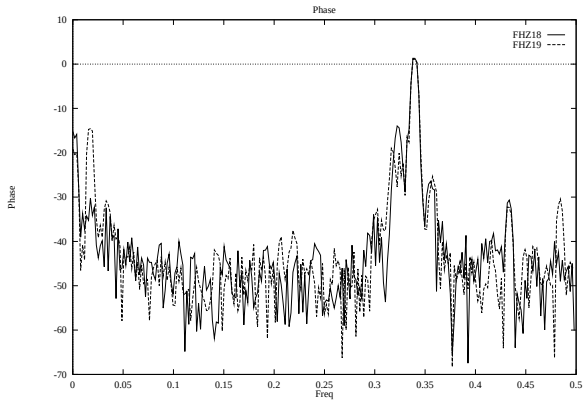
Bei eingeschalteten Extraktionssextupolen in der Nähe der drittelzahligen Resonanz bei einem Arbeitspunkt von $Q_x = 4.660$ kann mit dem Phasenraummeßsystem durch Vergleich mit Simulatorergebnissen die Struktur der Separatrix untersucht werden. Dabei wird die kohärente Teilchenschwingung nach der Injektion genutzt, die den Strahl so angeregt, daß die Teilchen den inneren Rand des stabilen Phasenraumbereichs berühren.[10] Ein Beispiel von umlaufsynchron gemessenen Lagedaten im Vergleich zur Simulation zeigt Abbildung 4.5. Bei der Simulation wurde angenommen, daß die Teilchenverteilung Emittanzen in

[10] Die Untersuchung der Phasenraumstruktur zu beliebigen Zeiten ist mit dem neu entwickelten Diagnosekicker [Goetz94][Picard94] möglich.

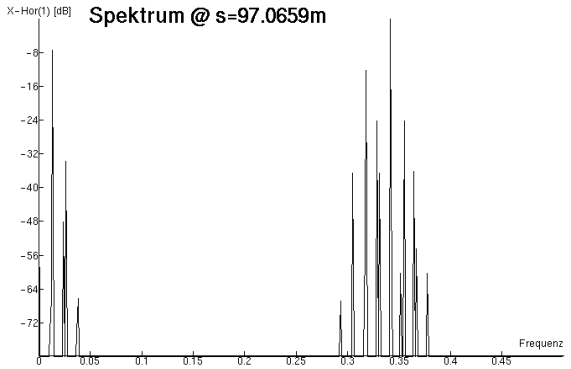
den äußeren 15% des stabilen Phasenraumbereichs einnimmt.

Das gemessene Differenzsignal zeigt dabei eine Abnahme der Amplitude mit steigender Umlaufzahl. Dieses Signal ist ein Maß für die Position des Schwerpunkts der umlaufenden Teilchenverteilung. Seine zeitliche Abnahme ist wegen der, durch die Amplitudenabhängigkeit des Arbeitspunkts bedingten, Filamentation der Teilchenverteilung zu erwarten. Die Nachbildung der Filamentation mit dem Simulator zeigt jedoch, daß die starke Abnahme während der ersten 100 Umläufe nicht durch Filamentation zu erklären ist. Hier ist wahrscheinlich Teilchenverlust eingetreten. Die Teilchenverteilung wurde also so stark angeregt, daß sie auf die Separatrix zu liegen kam. Die Teilchen außerhalb des stabilen Bereichs gehen bei Erreichen des instabilen Fixpunkts verloren, während die Teilchen innerhalb des stabilen Bereichs ihre Bewegungsrichtung ändern und entlang der nächsten Kante der Separatrix weiterwandern.

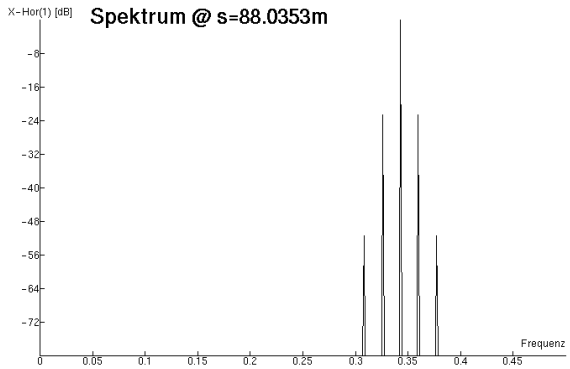
Die Darstellung der Signale als Punkte zeigt weiterhin das charakteristische Bild der Teilchenbewegung in der Nähe der Resonanz, wie es auch vom Simulator reproduziert wird. Sei $Q_{res} = \frac{n}{m}$ der Resonanzarbeitspunkt. In der Nähe von Q_{res} bilden sich m sinusförmige Kurven mit Phasenverschiebung $\frac{2\pi}{m}$ im Lagesignal aus. Das Teilchen durchläuft die Kurven zyklisch. Die einzelne Kurve hat die Frequenz $\Delta Q = |Q - Q_{res}|$. Dies entspricht dem Separationsansatz für die Teilchenbewegung in der Nähe der nichtlinearen Resonanz, wie sie auf S. 32 ff. dargestellt wurde: Das resonante Teilchen folgt der Resonanzbewegung mit dem Arbeitspunkt Q_{res}; das Teilchen in der Nähe der Resonanz führt um die resonante Bewegung Schwingungen mit dem Arbeitspunkt $\Delta Q = |Q - Q_{res}|$ aus. Im vorliegenden Fall dauert eine Schwingung ca. 165 Umläufe, was einem Arbeitspunktabstand von der Resonanz von $\Delta Q = 0.0061$ entspricht, in guter Übereinstimmung mit dem gemessenen Arbeitspunktabstand $Q - Q_{res} = 4.6603 - 4.6666 = 0.0063$.



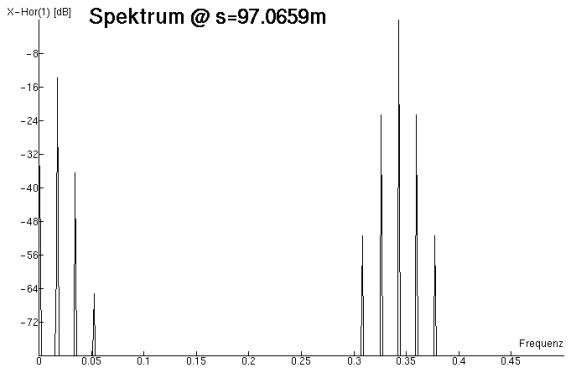
(a) Messung



(b) nichtlineare Simulation HZ 19



(c) lineare Simulation HZ 18

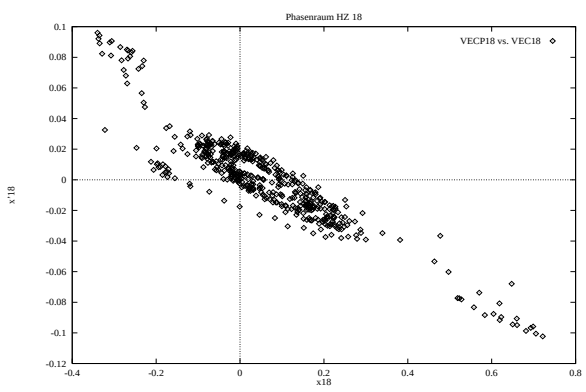


(d) lineare Simulation HZ 19

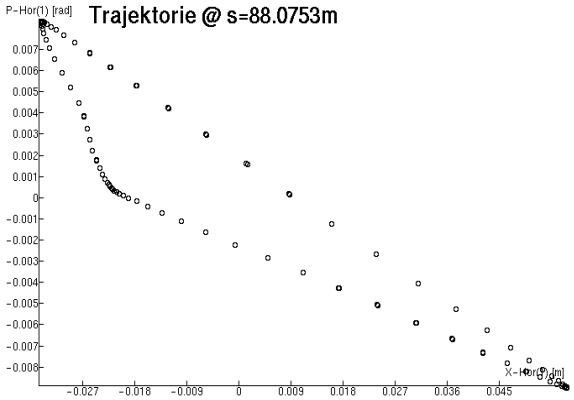
Abbildung 4.6: Spektrum der Lagedaten

Das Spektrum der Lagedaten ist in Abbildung 4.6 zu sehen. Da sich das Zentrum der Teilchenverteilung

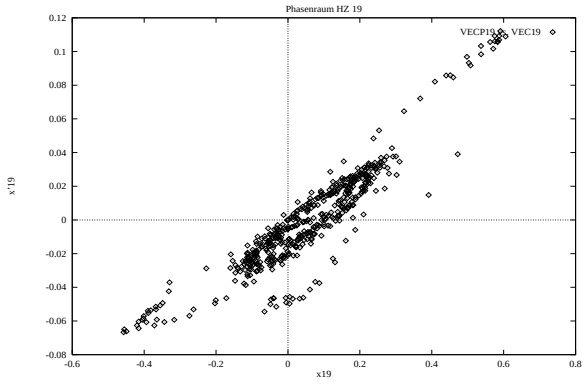
nach einem Umlauf weit im Inneren der Resonanz befindet, kann der nichtlineare Anteil der Bewegung als vernachlässigbar angenommen werden. Es wurde jedoch das Spektrum sowohl für die lineare, als auch die nichtlineare Bewegung unter Verwendung der bekannten Werte für Q_x, Q_σ simuliert. Aus dem Vergleich zwischen Simulation und dem gemessenen Spektrum lassen sich die Linien des Spektrums zuordnen. Der an 0.5 gespiegelte Arbeitspunktpeak ist bei einer Frequenz von $q_x = 0.340$ zu sehen. Benachbart sind für das Signal in HZ 18 und HZ 19 bei 0.357 und 0.323 Seitenbänder zu sehen. Diese Seitenbänder werden durch die, aus der Synchrotronschwingung resultierende, Phasenmodulation des Signals hervorgerufenen. Sie werden im folgenden als *Synchrotronseitenbänder* bezeichnet. Nach der Theorie für die lineare Bewegung sind jedoch die Synchrotronseitenbänder gleicher Ordnung in der Amplitude gleich, und ferner hängt die relative Amplitude nicht von der Monitorposition ab (siehe Abschnitt 2.5). Die Meßdaten zeigen jedoch verschieden hohe Synchrotronseitenbänder. Die Überhöhung des linken Synchrotronseitenbandes im gemessenen Spektrum könnte auf die im simulierten nichtlinearen Spektrum zusätzlich auftretende Frequenzlinie bei $2Q_x = 0.320$ zurückzuführen sein. Jedoch zeigen sich ähnliche Asymmetrien der Synchrotronseitenbänder auch bei ausgeschalteten Sextupolen und Arbeitspunkten weit ab der Resonanz, so daß auch andere Einflüsse, insbesondere solche der Monitorelektronik, dafür verantwortlich sein können. Der Pegelunterschied zwischen dem Arbeitpunktpeak und dem rechten Synchrotronseitenband beträgt ca. 30 dB. Dieser Pegelunterschied wird allein durch die Amplitude der kohärenten Synchrotronschwingung bestimmt. Damit kann das gemessene Spektrum, obwohl es mit einem unkalibrierten Monitor aufgenommen wurde, geeicht werden. Durch ein Vergleich mit Ergebnissen des Simulators kann J_σ abgeschätzt werden als $J_s \simeq 2 \cdot 10^{-5} mrad \mathrel{\hat{=}} \sigma_{max} = 6cm \mathrel{\hat{=}} p_{\sigma,max} = 0.0006$.



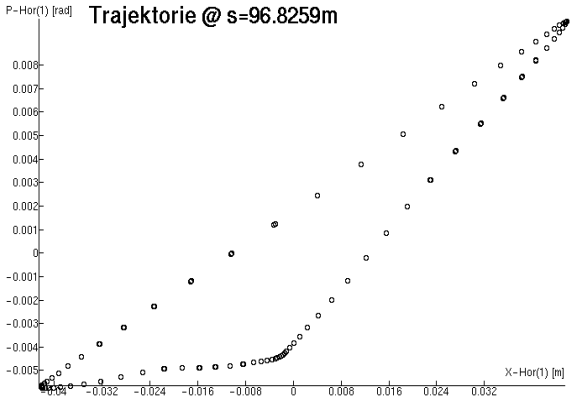
(a) Messung HZ 18



(b) Simulation HZ 18



(c) Messung HZ 19



(d) Simulation HZ 19

Abbildung 4.7: Vermessung des nichtlinearen Phasenraums

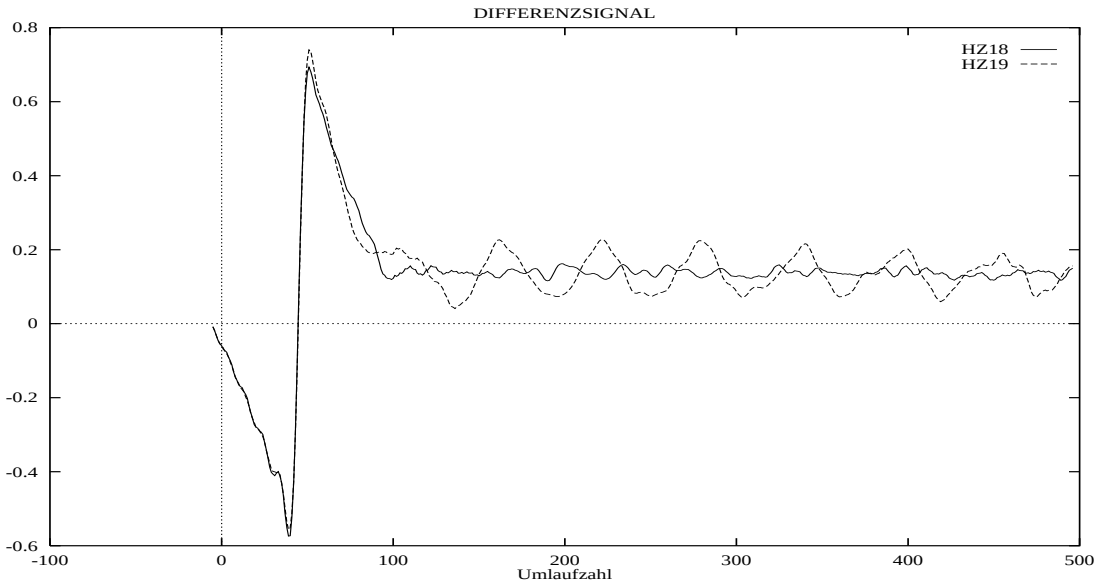
Ferner kann eine Frequenzlinie bei $Q_\sigma = 0.017$ identifiziert werden, der nur für HZ 19 auftritt. Der Vergleich mit den Simulatorergebnissen legt nahe, daß dieser Peak durch die Dispersionsschwingung des Teilchens erzeugt wird. Er wird daher im folgenden als *Dispersionspeak* bezeichnet. Da in HZ 18 $D_x = 0$

ist, tritt der Dispersionspeak hier nicht auf. Das Amplitudenverhältnis zwischen dem Dispersionspeak und den Synchrotronseitenbändern des Arbeitspunkts ist, bei bekannter Dispersion am Ort des Monitors und gegebener Amplitude der Synchrotronschwingung J_σ, nur von der Amplitude der horizontalen Schwingung J_x abhängig. Mit Hilfe des Simulators kann daher im Vergleich von Dispersionspeak mit Arbeitspunktpeak die Amplitude der horizontalen Schwingung zu $J_x \simeq 5.0e-6$ ermittelt werden. Diese Zahlenangaben sind auf Grund der Meßungenauigkeit und des unbekannten Rauschanteils des Signals jedoch nur als Abschätzung der Größenordnung zu verstehen. Ferner ist für beide Signale eine Frequenzlinie bei $q_z = 0.43$ zu sehen, die durch die horizontale Simulation nicht erfaßt wird. Es könnte sich um den vertikalen Arbeitpunkt handeln, der aufgrund physikalischer oder meßtechnischer [Goetz90] Gegebenheiten in den horizontalen Frequenzraum koppelt.

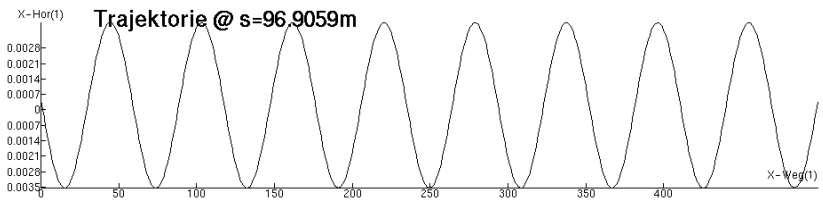
Der DC-Anteil des Spektrums und damit das Signal bei der Nullfrequenz enthält Offsets der Monitorelektronik und kann somit physikalisch nicht sinnvoll ausgewertet werden.

Das sich aus den Lagedaten ergebende Phasenraumbild im Vergleich von Messung und Simulation ist in Abbildung 4.7 auf S. 72 zu sehen. Die Teilchenbewegung schreitet dabei von außen nach innen fort. Deutlich sind Umkehrpunkte der Teilchenbewegung zu sehen. Der Vergleich mit den Bildern des Simulators legt es nahe, diese Umkehrpunkte mit den Fixpunkten der Separatrix zu identifizieren.

Der Drehsinn der Punkte im von Messung und Simulator gelieferten Phasenraumbild bei jedem Umlauf ist dabei jeweils links, da der fraktionelle Arbeitspunkt $q = 0.660 > 0.5$. Der Drehsinn bei jedem dritten Umlauf ist jeweils links, in Übereinstimmung mit $Q < \frac{14}{3}$.



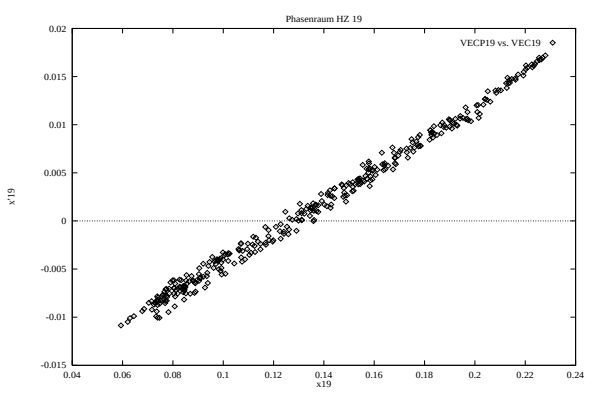
(a) Messung HZ 18 und HZ 19



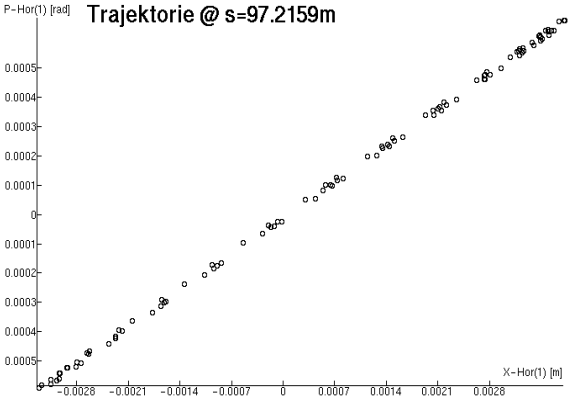
(b) Simulation HZ 19

Abbildung 4.8: Dispersionsbewegung

Der **ELSA**-Strahllagemonitor in HZ 18 befindet sich an einem Ort ohne Dispersion, während der Strahllagemonitor in HZ 19 an einem Ort mit Dispersion steht. Durch Bandpaßfilterung kann man den Dispersionsanteil x_D der Teilchenbewegung erhalten. Das Signal der Dispersionsbewegung zu oben gezeigter



(a) Messung Phasenraum HZ 19



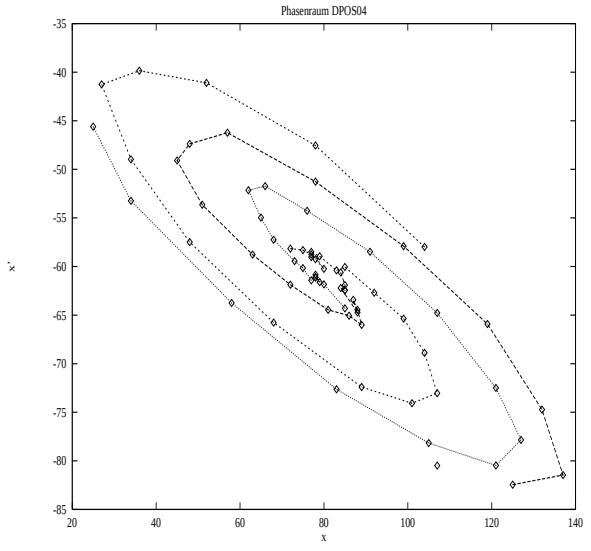
(b) Simulation Phasenraum HZ 19

Abbildung 4.9: Dispersionsbewegung HZ 19

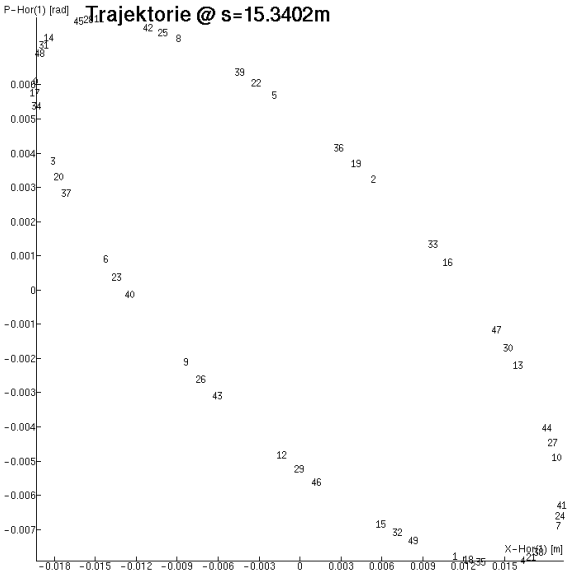
Betatronbewegung zeigt Abbildung 4.8, wobei die Signalstärke in willkürlichen Einheiten aufgetragen ist.

Der Signalverlauf während der Umläufe $0 \ldots 100$ ist durch das Einschwingverhalten des digitalen Filters bedingt. Deutlich ist der wesentlich kleinere Signalhub in HZ 18 im Vergleich zu HZ 19 zu erkennen. Eine Periode der Synchrotronschwingung dauert ca. 60 Umlaufzeiten, so daß der Synchrotronarbeitspunkt $Q_\sigma = 0.017$ beträgt. Das Vergleichsbild des Simulators, wobei die gemessenen Arbeitspunkte eingestellt und keine horizontale, wohl aber eine longitudinale Anregung angenommen wurde, zeigt gute Übereinstimmung mit den Messungen.

Wird für HZ 19 aus den Daten der Dispersionsbewegung das Phasenraumbild rekonstruiert, so ergibt sich das in Abbildung 4.9 für Messung und Simulation gezeigt Resultat. Hier wurde bei der Simulation ein kleiner horizontaler Restanteil der Betatronbewegung angenommen.



(a) Messung



(b) Simulation

Abbildung 4.10: Phasenraummessung **COSY** an DPOS04

Da die Dispersionsbewegung durch $\vec{x}_d = \vec{D}\frac{\Delta p}{p_0}$ gegeben ist, liegen die aus dieser Bewegung resultierenden Durchstoßpunkte im transversalen Phasenraum auf einer Geraden, deren Richtung gleich der Richtung des Dispersionsvektors $\vec{D} = (D, D')$ an der Monitorposition ist. So kann mit dem angegebenen Verfahren

die Richtung des Dispersionsvektors an jedem Monitor bestimmt und auf Übereinstimmung mit den Simulatorergebnissen geprüft werden. Für die Monitorposition HZ 19 ergibt sich gute Übereinstimmung.

Für **COSY** wurden analoge Messungen durchgeführt, wobei die vorgestellte Methode der Phasenraummessung mit einem Monitor verwendet wurde. Da eine Triggerung der Signalnahme mit dem Teilchenumlauf nicht möglich war, mußte aus den Meßdaten ein umlaufsynchrones Signal herausgefiltert werden. Dies geschah durch ein EPOS-Programm. Eine Version von EPOS [Goetz90] [Picard91] wurde dem Beschleuniger-Labor des Forschungszentrums Jülich für diese Analyse zur Verfügung gestellt. Abbildung 4.10 auf S. 74 zeigt das Bild einer Phasenraummessung in **COSY**. Der Arbeitspunkt lag in der Nähe der drittelzahligen Resonanz bei $Q_x = 11/3$. Zur Hervorhebung des Teilchenverhaltens nahe der Resonanz wurde jeder dritte Punkt verbunden.

Die Lage der Phasenraumfigur ist hier durch die vorgegebenen Werte der optischen Funktionen festgelegt. Die Simulation wurde in linearer Näherung durchgeführt, wobei der Arbeitspunkt für optimale Übereinstimmung der Schrittweiten in Simulation und Messung gewählt wurde. Als Arbeitspunkt ergibt sich $Q_x = 3.646$. Die lineare Näherung gibt die ellipsenförmige Teilchenbewegung gut wieder. Auffällig ist jedoch der starke Pegelverlust des Differenzsignals. Die Filamentation drückt schon nach ca. 50 Umläufen das Signal unter die Rauschschwelle. Der Grund für diese starke Dämpfung ist bislang ungeklärt. Falls die Filamentation auf nichtlineare Felder in der Maschine zurückzuführen ist, kann aus der Filamentationszeit die quadratische Arbeitspunktbreite im Strahl abgeschätzt werden, und es ergibt sich (siehe Abschnitt 2.3.1):

$$< (\Delta Q)^2 > \simeq 0.01.$$

4.3 Untersuchungen zur Extraktionseffizienz bei ELSA

4.3.1 Stretchermode

Im folgenden sollen die gegenwärtigen Parameter der Resonanzextraktion untersucht werden. Parameter, die die Qualität der Extraktion beeinflussen, sind:

- Schrittweite am Septum, insbesondere die dadurch bestimmte
- Extraktionseffizienz und
- Schrittzahl der instabilen Teilchen bis zur Extraktion.

Nach einer generellen Darstellung der Extraktionsverhältnisse bei den typischerweise im Stretchermode benutzten Maschineneinstellungen werden diese Parameter der Extraktion zunächst im einzelnen untersucht, Möglichkeiten der Verbesserung werden im Anschluß diskutiert.

Darstellung der Extraktionsbedingungen bei ELSA

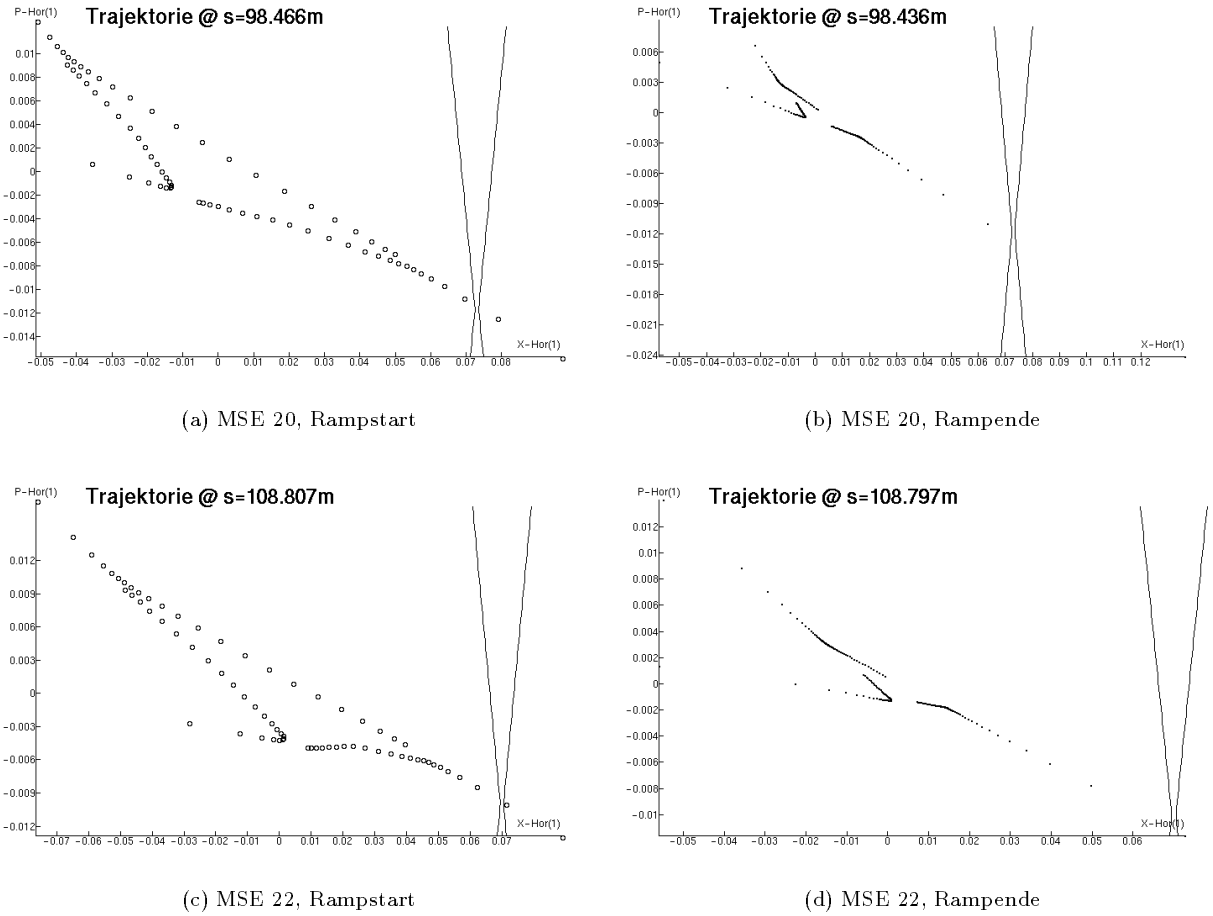
Bei der Resonanzextraktion im Stretchermode wird bei Injektionsenergie der Teilchenstrahl durch Fahren einer Rampe der Luftquadrupole extrahiert. Als Ausgangspunkt für die Betrachtungen zur Resonanzextraktion im Strechtermode dienen die üblicherweise eingestellten Betriebsparameter (siehe [Neckenig], S. 43):

$Q_{x,start}$	$Q_{x,end}$	m_{sx}	m_{sf}	m_{sd}
4.656	4.664	0.45 m^{-3}	1.52 m^{-3}	0 m^{-3}

wobei $Q_{x,start}$ der Arbeitspunkt zu Beginn der Quadrupolrampe, $Q_{x,end}$ der Arbeitpunkt am Ende der Quadrupolrampe und m_f die Sextupolstärke der Familie f ist. Die gewünschte Arbeitspunktwahl ist zu erreichen durch: $k_d = -0.597604\, m^{-2}$, $k_f = 0.63585\, m^{-2}$ für $Q_{x,start}$. Der Endarbeitspunkt $Q_{x,end}$ kann durch eine Stärke der Luftquadrupole von $k_l = 0.0037\ m^{-2}$ erreicht werden, wobei alle vier Luftquadrupole gleichsinnig angeregt werden. Der Endarbeitspunkt ist dabei nicht genau der Resonanzarbeitspunkt. Bei der bei **ELSA** verwendeten Injektionsmethode kann der Strahl nicht genau auf die Sollbahn injiziert

werden. Die Teilchenverteilung ist daher im Phasenraum bezüglich des Closed-Orbit nach außen versetzt. Der von der Teilchenverteilung überdeckte Winkelbereich weitet sich danach durch Filamentation aus, diese Aufweitung ändert jedoch die Emittanz des einzelnen Teilchens nicht, da die Extraktionszeit wesentlich kleiner als die natürliche Dämpfungszeit ist. Daher bildet sich ein ringartiges Strahlprofil im horizontalen Phasenraum aus, in der Mitte ist die Teilchendichte nahezu Null. Dieser sogenannte *Hollow Beam* führt dazu, daß die Resonanz nicht ganz überfahren werden muß, um den Strahl vollständig zu extrahieren (siehe dazu [Neckenig], S. 44 f.).

Abbildung 4.11 zeigt die Separatrix im Vergleich bei MSE 20 und MSE 22 zu Beginn und Ende der Quadrupolrampe. Die Emittanz der Fixpunkte zu Rampstart ist $\epsilon_{fix,start} = 2.0 \cdot 10^{-4} m\ rad$, zum Rampende $\epsilon_{fix,end} = 4.3 \cdot 10^{-5} m\ rad$. Es sind jeweils die drei auslaufenden Äste der Separatrix dargestellt. Die V- bzw. X-förmige Struktur im rechten Teil jedes Bildes stellt das Extraktionsseptum dar.



(a) MSE 20, Rampstart

(b) MSE 20, Rampende

(c) MSE 22, Rampstart

(d) MSE 22, Rampende

Abbildung 4.11: Separatrixlage am Ort der Septa

Bei **ELSA** stehen die Extraktionssepta ringauswärts, so daß nur ein nach außen ($x > 0$) gerichteter Separatrixast für die Extraktion in Frage kommt. Bei beiden Septa ist jeweils nur ein Separatrixast nach außen gerichtet. Dieser für die Extraktion relevante Separatrixast liegt im IV. Quadranten der Phasenraumebene und wird im folgenden als relevanter Separatrixast bezeichnet.

Extraktionseffizienz

Das auslaufende Teilchen wird extrahiert, wenn das Septum die Aperturbegrenzung auf dem relevanten Separatrixast bildet. Dabei hängt die Extraktionseffizienz ϵ vom Verhältnis der Septumdicke d_{sep} zur Schrittweite Δx_{sep} in x-Richtung am Septum ab:

$$1 - \epsilon = 1 - \frac{N_{ext}}{N_{tot}} = \frac{d_{sep}}{\Delta x_{sep}},$$

	Rampstart		Rampende		
	MSE 20	MSE 22	MSE 20	MSE 22	
x_{sep} [m]	0.073	0.07	0.045	0.049	Optimale
x'_{sep}	-0.012	-0.01	-0.0082	-0.0077	Septumposition
x_{fix}	0.053	0.046	0.013	0.011	Ort des relevanten
x_{fix}	-0.0079	-0.0059	-0.0019	-0.0014	Fixpunkts
Δx_{sep} [m]	0.01	0.01	0.07	0.050	Schrittweite an Septumsposition
$\Delta x'_{sep}$	-0.0015	-0.002	-0.013	-0.0077	Rampstart
$d_{sep,eff}$	0.001	0.001	0.0024	0.0020	Eff. Septumdicke und Effizienz
$\frac{N_{ext}}{N_{tot}}$	0.9	0.9	0.96	0.91	
Turns	70		190		Umlaufzahl bis zum Erreichen des Septums

Tabelle 4.8: Parameter der Resonanzextraktion zu Rampstart und Rampende

wobei N_{ext} die Zahl der extrahierten und N_{tot} die Gesamtzahl der Teilchen ist. Ist $\Delta x_{sep} < d_{sep}$, so treffen alle Teilchen auf die Septumschneide. Für $\Delta x_{sep} > d_{sep}$ kann, da Teilchen statistisch auf dem Separatrixast verteilt sind, der angegebene Anteil der Teilchen das Septum überspringen. Je größer die Schrittweite, desto höher also die Extraktionseffizienz. Jedoch steigt mit höherer Schrittweite auch die Emittanz des extrahierten Strahls. Da die Teilchen nach Überspringen des Septums Abstände vom Septum von 0 bis $(\Delta x_{sep} - d_{sep})$ haben, ist damit die Anfangsbreite des extrahierten Strahls vorgegeben.

Bei **ELSA** beträgt die Dicke der Vorsepta $d_{sep} = 1\ mm$. Die Extraktionseffizienz soll durch die Sprungweite nicht wesentlich eingeschränkt werden. Daher wird im folgenden von einer Positionierung der Septa an einem Ort mit Sprungweite $\Delta x_{sep} = 1\ cm$ ausgegangen. Die den Bedingungen zum Rampstart entsprechende Lage der Septa im Phasenraum ist in Abbildung 4.11 dargestellt. Wie aus dem Bild und der Tabelle der Parametereinstellungen zu entnehmen ist, sind die zum Erreichen einer Extraktionseffizienz von 90% notwendigen Bedingungen für **ELSA** durchaus erfüllbar. Dabei ist zu beachten, daß für ein Teilchen mit endlichem Winkel x' das Septum dicker wirkt, da es auf seinem Weg entlang des Septums horizontal die Strecke $\Delta d_{sep} = l_{sep} \sin(x') \simeq l_{sep} x'$ zurücklegt, wobei l_{sep} die Septumlänge ist. Ein Teilchen in einem geringeren Abstand vom Septum als Δd_{sep} trifft daher beim Vorbeiflug auf das Septum. Dies kann auch als "Verdickung" des Septums für Teilchen mit endlichem Winkel x' aufgefaßt werden, so daß die effektive Septumdicke $d_{sep,eff}$ gegeben ist als:

$$\begin{aligned} d_{sep,eff} &= d_{sep} + \Delta d_{sep} \\ &= d_{sep} + l_{sep} x', \end{aligned}$$

für $x' \ll 1\ rad$. Dies führt zu der in Abbildung 4.11 gezeigten X-förmigen Darstellung des Septums.

Zur Erlangung hoher Effizienz muß das Septum so gedreht werden, daß die schmalste Stelle der effektiven Septumdicke auf den relevanten Separatrixast zu liegen kommt.

Schrittweite

Während der Extraktionsphase schrumpft der stabile Phasenraumbereich, die Drehung der Separatrix ist vernachlässigbar. Dadurch vergrößert sich der Abstand der Fixpunkte vom Septum und gleichzeitig verschiebt sich der relevante Separatrixast nach unten. Durch die größere Entfernung vom Fixpunkt steigt die Schrittweite am Septum, durch die Verschiebung des Separatrixastes steigt die effektive Septumdicke. Beide Effekte wirken gegenläufig, jedoch überwiegt das Anwachsen der Schrittweite, so daß die Extraktionseffizienz im Verlauf der Quadrupolrampe steigt.

Mit der größeren Schrittweite geht jedoch auch eine Erhöhung der Emittanz des extrahierten Strahl einher. Dessen Emittanz steigt um den Faktor von mehr als 10, da die Emittanz quadratisch mit dem Strahldurchmesser wächst.

Schrittzahl

Die Schrittzahl bis zum Erreichen des Septums nimmt ferner während der Quadrupolrampe stark zu. Dies hängt weniger mit der Vergrößerung des Abstands von Fixpunkt zu Septum als mit der Annäherung an den resonanten Arbeitspunkt zusammen, da die Schrittweite eines gerade instabil gewordenen Teilchens mit sinkendem Abstand von Q_{res} abnimmt. Das Teilchen braucht also gegen Ende der Rampe länger zum Erreichen des auslaufenden Separatrixastes als zu Beginn. Je größer die Schrittzahl ist, desto empfindlicher ist der Extraktionsprozeß gegen Störungen.

Dabei hängt die Schrittzahl eines Teilchens bis zum Erreichen des Septums bei fester Maschineneinstellung empfindlich vom Abstand des Teilchens von der Separatrix ab. Der fraktionelle Arbeitspunkt eines Teilchens an einer Phasenraumposition kann vom Simulator bestimmt werden und ist für Teilchen zusammen mit der Schrittweite ΔJ zu Beginn und zum Ende der Extraktionsrampe in Abbildung 4.12 aufgetragen. Hierbei wurde $J = \epsilon_x/2$ für ein instabiles Teilchen auf dem relevanten Separatrixast als horizontale Achse aufgetragen. Es zeigt sich, daß für Teilchen außerhalb des stabilen Bereichs der Arbeitspunkt sehr schnell abfällt. Dabei ist die mittlere Zahl der Umläufe $N_{ext}(\tilde{J})$, die ein Teilchen bis zur Extraktion braucht umgekehrt proportional zum Abstand des lokalen Arbeitspunkts vom Resonanzarbeitspunkt, und für die mittlere Umlaufzahl bis zum endgültigen Teilchenverlust bei $J = \infty$ gilt:[11]

$$N_{ext,\infty}(\tilde{J}) = \frac{1}{2(Q_x - Q_{res})}.$$

Diese Zahl kann als Abschätzung für die Laufzeit der Teilchen bis zum Septum genommen werden, da die Schrittweite mit der Zeit exponentiell ansteigt, und somit der relative Unterschied von N_{ext} zu $N_{ext,\infty}$ gering ist. Als Beispiel ist die mittlere Zahl der Umläufe bis zur Extraktion für Teilchen eines bestimmten Emittanzabstands $\tilde{J} - \tilde{J}_{sep}$ von der Separatrix zu Beginn und zum Ende der Extraktion aufgetragen:

	Rampstart	Rampende
$\tilde{J} - \tilde{J}_{sep}$	$N_{ext,\infty}$	$N_{ext,\infty}$
$5 \cdot 10^{-7}$	109	302
$10 \cdot 10^{-7}$	99	265

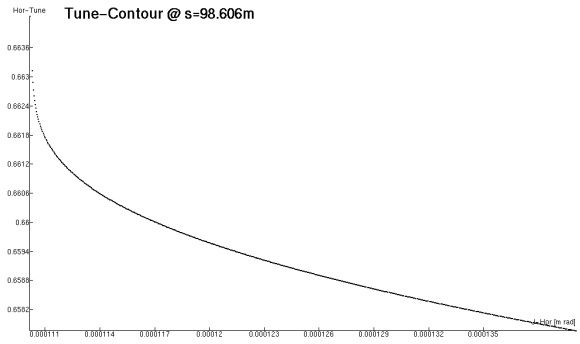
Der Extraktionsprozeß, der die Teilchen aus dem stabilen Phasenraumbereich treibt, bringt die Teilchen in der Regel während der Quadrupolrampe zu einem konstanten mittleren $\tilde{J} - \tilde{J}_{sep}$ als Startpunkt der Extraktionsbewegung. Es ist daher mit einer Erhöhung der Umlaufzahl zum Rampende hin zu rechnen.

Bisher waren die Verhältnisse bei konstanter Maschineneinstellung jeweils zu Rampstart und Rampende untersucht worden. Jedoch kann auch die Extraktion durch eine Quadrupolrampe vom Simulator nachgebildet werden. In Abbildung 2.11 auf S. 48 ist ein Beispiel für die Phasenraumtrajektorie eines Teilchens während einer Quadrupolrampe zu sehen. Im Stretchermode ist die Extraktionsrampe typischerweise 20 ms lang, was ca. 36500 Umläufen in **ELSA** entspricht. Die Umlaufzahl N_{ext} eines Teilchens zwischen dem Kreuzen der Separatrix und dem endgültigen Teilchenverlust kann vom Simulator ermittelt werden, indem das Teilchen auf die Separatrix gesetzt und sodann beim Umlauf verfolgt wird. Das Ergebnis zeigt Abbildung 4.13. Die Zahl der Umläufe bis zur Extraktion ist in Abhängigkeit von der Rampzeit, ausgedrückt in Einheiten der Umlaufzeit in **ELSA**, aufgetragen. Wiederum ist der Effekt der Zunahme der Schrittzahl bis zur Extraktion für ein instabil gewordenes Teilchen während der Quadrupolrampe zu sehen. Der Effekt ist bei Extraktion durch eine Quadrupolrampe geringfügig schwächer, als bei Extraktion durch einen Prozeß, der Teilchen mit konstantem mittlerem $\tilde{J} - \tilde{J}_{sep}$ extrahiert, insgesamt wird dieses Modell jedoch in guter Näherung wiedergegeben.

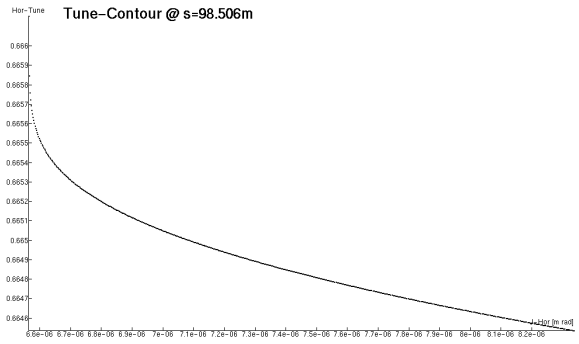
Gegenmaßnahmen

Den Effekten der Vergrößerung der Schrittweite am Septum und der Erhöhung der Umlaufzahl instabil gewordener Teilchen während der Extraktionsphase kann durch Rampen von weiteren Strahlelementen begegnet werden.

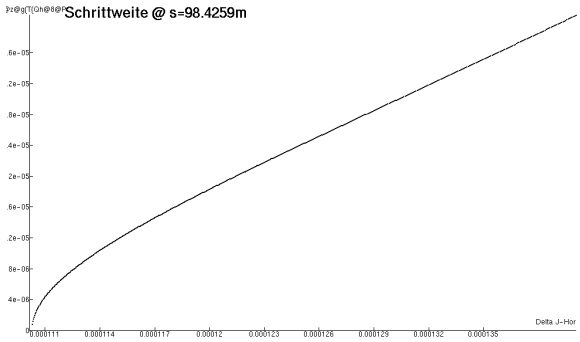
[11] Der Impuls $\tilde{J}$ ist hier der Impuls in Winkel-Wirkungs-Variablen der Resonanz und bleibt also beim Teilchenumlauf erhalten, während J für den Impuls in linearen Winkel-Wirkungs-Variablen steht und sich während der Teilchenbewegung ändert.



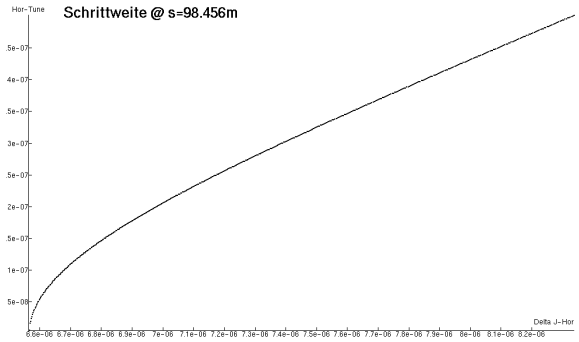
(a) Arbeitspunkt Rampstart



(b) Arbeitspunkt Rampende



(c) Schrittweite Rampstart



(d) Schrittweite Rampende

Abbildung 4.12: Arbeitspunkte und Schrittweiten gegen J bei MSE 20

Um die optimale Schrittweite am Septum während der Extraktionsphase zu erhalten, muß der Abstand des Strahls zum Septum verändert werden. Da das Septum nicht in der dem Maschinenzyklus entsprechenden Geschwindigkeit gefahren werden kann, bietet sich eine Strahlverschiebung durch Korrektoren an. Mit einer geschlossenen Vier-Korrektor-Beule kann am Ort des Septums eine gewünschte Ablage und ein Winkel des Closed-Orbit eingestellt werden. Mit einer Rampe der Netzgeräte dieser Korrektoren kann über die Zeit der Extraktion der zum Erhalt der Schrittweite optimale Septumabstand beibehalten werden. Bei optimaler Einstellung zu Beginn der Rampe muß die Beule am Ende der Rampe die Unterschiedsbeträge zwischen der optimalen Position vorher und nachher erzeugen. Also ergibt sich für MSE 20:

$$\begin{aligned} x_{beule,end} &= 0.028\ m, \\ x'_{beule,end} &= -0.0038\ rad. \end{aligned}$$

Diese Beule kann mit Hilfe der im Simulator implementierten Funktionalität zur Berechnung einer Vier-Korrektor-Beule bestimmt werden (siehe Anhang A.3). Es ergeben sich folgende Einstellung der Korrektoren für die Beule an MSE 20:

Korrektorsatz 1		Korrektorsatz 2	
Korrektor	Winkel [mrad]	Korrektor	Winkel [mrad]
KH 18	1.47	KH 15	-1.38
KH 19	2.29	KH 18	1.11
KH 24	-0.52	M 22	2.41
KH 25	-2.09	M 24	0.198

Im Bereich der **ELSA**-Extraktion sind aus Raumgründen nicht in jeder Halbzelle Korrektorelemente montiert. Dies wirkt sich auf die zur Beulenerzeugung benötigten Kickstärken negativ aus. So kann durch

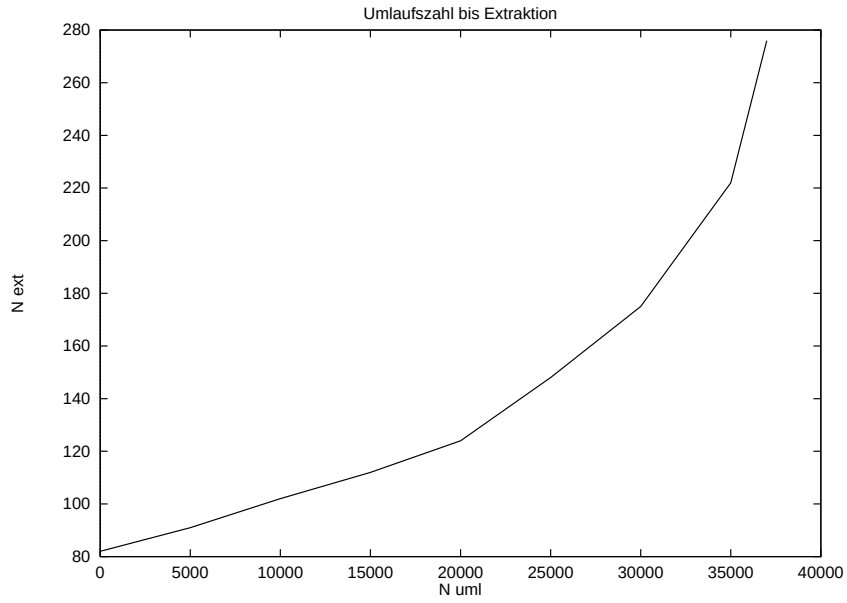


Abbildung 4.13: Anzahl der Umläufe bis zur Extraktion während Quadrupolrampe bei MSE 20

Verwendung von Korrektorsatz 1 die gewünschte Beule erzeugt werden. Jedoch besteht Korrektorsatz 1 nur aus kleinen Korrekturspulen, die bei 1 GeV maximal 1.5 mrad Kickwinkel erzeugen können. So ist die Beule mit Korrektorsatz 1 technisch nicht realisierbar. Die Zusatzwicklungen der **ELSA**-Dipolmagnete können jedoch bei 1 GeV Kickwinkel bis zu 4.8 mrad hervorrufen, so daß die in Korrektorsatz 2 vorgeschlagene Beule bis ca. 1.5 GeV verwirklicht werden kann. Die Netzgeräte der Zusatzwicklungen der **ELSA**-Dipolmagnete sind jedoch zur Zeit nicht einsatzbereit.

Für MSE 22 werden die Ablagen:

$$\begin{aligned} x_{beule,end} &= 0.021\ m, \\ x'_{beule,end} &= -0.0023\ rad \end{aligned}$$

benötigt, was mit den Korrektorsätzen

Korrektorsatz 3		Korrektorsatz 4	
Korrektor	Winkel [mrad]	Korrektor	Winkel [mrad]
KH 18	-1.56	M 18	-1.76
KH 20	0.73355	KH 20	0.83
KH 24	1.84	M 24	1.51
KH 25	0.799858	M 25	1.81

erreicht werden kann. Auch diese Korrektorsätze 3 und 4 sind nicht bis zur maximalen **ELSA**-Energie einsetzbar. Eine Ertüchtigung der Netzgeräte bis zumindest 6 mrad Ablenkwinkel wären hierfür notwendig. Ferner müssen die Korrektornetzgeräte rampbar sein. Durch diese Rampen kann die Emittanz des extrahierten Strahls annähernd konstant gehalten werden. Dies erhöht zwar nicht direkt die Effizienz des Extraktionsprozesses, führt aber zu einer besseren Strahlqualität am Experiment, zu geringeren Strahlverlusten in der externen Beamline, und damit zu verbesserten Extraktionsbedingungen.

Um die Umlaufzahl bis zum Erreichen des Septums während der Rampe konstant zu halten, kann während der Extraktion eine Sextupolrampe gefahren werden. Da die Emittanz der Fixpunkte bei **ELSA** J_{fix} mit $\frac{\Delta Q_x}{m_{sx}}$ skaliert, die Schrittweite bei konstantem J_{fix} jedoch mit m_{sf}, kann durch Erhöhen von m_{sx} bei proportionalem Erniedrigen von ΔQ_x die Schrittzahl bis zum Erreichen des Septums verringert werden.

Eine ungefähre Angleichung der Schrittzahl ergibt sich aus der Simulation bei Umskalierung von m_{sx} und ΔQ während der Extraktionsphase um den Faktor 3. Damit ergeben sich als Rampen:

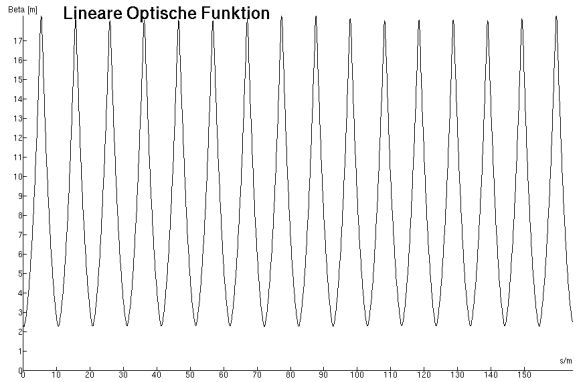
$$\begin{aligned} m_{sf}: &\quad 0.45\ m^{-3} \quad \rightarrow 1.35\ m^{-3}, \\ k_l: &\quad 0\ m^{-2} \quad \rightarrow 0.0012\ m^{-2}. \end{aligned}$$

Diese starke Änderung der Extraktionssextupole, die bei 1.2 GeV einer Stromrampe von 10.8 $A \rightarrow 32.3\ A$ entspräche, ist nach der Auslegung der Netzgeräte im 50 Hz Stretcherbetrieb nicht möglich. Wohl aber kann die Sextupolrampe bei langen Extraktionszeiten des Nachbeschleunigungsmodes eingesetzt werden, um die Stabilität der Extraktionsverhältnisse während der Extraktionszeit zu erhöhen.

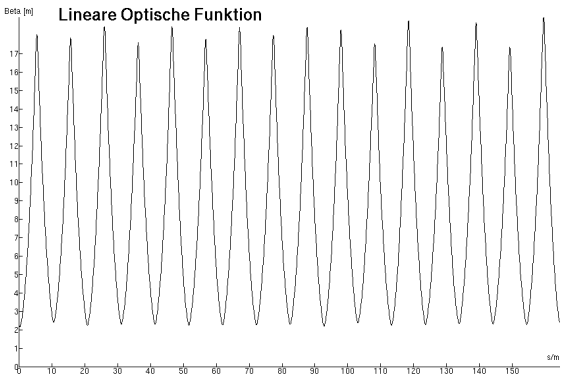
Bei eingeschalteten Sextupolen haben Closed-Orbit-Störungen einen Einfluß auf den Arbeitspunkt und auf den Closed-Orbit selber. Ein mit einer horizontalen Ablage Δx durchlaufener Sextupol der Stärke m_f der Familie f erzeugt einen Gradientenfehler von $\Delta k = \Delta x \cdot m_f$ und eine Dipolstörung von $\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right) = (\Delta x)^2 m_f$. Wird beispielsweise ein einzelner Sextupol der Stärke $m_f = 0.5\ m^{-3}$ in **ELSA** mit $\Delta x = 1\ cm$ durchlaufen, so führt dies zu:

$$\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right) = 5 \cdot 10^{-5}/m \quad \Rightarrow \quad x_{CO,max} = 0.3mm,$$
$$\Delta k = 0.005\ m^{-2} \quad \Rightarrow \quad \Delta Q_{max} = 0.0021.$$

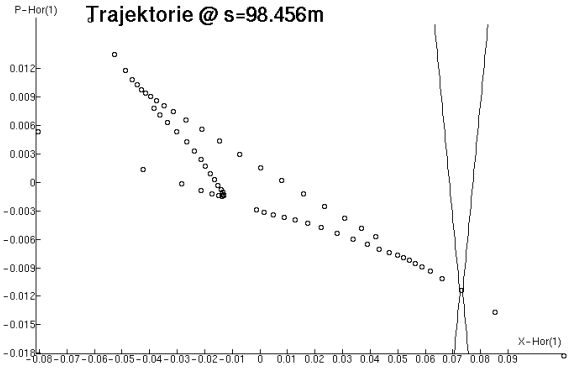
wobei die Länge des Sextupols $l_{sx} = 0.287m$, die maximale Betafunktion $\beta_{max} = 18m$ und der Arbeitspunkt $Q = 4.666$ ist. Während also die zusätzliche Orbit-Verschiebung vernachlässigbar ist, liegt die Arbeitspunktverschiebung durchaus in der Größenordnung des Arbeitspunktabstandes von der Resonanz. Da die Arbeitspunktänderung lokalisiert ist, kann sich die Phasenbeziehung zwischen den Sextupolen einer Familie verschieben. Damit wird die Auswirkung der Sextupole auf die Resonanz geändert.



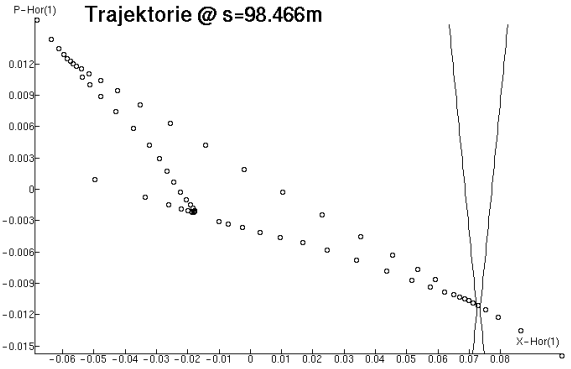
(a) Betafunktion ohne Kick



(b) Betafunktion mit Kick



(c) Separatrix ohne Kick



(d) Separatrix mit Kick

Abbildung 4.14: Wirkung eines Kicks auf die Strahloptik

Ein Beispiel für die Auswirkung von Closed-Orbit Störungen auf die Resonanzextraktion zeigt Abbildung 4.14. Hier wurde bei der angegebenen Optik der Korrektor KH 5 auf $\theta = -1.7\ mrad$ eingestellt. Es ergab sich eine Arbeitspunktänderung von $\Delta Q = 0.003$ auf $Q_{Kick} = 4.6533$. Zur Korrektur dieser Arbeitspunktverschiebung wurde die Stärke der fokussierenden Quadrupole um $\Delta k_f = 0.0027\ m^{-2}$ auf $k_{f,Kick} = 0.63612\ m^{-2}$ geändert. Es ergibt sich die gezeigte Änderung der Betafunktion und, trotz

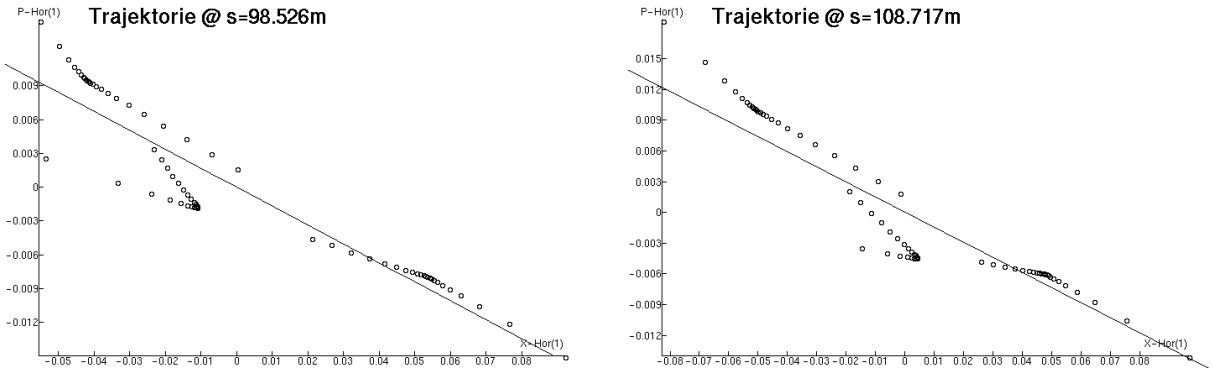
Korrektur des Arbeitpunkts bleibt eine wesentliche Änderung der Größe der Separatrix. Dabei ist die Lageänderung der Separatrix durch den applizierten Kick mit $x_{CO} = 0.002\ m, x'_{CO} = 8.6 \cdot 10^{-5}\ rad$ klein gegen die Ausdehnung der Separatrix. Die Anregungsstärke der Extraktionssextupole ändert sich nämlich um über 10%, ferner wird die Separatrix um ca. 0.1 rad gedreht. Diesem Effekt kann jedoch, da der Drehwinkel der Separatrix klein ist, durch Nachfahren des Arbeitspunkts mit Hilfe der Quadrupole begegnet werden. Als neuer Arbeitspunkt ist $Q_{sx} = 4.6590$ durch Einstellung der fokussierenden Quadrupole auf $k_{sx} = 0.63653\ m^{-2}$ zu wählen, um gleiche Extraktionsbedingungen zu erhalten, wie ohne Störung des Closed-Orbits.

Wegen der Problematik beim Rampen der Sextupole erscheint diese Maßnahme nicht geeignet, zur Verbesserung der Extraktionsqualität beizutragen. Jedoch ist die Applikation einer Beule an der Septumposition zum Erhalt der Schrittweite am Septum durchaus vielversprechend.

Die bei **ELSA** beobachtete Abhängigkeit des Arbeitspunkts von der Sextupolstärke von $\frac{Q_x}{m_{sx}} \simeq 0.002 m^3$ läßt darauf schließen, daß die **ELSA**-Sextupole vom Strahl nicht mittig durchlaufen werden. Wie das dargestellte Beispiel zeigt, ist daher zur Zeit eine genaue Aussage über die tatsächliche Größe der Separatrix nicht möglich. Im Simulator wird zur Zeit die Annahme einer gleichmäßigen Verschiebung des Closed-Orbits in allen Sextupolen angenommen (siehe Tabelle 4.6). Die Vermessung der Strahllage im einzelnen Sextupol kann durch Erregen dieses Sextupols und Messung des Arbeitspunkts geschehen. Die Arbeitspunktänderung beim Fahren der gewünschten Closed-Orbit-Beule kann dann mit dem Simulator ermittelt werden, nach Auswahl des Korrektorsatzes können Arbeitspunktkorrekturen zur Kompensation der Effekte der Orbit-Störungen im Sextupol berechnet werden.

Hardt'sche Extraktion

Bei der Extraktion wurden bisher nur Teilchen einer festen Energie betrachtet. Jedoch ist im Strahl immer eine Energieverteilung zu beobachten. Teilchen unterschiedlicher Energie sehen dabei die Feldstärken der Magnete unterschiedlich. Dies führt zu zwei Effekten. Zum einen verschiebt sich der Strahlmittelpunkt mit der Energieabweichung entlang eines durch $\vec{D} = (D,\ D')$ am Ort des Septums im Phasenraum gegebenen Vektors. Die Lage der durch $\vec{D}$ aufgespannten Geraden am Ort der Extraktionssepta ist in Abbildung 4.15 zu sehen.



(a) MSE 20

(b) MSE 22

Abbildung 4.15: Separatrix und Dispersionsgerade am Ort der Septa

Für Teilchen verschiedener Energie ist also die Separatrix entlang des Dispersionsvektors $\vec{D}$ verschoben.

Ferner verändert sich die Größe der Separatrix für Teilchen verschiedener Energie, da der Arbeitspunkt über die Chromatizität von der Teilchenenergie abhängt.

Die Idee der Hardt'schen Extraktion [Hardt] ist es, die beiden Effekte der Energieabweichung für extrahierte Teilchen zur gegenseitigen Aufhebung zu bringen. Hierzu wird die Maschine so eingestellt, daß der Fixpunkt des relevanten Separatrixastes sich mit der Teilchenenergie nicht mehr im Phasenraum verschiebt. Da sich die Separatrix während der Extraktionsphase nicht nennenswert dreht, bedeutet dies, daß auch der relevante Separatrixast fixiert ist. Die Teilchen werden dann entlang einer Geraden im

Phasenraum extrahiert und haben daher minimale Emittanz.

Da sich der Fixpunkt mit einer Energieänderung entlang der durch $\vec{D}$ aufgespannten Geraden bewegt, muß der im Phasenraum zu fixierende Fixpunkt auf diese Gerade zu liegen kommen. Dazu muß die Separatrix gedreht, oder die Dispersion am Ort des Septums angepaßt werden. Da sich die Dispersion der **ELSA**-Optik nur geringfügig variieren läßt, kommt hier nur eine Drehung der Separatrix in Frage.

Mit der zur Zeit verwendeten einen Sextupolfamilie zur Resonanzanregung ist eine Drehung der Separatrix nicht zu erreichen. Jedoch ist die Bedingung, daß der Fixpunkt auf dem relevanten Separatrixast liegt, für die Septa MSE 20 und MSE 22 annähernd erfüllt. Die Möglichkeit eines Abgleichs des Drehwinkels der Separatrix mit Hilfe einer weiteren Sextupolfamilie ist jedoch wünschenswert. Ferner ist diese weitere Familie zum Abgleich der natürlichen Sextupolstärke in der Maschine notwendig.

Separatrixdrehung

Zur Anregung der Resonanz verfügt **ELSA** zur Zeit nur über eine Sextupolfamilie. Wie in [Neckenig], S. 96 f. dargelegt, kann in guter Näherung für die drittelzahlige Resonanz die Anregung in orthogonale Komponenten A und B zerlegt werden, so daß die Fläche der Separatrix $F_{sep} \propto \sqrt{B^2 + A^2}$ und der Drehwinkel der Separatrix $\phi = \phi_0 - \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$ ist.[12]

Durch eine Sextupolfamilie ist nur eine Resonanzkomponente anregbar. Sei A die durch die gegenwärtige Sextupolkonfiguration angeregte Komponente. Zur Drehung der Separatrix muß nun die Komponente B angeregt werden. Dabei soll die Entkopplung von Resonanzanregung und Chromatizitätskorrektur erhalten bleiben. Eine effektive Anregung der B-Komponente durch Elemente in den dispersionsfreien Stücken ist nicht möglich. Es müssen also Positionen von Sextupolen gefunden werden, bei denen sich die Auswirkungen auf die Chromatizitätskorrektur aufheben. Dies kann durch entgegengesetzte Polung der Sextupole erreicht werden. Die für eine solche Anregung effektivsten Positionen in **ELSA** sind benachbart zu F 6 und F 14 bzw. F 22 und F 30. Da in der Nähe von F 22 kein Raum zum Einbau eines Sextupols zur Verfügung steht –F 22 liegt unmittelbar zwischen dem Dipolmagneten D 21 und dem Septum MSE 22– kommt für die Anregung von der B-Komponente nur das Paar F 6 und F 14 in Frage. Aus Platzgründen kann auch hier nicht die optimalste Anregung erfolgen. Folgende Elementfolge wird vorgeschlagen:
Hinter F 6:

$$\begin{aligned} \text{Alt} \quad & Drift(0.075m)MON\ 6(0.22m)Drift(0.09)Ventil(0.07m)Drift(0.415m), \\ \text{Neu} \quad & Drift(0.18)Sextupol(0.25m)Drift(0.09)MON\ 6(0.22m)Ventil(0.07m)Drift(0.06m). \end{aligned}$$

Vor F 14:

$$\begin{aligned} \text{Alt} \quad & Drift(0.42m)KH\ 13(0.1m)Drift(0.41m)MON\ 13(0.22m)Drift(0.075m), \\ \text{Neu} \quad & Drift(0.2865m)KH\ 13(0.1m)Drift(0.09m)MON\ 13(0.22m)Drift(0.1085m) \\ & \qquad Sextupol(0.25m)Drift(0.18m), \end{aligned}$$

wobei die Längenangaben in Klammern hinter den Elementen als Baulängen zu verstehen sind. Bei der vorgeschlagenen Lösung wird KH 13 leicht verschoben. Die beiden neu eingebauten Sextupole sind mit entgegengesetzter Polarität anzuregen. Betrachtet man nun die Anregungsstärken A und B sowie die Chromatizitätsänderung ΔC durch die alte Sextupolfamilie SXA und die neue Sextupolfamilie SXB zur Anregung der B-Komponente, so ergibt sich:

$$\begin{gathered} \frac{B_{SXA}}{A_{SXA}} = 0.38, \quad \frac{A_{SXB}}{B_{SXB}} = 0.03, \quad \frac{A_{SXA}}{B_{SXB}} = 0.83, \\ \frac{\Delta C_{x,SXB}}{\Delta C_{x,SXF}} = 0.0144, \quad \frac{\Delta C_{z,SXB}}{\Delta C_{z,SXD}} = 0.033. \end{gathered}$$

Alle Größen wurden hierbei auf die Zahl der Sextupole pro Familie normiert. Die neue vorgeschlagene Familie von Sextupolen SXB regt nur die B-Komponente der Resonanz an, ist in ihrer Wirkung pro Sextupol geringfügig stärker als die Familie SXA und ändert die Chromatizitäten nicht.

[12] Es wurden die Bezeichnungen aus [Neckenig], S. 96 f. beibehalten, beachte jedoch: $\tan 3\psi_0 = -\frac{B_m}{A_m}$.

Extraktion für Teilchen verschiedener Energie

Um den relevanten Fixpunkt konstant zu halten, muß die Chromatizität der Maschine so abgeglichen werden, daß die Verschiebung der Separatrix durch ihre Größenänderung aufgehoben wird. Da die Separatrixgröße in guter Näherung proportional zum Arbeitspunktabstand ΔQ_x von der Resonanz ist, kann diese Bedingung für einen Fixpunkt auf dem Dispersionsvektor geschrieben werden als:

$$0 = \Delta x_{fix} = \frac{\Delta p}{p_0} D - \frac{\Delta p}{p_0} \frac{C_x}{\Delta Q_0} x_{fix,0},$$

wobei ΔQ_0 Arbeitspunktabstand und $x_{fix,0}$ der Ort des Fixpunkts für Teilchen der Sollenergie $\Delta p = 0$ ist. Daraus folgt für die Chromatizität:

$$C_x = \frac{D \Delta Q_0}{x_{fix}}.$$

Für die Extraktion mit den vorgestellten Parametern und ohne Korrektur des Drehwinkels der Separatrix ergibt dies mit $\vec{D}_{20} = (2.51\ m, -0.414)$ und $\vec{D}_{22} = (2.51\ m, -0.39)$:

$$\begin{aligned} \text{MSE 20: } C_x = 0.51 \quad &\Rightarrow \quad m_{sf} = 1.655\ m^{-3}, \\ \text{MSE 22: } C_x = 0.58 \quad &\Rightarrow \quad m_{sf} = 1.6775\ m^{-3} \end{aligned}$$

als optimale Werte für die Chromatizitäten.

Die Simulation zeigt, daß mit den genannten Einstellungen für die Chromatizität die Position des relevanten Fixpunkts für Teilchen verschiedener Energie annähernd stabil gehalten werden kann, obwohl sich die Emittanz der Separatrix deutlich ändert, wie in Tabelle 4.9 dargestellt.

$\frac{\Delta p}{p_0}$	$x_{fix}[m]$	$x'_{fix}[rad]$	J_{fix} [m rad]	Δx_{sep} [m]	Umläufe
0	0.0548	-0.0078	$10.8\ 10^{-5}$	0.01	85
0.005	0.0537	-0.0078	$6.11\ 10^{-5}$	0.009	90
0.010	0.0537	-0.0080	$3.0\ 10^{-5}$	0.007	130
0.015	0.053	-0.0083	$0.90\ 10^{-5}$	0.004	190

Tabelle 4.9: Fixpunktposition für verschiedene Energieabweichungen

Extraktion durch Frequenzrampe

Mit Einstellung der Hardt'schen Extraktionsbedingung kann eine Extraktion über eine Frequenzänderung der **ELSA**-HF die Extraktionsergebnisse verbessern. Dabei wird dem Teilchenstrahl mit einer Frequenzänderung $\frac{\Delta f}{f}$ eine Impulsänderung $\frac{\Delta p}{p_0} = -\frac{1}{\alpha - 1/\gamma_0^2} \frac{\Delta f}{f}$ aufgezwungen. Die so erzeugte Impulsänderung der Teilchen führt über die Chromatizität zu einer Arbeitspunktänderung $\Delta Q_x = -C_x \frac{1}{\alpha - 1/\gamma_0^2} \frac{\Delta f}{f}$, die die Teilchen aus dem stabilen Bereich treibt.

Da alle Teilchen extrahiert werden sollen, muß durch die chromatische Arbeitspunktänderung die Separatrix zu Null geschrumpft werden. Dies bedeutet für den relevanten Fixpunkt, daß er vom Mittelpunkt der Separatrix aus gerechnet den Weg

$$\vec{x}_{fix} = \vec{D}_s \frac{\Delta p}{p_0}$$

überwinden muß. Damit ist die notwendige Impulsänderung zur Extraktion nur von der Dispersionsfunktion und der anfänglich notwendigen Separatrixbreite abhängig.

Für die genannten Extraktionsparameter ist eine Impulsänderung von $\frac{\Delta p}{p_0} = 0.021$ zur Extraktion aller Teilchen durchzuführen. Daraus folgt, daß eine Frequenzänderung von annähernd $\Delta f_{HF} = 600$ kHz den Strahl extrahiert. Da die Maschinendispersion und der Momentum-Compaction-Faktor bei **ELSA** nur geringfügig variabel sind, ist die zur Extraktion notwendige Frequenzänderung nur von der anfänglich notwendigen Separatrixgröße abhängig.

Wie Tests zeigen, kann, wahrscheinlich aus hochfrequenztechnischen Gründen, der Strahl jedoch nur bis zu einer Frequenzverschiebung von $\Delta f_{HF} = 60$ kHz stabil in **ELSA** gehalten werden, was einer konstanten Energieabweichung von $\frac{\Delta p}{p_0} = 0.002$ entspricht.

Damit ist eine Extraktion durch Frequenzverschiebung im reinen Stretcher-Mode nicht möglich. Da jedoch die natürliche Emittanz im Vergleich zur Separatrixbreite klein ist – die Breite des stabilen Bereichs in x-Richtung am Ort der Septa ist ca. zehn mal größer als die natürliche Strahlbreite[13] – ist für einen abgedämpften Strahl die benötigte Energieabweichung zu erreichen. Ferner ist auch bei Extraktion mit Hilfe einer Luftquadrupolrampe die Erfüllung der Hardt'schen Extraktionsbedingung sinnvoll, da dann Teilchen verschiedener Energie im Strahl gleich extrahiert werden.

4.3.2 Nachbeschleunigungsmode

Bei **ELSA** wird seit ca. 2 Jahren für hohe Energien ein Extraktionsmode eingesetzt, bei dem bei einem relativ großen Arbeitspunktabstand von der drittelzahligen Resonanz ohne Arbeitspunktrampe der Teilchenstrahl über lange Zeiten extrahiert werden kann. Durch geringfügige Veränderungen des Überspannungsfaktors der HF und, nach Einführung des neuen Timing-Systems [Goetz94] [Picard94], des Arbeitspunkts durch Zusatzquadrupole während der Extraktionsphase kann die Extraktionseffizienz verbessert werden, jedoch kann bei optimaler Einstellung die Maschine auch ohne jegliche HF- oder Arbeitspunktrampe geleert werden. Abbildung 4.16 stellt den zeitlichen Ablauf des Extraktionsmodes dar, wie er mit dem neuen Timing- und **ELSA**-Kontrollsystem [Goetz94][Picard94] möglich ist.

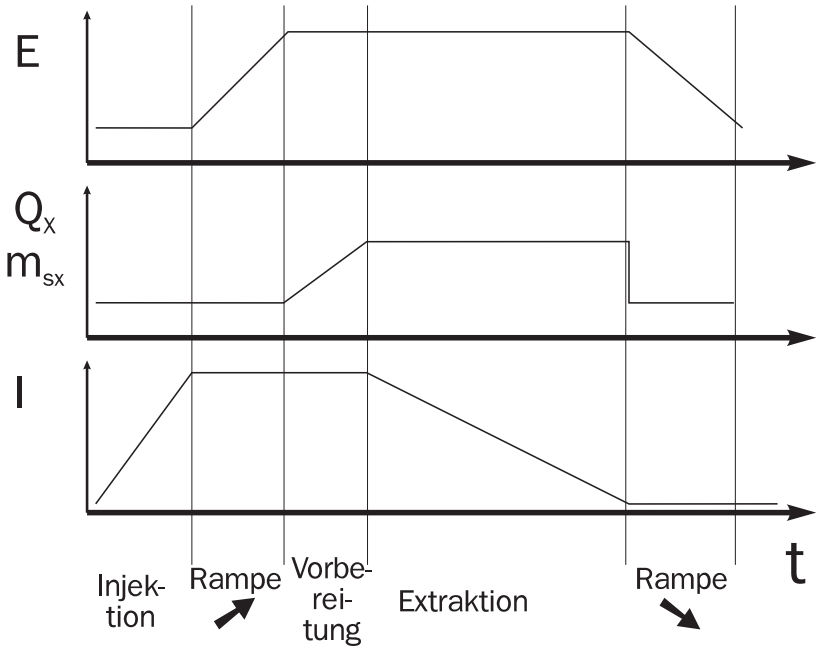


Abbildung 4.16: Langsame Extraktion im Nachbeschleunigungsmode

Im folgenden soll der Mechanismus dieser Extraktionsmethode diskutiert werden.

HF-Extraktion

Bis zur Einführung des neuen **ELSA**-Timing-Systems [Goetz94] [Picard94] war es aus technischen Gründen nicht möglich, im Nachbeschleunigungsmode eine Arbeitspunktrampe mit der für die Resonanzextraktion notwendigen zeitlichen Auflösung zu fahren.

Der oben beschriebene Extraktionsmode wurde vom Autor eingeführt, wobei jedoch vor Fertigstellung des neuen **ELSA**-Timingsystems die oben illustrierte Phaseneinteilung des Modes nicht durch das Timing-System vorgegeben, sondern durch geeignete Wahl der Rampen der beteiligten Elemente über die gesamte

[13] Die natürliche horizontale Strahlbreite $\sigma_x = \sqrt{\epsilon_{nat,x} \cdot \beta_x + (\frac{\Delta p}{p_0}_{nat} \cdot D)^2}$ wird vom Simulator für jede Ringposition berechnet.

Zyklusdauer erzeugt wurde. Die Ramperzeugung geschah mit dem Programmsystem EPOS [Goetz90] [Picard91]. Die ursprüngliche Idee war es, durch Reduktion der HF-Leistung die Quantenlebensdauer der umlaufenden Teilchen derart zu reduzieren, daß alle Teilchen innerhalb von einer Extraktionsperiode ausfallen. Durch Einstellung einer von Null verschiedenen Chromatizität verschiebt sich der Arbeitspunkt der Teilchen, die nach Verlassen des stabilen HF-Buckets im Mittel zunehmend Energie verlieren. Der Arbeitspunkt wird nahe des resonanten Arbeitspunkts gewählt. Durch Sextupole wird die drittelzahlige Resonanz angeregt, und die Chromatizität wird derart eingestellt, daß die Teilchen mit zunehmendem Energieverlust auf die Resonanz zulaufen. Wird durch die chromatizitätsbedingte Arbeitspunktänderung der resonante Arbeitpunkt erreicht, werden werden sie extrahiert.

Die Extraktionsmethode wurde mit Werkzeugen des neuen Timing- und **ELSA**-Kontrollsystems [Goetz94] [Picard94] weiterentwickelt, und es können zur Zeit Extraktionszeiten von einer Minute für Taggingexperimente und Extraktionsströme von 4 nA für einige Sekunden für das Experiment ELAN mit einer Extraktionseffizienz von bis zu 50% zur Verfügung gestellt werden.

Das wesentliche Kennzeichen dieses Extraktionsprozesses sollte seine Gleichmäßigkeit sein, da der Teilchenverlust bei endlicher Quantenlebensdauer auf den stochastischen Prozeß der Abstrahlung von Synchrotronlicht zurückzuführen ist. Dieses Kriterium erfüllt die eingestellte Extraktion auch; das von SAPHIR gemessene Tastverhältnis während der Extraktionsphase ist größer als 70%.

Mit den verbesserten Diagnosemöglichkeiten des neuen **ELSA**-Kontrollsystems genommene Daten ließen jedoch Zweifel an der dargestellten Erklärung des Extraktionsprozesses aufkommen.

Insbesondere ist der eingestellte Arbeitspunkt der Synchrotronschwingung während der Extraktionsphase in der Größenordnung von $Q_\sigma = 0.05$ bei einer Strahlenergie von $E_0 = 2.2\ GeV$, was einer Spannung von $V_0 = 1\ MV$ pro PETRA-Resonator und damit einem Überspannungsfaktor von $q \simeq 10$ entspricht. Die Energieakzeptanz des longitudinalen Buckets ist bei dieser HF-Spannung um einen Faktor von ca. 10 höher, als die natürliche Energiebreite des Strahls, so daß die Quantenlebensdauer keine Beschränkung für die Strahllebensdauer darstellt. Zudem ist der Strahlausfall von der Einstellung transversal wirkender Maschinenelemente abhängig. So ist bei bestimmten Arbeitspunkteinstellungen nur Strahlausfall bei eingeschalteten Sextupolen zu beobachten. Wegen dieser Abhängigkeit von der transversalen Optik kommt für den dargestellten Extraktionsmode ein rein longitudinales Ausfallen der Teilchen nicht in Frage. Es muß also nach einem alternativen Extraktionsmechanismus gesucht werden. Im folgenden sollen mögliche Mechanismen untersucht werden.

Reine drittelzahlige Resonanzextraktion

Die Teilchen gehen also beim vorgestellten Extraktionsprozeß nicht rein longitudinal verloren. Der einfachste Mechanismus zur Erklärung der Extraktion ist die reine drittelzahlige Resonanzextraktion. Der bei der Extraktion eingestellte Arbeitspunkt ist $Q_x \simeq 4.631$, die Stärke der Extraktionssextupole ist $m_{sf} \simeq 0.9\ m^{-3}$. Die sich mit diesen Einstellungen ergebende Separatrix ist in Abbildung 4.17 dargestellt.

Die Fläche der Separatrix ist um einen Faktor von ca. 100 größer als die natürliche horizontale Emittanz, wobei bei der Berechnung dieser Emittanz die Strahlverbreiterung durch Dispersion berücksichtigt ist. Hierbei ist zu beachten, daß der Teilchenstrahl im Nachbeschleunigungsmode bei der hohen Energie abgedämpft ist, so daß Effekte des *Hollow Beam* (siehe 4.3.1) nicht berücksichtigt werden müssen. Die abgedämpfte Teilchenverteilung hat als Breite die natürliche Emittanz, falls nicht zusätzliche Effekte eine Strahlverbreiterung bewirken.

Für hohe Strahlintensitäten nimmt die Strahlbreite zu. So könnte bei der im beschriebenen Extraktionsmode vorliegenden Anfangsintensität von ca. 50 mA die Strahlbreite größer als die natürliche Strahlbreite sein. In einem solchen Fall müßte beim Einstellen einer Separatrixbreite kleiner der Strahlbreite ein Teil des Strahls instantan ausfallen, während der restliche Teil des Strahls weiterhin stabil umlaufen würde. Jedoch ist im beschriebenen Extraktionsmode nach Setzen des Arbeitspunkts und der Sextupole zur Resonanzanregung ein langsamer Strahlausfall über einige Sekunden zu beobachten, ohne daß zusätzlich eine Rampe gefahren wird. Dabei könnte der Extraktionsprozeß durch die intensitätsabhängige Änderung des Arbeitspunkts aufrecht erhalten werden. Jedoch sinkt der horizontale Arbeitspunkt mit abfallender Intensität leicht, so daß sich der Arbeitspunktabstand von der Resonanz ohne zusätzliche Rampe erhöht, und die intensitätsabhängige Arbeitspunktänderung also den Extraktionsprozeß stoppt.

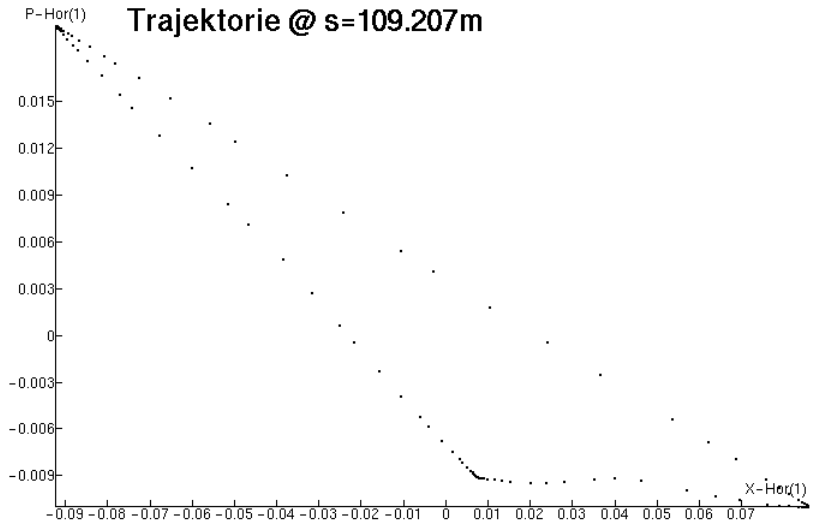


Abbildung 4.17: Langsame Extraktion im Nachbeschleunigungsmode

Koppelresonanzen

Nachdem rein longitudinaler Teilchenausfall und einfache drittelzahlige Resonanz als Extraktionsmechanismen mit hoher Wahrscheinlichkeit ausgeschlossen werden können, bleiben Koppelresonanzen als Mechanismus der Extraktion übrig.

Die Hypothese der Koppelresonanzen wird dadurch gestärkt, daß sich bei eingeschalteten Extraktionssextupolen Arbeitspunktwerte zwischen $Q_x = 4.631$ und $Q_x = 4.666$ finden lassen, bei denen der Strahl stabil ist.

Der Simulator findet für **ELSA** zwei Arten von Koppelresonanzen. Zum einen die transversalen Koppelresonanzen $Q_x + 2Q_z = 14$ und $2Q_z - Q_x = 4$, zum anderen Seitenresonanten zu den transversalen Resonanzen, die aus der durch die Synchrotronschwingung hervorgerufenen Phasenmodulation resultieren (siehe S. 39). Diese Seitenresonanzen werden im folgenden als *Synchrotronsatelliten* bezeichnet.

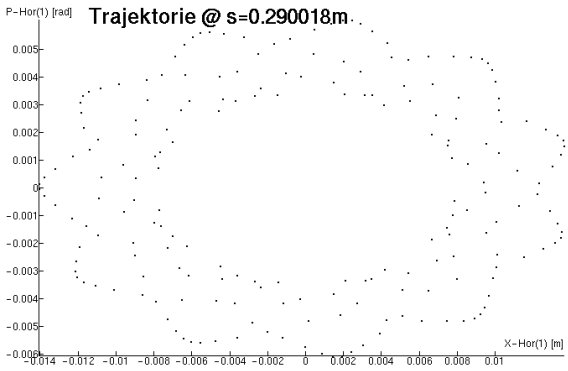
Bei allen Koppelresonanzen ist zu beachten, daß der horizontale Phasenraum nicht mehr als Poincaréschnitt betrachtet werden kann, die invarianten Tori schneiden den horizontalen Phasenraum nicht im rechten Winkel. Das hat zur Folge, daß die Trajektorien in diesem Phasenraum auch unter konservativen Kräften nicht länger überschneidungsfrei sind. Dies erschwert zum einen die Interpretation von Meßdaten, da aus dem horizontalen Phasenraumbild die Art der Resonanz nicht eindeutig erkennbar ist. Zum anderen hat ein solcher Prozeß keine im horizontalen Phasenraum ortsfesten auslaufenden Trajektorien, die Teilchen kommen im horizontalen Phasenraum "überall" heraus.

Die gefundenen transversalen Koppelresonanzen werden von den Sextupolen in **ELSA** angeregt. Das Bild der Koppelresonanz $Q_x + 2Q_z = 14$ im Phasenraum zeigt Abbildung 4.18.

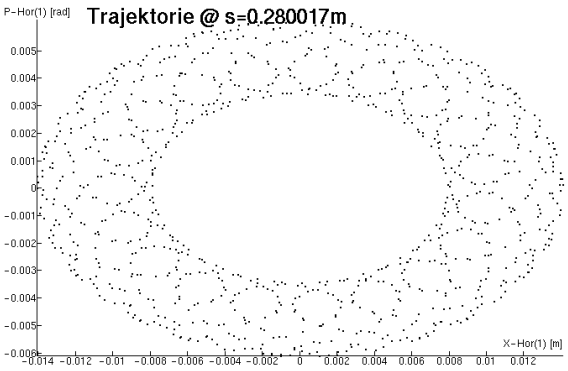
Teilchen im inneren Bereich bewegen sich auf einem Band um den Ursprung, dessen Breite durch die Abweichung der Form der Separatrix vom Kreis gegeben ist. Bei Betrachtung weniger Umläufe ist eine elfzahlige Struktur zu sehen. Diese rührt daher, daß der horizontale Arbeitspunkt $Q_x = 4.631$ in der Nähe eines elftelzahligen Arbeitspunkts $Q_x = \frac{51}{11} = 4.636$ liegt.[14] Die elfzahlige Struktur ist damit nicht notwendigerweise mit der Koppelresonanz verbunden und nur durch die zufällige Lage von Q_x und Q_z bedingt. Sie kann nicht zur Identifikation der Resonanz herangezogen werden. Bei höheren Umlaufzahlen verschmiert die Phasenraumfigur zu einem Band.

Im äußeren Bereich laufen die instabilen Teilchen auf gebogenen Trajektorien nach außen. Wiederum ist die elfzahlige Struktur zu sehen. Jedoch hängt der Drehwinkel der gezeigten Figur von den Anfangsbedingungen des verfolgten Teilchens ab. Damit gelangen die verschiedenen Teilchen nicht auf gleichen Bahnen im horizontalen Phasenraum nach außen, sondern werden in alle Richtungen frei. Da das ein-

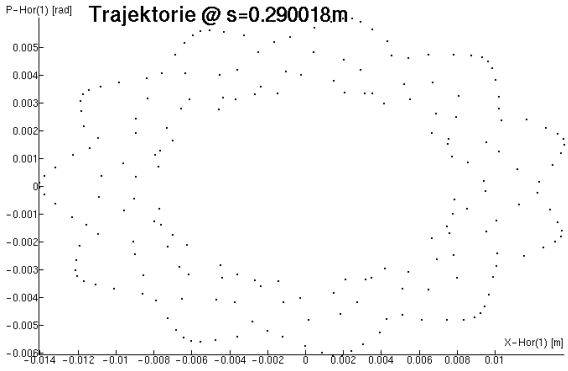
[14] Zum bei der Simulation gewählten fraktionellen Arbeitspunkt von $q = 0.6324$ ist $\frac{7}{11}$ die beste Annäherung mit Brüchen $\frac{m}{n}$ und $n < 19$.



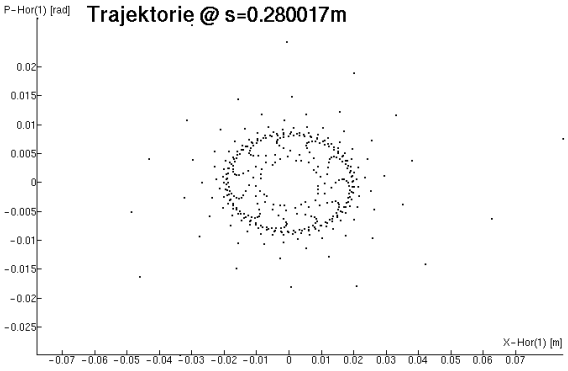
(a) Trajektorie horizontal innen, 200 Umläufe



(b) Trajektorie horizontal innen, 1000 Umläufe

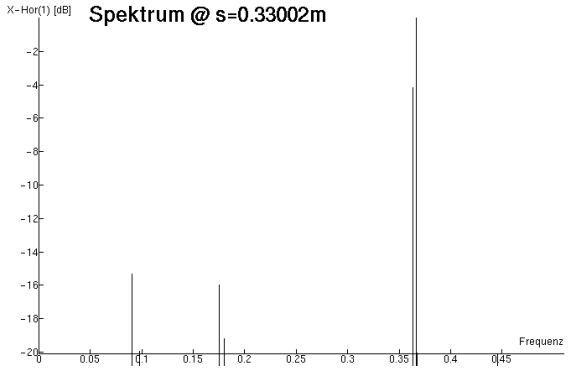


(c) Trajektorie vertikal innen, 200 Umläufe

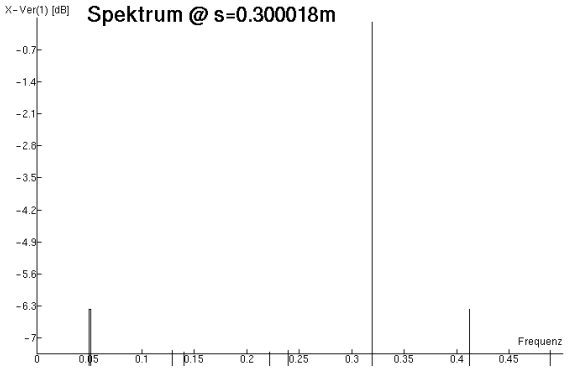


(d) Trajektorie horizontal außen, 200 Umläufe

Abbildung 4.18: Resonanz $Q_x + 2Q_z = 14$ am Ort von D 1



(a) Spektrum horizontal



(b) Spektrum vertikal

Abbildung 4.19: Spektrum der Resonanz $Q_x + 2Q_z = 14$ am Ort von D 1

zelne Teilchen aber auf Grund der starken Krümmung der Separatrixäste innerhalb weniger Umläufe eine vollständige Umdrehung im Phasenraum macht, ist die Extraktionseffizienz am Septum trotzdem hoch, falls dieses die Aperturbegrenzung bildet. Jedoch ist die Extraktionseffizienz nicht optimal und die extrahierte Emittanz ist groß.

Charakteristisch für die Koppelresonanz ist ihr Spektrum. In Abbildung 4.19 ist das Spektrum der

Resonanz $Q_x + 2Q_z = 14$ im Frequenzbereich $0 \ldots 0.5$ in Einheiten der Umlauffrequenz dargestellt. Im horizontalen Spektrum tritt neben dem Q_x-Peak bei 0.369 nun auch ein Peak $2\cot Q_z$ bei 0.362 auf. Wegen des geringen Abstands der Frequenzlinien würde sich dies in einem gemessenen Spektrum als Aufspalten des Q_x-Arbeitspunktpeaks darstellen. Im vertikalen Spektrum sind neben dem vertikalen Q_z-Peak bei 0.319 zusätzlich Differenzfrequenzen $Q_z - nQ_x$ bei 0.05 (n=1) und 0.42 (n=2) zu beobachten.

Um die Resonanz $Q_x + 2Q_z = 14$ anzuregen, müßte der vertikale Arbeitspunkt in der Nähe des bei der Simulation verwendeten Arbeitspunkts von $Q_z = 4.6811$ sein. Eine exakte Messung von Q_z ist zur Zeit nicht möglich, vorläufige Messungen ergeben jedoch einen Wert von $Q_z = 4.54$, so daß diese Resonanz als Extraktionsmechanismus nicht in Frage käme. Eine endgültige Messung steht jedoch noch aus.

Des weiteren würde eine Extraktion über eine reine transversale Koppelresonanz, ähnlich wie im Falle der rein drittelzahligen Resonanz, zu einem plötzlichen Teilchenausfall führen, statt zu einem ohne Rampe langanhaltenden Extraktionsprozeß. Experimentell ist eine Auswirkung von Q_z auf die Form des extrahierten Stromes festzustellen, jedoch hat Q_z alleine keinen Einfluß auf den Wert von Q_x, bei dem der Teilchenausfall beginnt.

Die Koppelresonanz $2Q_z - Q_x = 4$ ist eine Differenzresonanz und daher gebunden. Sie kann daher keine Teilchenextraktion induzieren (siehe z.B. [Bengtsson], S. 51).

Zur Anregung einer Synchro-Betatron Resonanz muß die Resonanzbedingung $n_x Q_x + n_z Q_z + n_s Q_\sigma = p$ erfüllt sein. Die transversalen Resonanzen sind also von einem Band von Synchrotronsatelliten umgeben. Das Arbeitspunktdiagramm mit Synchrotronsatelliten bis zur dritten Ordnung der behandelten Resonanzen zeigt Abbildung 4.20. Der gemessene **ELSA**-Arbeitspunkt ist als kleines Viereck zu erkennen. Da

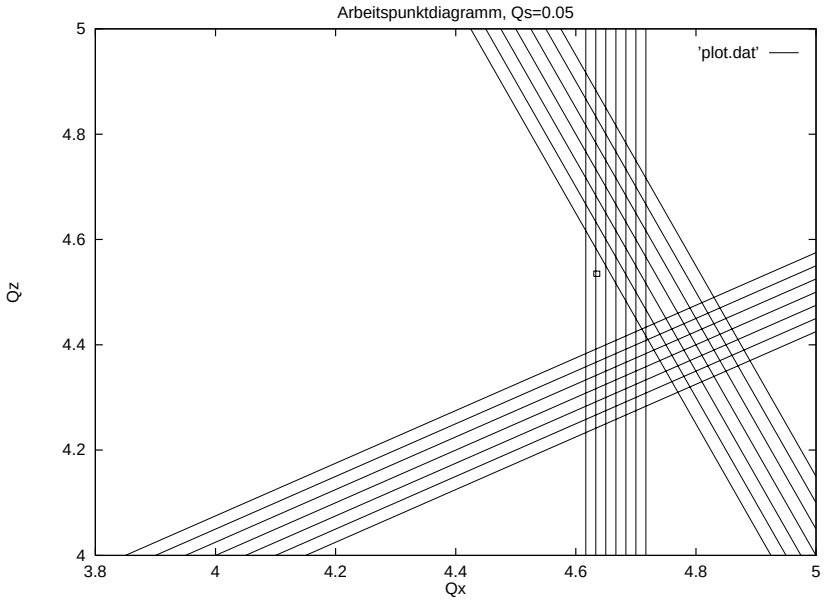


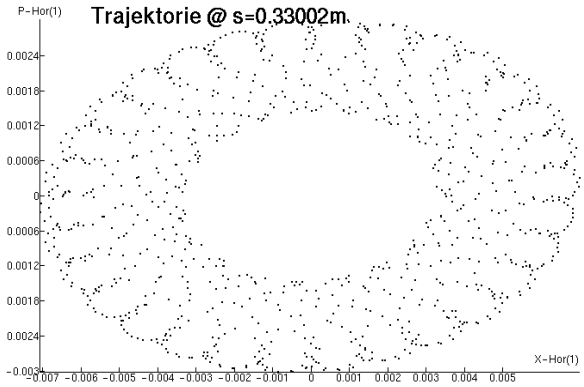
Abbildung 4.20: Arbeitspunktdiagramm

die Stärke der Koppelresonanz mit steigender Resonanznummer abnimmt, ist das Synchrotronseitenband mit der größten Resonanzstärke im Arbeitspunktdiagramm die Resonanz:

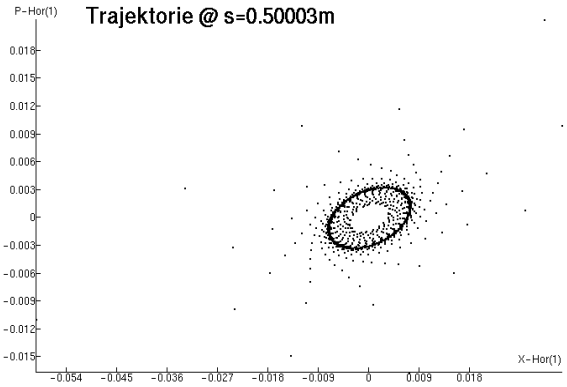
$$3Q_x + 2Q_\sigma = 14.$$

Die Resonanzbedingung für die angegebene Synchro-Betatron-Resonanz ist in guter Näherung erfüllt. Des weiteren ist auch Strahlausfall zu beobachten, wenn man im horizontalen Arbeitspunkt jeweis $\Delta Q_x = \frac{Q_\sigma}{3} \simeq 0.017$ fortschreitet.

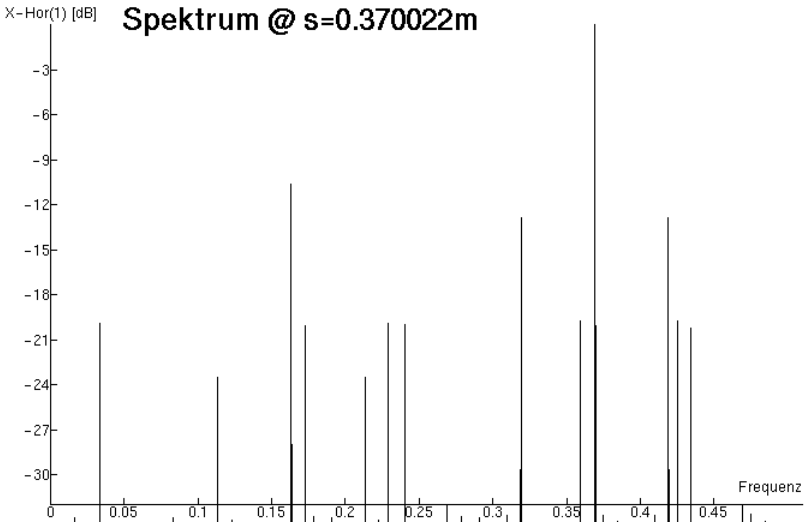
Das Bild der Resonanz zeigt Abbildung 4.21. Wiederum ist die elfzahlige Struktur der auslaufenden Trajektorie nur zufällig und rührt daher, daß der zur Simulation gewählte Arbeitspunkt von $Q_x = 4.6324$ in der Nähe von $Q_x = 4 + \frac{7}{11} = 4.63636$ liegt. Im Spektrum der Resonanz treten neben dem horizontalen Arbeitspunkt bei Q_x weitere Frequenzlinien hervor. Die wichtigsten Frequenzlinien sind in Tabelle 4.10 identifiziert. Da durch die $Q_x - Q_\sigma$-Kopplung ein Energieaustausch zwischen longitudinaler und



(a) Trajektorie innen



(b) Trajektorie aussen



(c) Horizontales Spektrum

Abbildung 4.21: Resonanz $3Q_x + 2Q_\sigma = 14$ am Ort von D 1

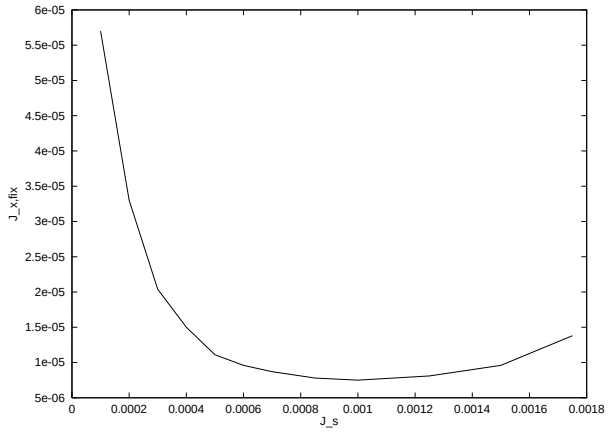


Abbildung 4.22: Horizontale Fixpunktemittanz gegen Amplitude der Synchrotronschwingung

horizontaler Bewegung stattfindet, und die dadurch angeregte Energieschwingung sich transversal als Phasenmodulation äußert, entstehen zu jeder Frequenzlinie Seitenbänder im Abstand des Arbeitspunkts der Synchrotronschwingung Q_σ. Diese Seitenbänder sind auch an einem Ort ohne Dispersion zu beobachten. Das in Abbildung 4.21 gezeigte Spektrum ist am Ort von Quadrupol D 1 erzeugt, wo die Dispersion mit wenigen Zentimetern verschwindend klein ist.

Peak	Freq [f_{ref}]	Höhe [dBm]
Q_x	0.370	0
$Q_x + Q_\sigma$	0.42	-13
$Q_x - Q_\sigma$	0.32	-13
$2Q_x - 2Q_\sigma$	0.162	-10

Tabelle 4.10: Linien im horizontalen Spektrum von $3Q_x + 2Q_\sigma = 14$

Die intensitätsbedingte Arbeitspunktänderung beim beschriebenen Extraktionsmode kann dabei auf Grund der Schmalheit dieser Resonanz zu einer signifikanten Änderung des Resonanzverhaltens führen. Bei einer Strahlintensität zu Beginn der Extraktionsphase von 50 mA, geleerter Maschine am Ende und einer Teilchenenergie von 2.2 GeV während der Extraktionsphase ist die Arbeitspunktänderung, anhand von im Rahmen der vorliegenden Arbeit und in [Goetz94] [Picard94] durchgeführten Messungen, mit ca. $\Delta Q_{x,intens} \simeq 0.005$ abzuschätzen. Dies liegt in der Größenordnung des anfänglichen Abstands von Q_x zur Resonanz [Goetz94].

Die Fixpunktemittanz der Synchro-Betatron-Resonanz ist abhängig von der Amplitude der Energieschwingung (siehe 2.2.1). Abbildung 4.22 zeigt die horizontale Emittanz der Fixpunkte $J_{x,fix}$ in Abhängigkeit von der Amplitude der Synchrotronschwingung J_σ. Man sieht deutlich das Abfallen der Emittanz des horizontalen Fixpunkts zu $J_s = 0.001m\ rad$ hin.

Diese von der longitudinalen Emittanz der Teilchenbewegung abhängige Separatrixgröße könnte auch der Schlüssel zum Verständnis des beobachteten langsamen Teilchenausfalls sein. Die ausfallende Teilchenrate $\dot{N}$ ist proportional zur Anzahl der Teilchen an der Separatrix. Bei Annäherung des horizontalen Arbeitpunkts an eine reine transversale Resonanz werden zuerst Teilchen mit $J_\sigma = 0$ von der Resonanz erfaßt, also Teilchen am Ort der größten Dichte im longitudinalen Phasenraum. Bei Annäherung an eine Synchro-Betatron-Resonanz werden zunächst Teilchen mit $J_\sigma = J_{\sigma,max}$ instabil, also im auslaufenden Schwanz der longitudinalen Teilchenverteilung. Damit wird ein wesentlich kleinerer Anteil der Teilchenverteilung von der Resonanz erfaßt, als im Falle der rein transversalen Resonanz. Mit dieser feineren Auswahl der in die Resonanz laufenden Teilchen spielen natürlich auch die im Elektronenbeschleuniger immer vorhandenen Fluktuationen der Impulse eine größere Rolle als bei der reinen Resonanzextraktion, so daß die Teilchendrift innerhalb der Impulsverteilung auf Grund der Synchrotronstrahlung hier die gleichmäßige Extraktion erklären könnte.

Der genaue Ablauf des Extraktionsprozesses bei **ELSA** muß jedoch nach Etablierung der durch das neue Kontrollsystem [Goetz94][Picard94] erweiterten Diagnosemöglichkeiten weitergehend untersucht werden, um eine endgültige Aussage machen zu können.

Zusammenfassung

Ein Programm zur Simulation der Teilchenbewegung im Beschleuniger wurde erstellt, das die für die Betriebsmodi von **ELSA** wesentlichen physikalischen Effekte erfaßt. Durch eine der Problemstellung angepaßten Auswahl der Berechnungsalgorithmen und Aufteilung der Berechnungsschritte konnte die zur Simulation benötigte Rechenzeit auf ein zur Verwendung des Simulators während des Strahlbetriebs akzeptables Maß reduziert werden. Der Simulator ist graphikorientiert und interaktiv bedienbar. Die Ergebnisse werden in einer Form dargestellt, die unmittelbar mit den Ergebnissen der Diagnosemessungen vergleichbar ist. Eine Anbindung des Simulators an das neue **ELSA**-Kontrollsystem ermöglicht es, bei Berechnungen jederzeit aktuelle Maschinenparameter zu berücksichtigen. Ferner wurde eine Version des Simulators erstellt, die allein zur Generation von Simulationsdaten für das Kontrollsystem dient und damit unmittelbar dem Physiker beim Einstellen der Maschine zugute kommt. Zusammen mit dem neuen **ELSA**-Kontrollsystem konnte das Konzept der Vereinheitlichung von Kontrolle, Diagnose und Simulation damit weitgehend verwirklicht werden. Der Simulator wurde neben seiner Verwendung an **ELSA** auch für den Einsatz bei **COSY** vorbereitet.

Die Ergebnisse des Simulators wurden anhand von etablierten Optikprogrammen verifiziert. Meßresultate an **ELSA** sind in guter Übereinstimmung mit Ergebnissen des Simulators. Erste Anwendungen des Simulators geben Hinweise auf den genauen Ablauf von Extraktionsprozessen und Möglichkeiten zu ihrer Optimierung.

Anhang A

Anhang

A.1 Fokker-Planck-Gleichung

Sei $\rho(p,t_0)$ die Ausgangsverteilung der Teilchen nicht von der Koordinate x abhängig und $P(p,\Delta p,t,\Delta t)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen mit Impuls p innerhalb der Zeit Δt zum Impuls $p+\Delta p$ übergeht. Dann ergibt sich die Entwicklung der Teilchenverteilung als:

$$\rho(p,t_0+\Delta t)=\int \rho(p-\Delta p,t_0)\ P(p-\Delta p,\Delta p,t,\Delta t)\ d\Delta p.$$

Für schwache stochastische Kräfte, die nur einen kleinen Sprung in der Teilchenverteilungsfunktion bewirken können, kann der Integrand $\rho\cdot P$ bezüglich des ersten Arguments von ρ und P um p nach Δp entwickelt werden:

$$\begin{aligned}\rho(p,t_0+\Delta t) &= \int [\rho(p,t_0)P(p,\Delta p,t_0,\Delta t)+\\ &\quad \Delta p\frac{\partial}{\partial p}(\rho(p,t_0)P(p,\Delta p,t_0,\Delta t))+\\ &\quad \Delta p^2\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial p^2}(\rho(p,t_0)P(p,\Delta p,t_0,\Delta t))+\ldots]d\Delta p.\end{aligned}$$

Mit $\int P(p,\Delta p,t,\Delta t)d\Delta p=1$ und $\int(\Delta p)^m P(p,\Delta p,t_0,\Delta t)=<(\Delta p)^m>$ ergibt sich:

$$\rho(p,t_0+\Delta t)=\rho(p,t_0)+\frac{\partial}{\partial p}\left(\rho(p,t_0)<\Delta p>\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\left(\rho(p,t_0)<(\Delta p)^2>\right).$$

Mit: $A_m=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{<(\Delta p)^m>}{\Delta t}$ ergibt sich die Fokker-Planck-Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(p,t)=\frac{\partial}{\partial p}\left(\rho(p,t_0)A_1(t)\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\left(\rho(p,t_0)A_2(t)\right).$$

Hierbei ist jedoch der Limes $\lim_{\Delta t\to 0}$ aus den oben genannten Gründen so zu verstehen, daß Δt immer eine hinreichende Zahl von Umläufen der hamiltonischen Bewegung enthält, um die Annahme einer Gleichverteilung in x zu rechtfertigen.

A.2 Feldvektor für verschiedene optische Elemente

Die in der Hamiltonfunktion vorkommenden Ausdrücke für das Vektorpotential können aus den elektrischen und magnetischen Feldern hergeleitet werden, indem bei vorgegebenen Feldern die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}\Phi-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A},\\ \vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A}\end{aligned}$$

gelöst werden [Ripken]. Auf Grund der Eichinvarianz können verschiedene Felder $\vec{A}$ gewählt werden, die die gewünschten $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder erzeugt. Es soll $\vec{A}$ so gewählt werden, daß $\Phi = 0$ ist.

Im weiteren wird davon ausgegangen, daß das Teilchen einen Impuls von p_0 hat, der sich beim Durchlaufen des Beschleunigerelementes nicht oder nur unwesentlich ändert. Mit diesen Bedingungen können die Felder der optischen Elemente berechnet werden (vergleiche [Ripken]).

Dipol

Für einen entkoppelten Dipol mit $\frac{1}{\rho_x}+\frac{1}{\rho_z} \neq 0, \frac{1}{\rho_x \rho_z} = 0$ gilt: $\frac{eB_z}{cp_0} = \frac{1}{\rho_x}$, $\frac{eB_x}{cp_0} = -\frac{1}{\rho_z}$. Dies ist zu erreichen durch:

$$\begin{aligned} \phi_{Dip} &= 0, \\ \frac{e}{cp_0}\vec{A}_{Dip} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}(1+\frac{x}{\rho_x}+\frac{z}{\rho_z}) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Quadrupol

Im Quadrupol ist $\vec{B}$ gegeben als $B_x = z\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)_{x=z=0}, B_z = x\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)_{x=z=0}$. Dies ist durch:

$$\begin{aligned} \phi_{Quad} &= 0, \\ \frac{e}{cp_0}\vec{A}_{Quad} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}k_0(z^2-x^2) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

zu erreichen, wobei $k_0 = \frac{e}{cp_0}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)_{x=z=0}$.

Sextupol

Im Sextupol ist die Feldverteilung als $B_x = x \cdot z\left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\right)_{x=z=0}, B_z = \frac{1}{2}(x^2-z^2)\left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\right)_{x=z=0}$ gegeben. Dies ist durch:

$$\begin{aligned} \phi_{Sext} &= 0, \\ \frac{e}{cp_0}\vec{A}_{Sext} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{6}m_0(x^3-3xz^2) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

zu erreichen, wobei $m_0 = \frac{e}{cp_0}\left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\right)_{x=z=0}$.

Höhere Multipole

Das Potential höherer Multipole kann aus der Entwicklung von A_s in Phasenraumkoordinaten x, z bestimmt werden. Dabei ist:

$$\frac{e}{cp_0}A_s = -\sum_n \frac{a_n}{n!}(x+iz)^n.$$

Das Feld des Multipols eines Multipols mit der Polzahl $2n$ läßt sich aufspalten in den normalen Anteil, bei dem das Feld normal zur Bahnebene des Teilchens ist und einen skew-Anteil, bei dem das Feld relativ zur Bahnebene gekippt ist. Mit $N = \frac{n+1}{2} + (n+1) \bmod 2$ ist der normale Anteil des Multipols mit der Polzahl $2n$:

$$\begin{aligned} \frac{e}{cp_0}A_{2n,norm} &= -\frac{a_n}{n!}\Re(x+iz)^n \\ &= -\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{N}\begin{pmatrix} N \\ 2m \end{pmatrix}(-1)^m x^{2N-2m}z^{2m}. \end{aligned}$$

Insbesondere gibt es also immer einen reinen Term in x^n, jedoch nur für gerades n einen reinen z^n-Term, während für ungerades n z nur in Kopplung mit x auftritt.

Mit $N' = \frac{n+1}{2}$ ist der skew-Anteil des $2n$-Multipols:

$$\begin{aligned}\frac{e}{cp_0}A_{2n,skew} &= -\frac{a_n}{n!}\Im(x+iz)^n \\ &= -\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{N'}\left(\begin{array}{c} N' \\ 2m+1 \end{array}\right)(-1)^m x^{N'-2m-1}z^{2m+1}.\end{aligned}$$

Beim skew-Anteil des Multipoles treten also nur Kopplungsterme der Phasenraumebenen auf.

Resonator

Im Resonator ist die Feldverteilung als $E_s = V(s)\sin(\frac{2\pi k}{L}\sigma + \phi_0)$ gegeben, wobei L die Ringlänge, k die Harmonischenzahl und $V(s)$ die Feldstärke im Resonator ist. Dies ist zu erreichen durch:

$$\begin{aligned}\phi_{Cav} &= 0, \\ \frac{e}{cp_0}\vec{A}_{Cav} &= \left(\begin{array}{c} 0 \\ -w\cos(\frac{2\pi k}{L}\sigma + \phi_0) \\ 0 \end{array}\right),\end{aligned}$$

wobei $w = \frac{L}{2\pi k}\frac{e}{cp_0}V'(s)$ ist. Das Potential A_s kann um die Phase ϕ_0 entwickelt werden zu:

$$\frac{e}{cp_0}A_s = w\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2\pi k}{L}\right)^{2n-2}\left[\frac{\sigma^{2n-2}}{(2n-2)!}\cos(\phi_0) - \frac{\sigma^{2n-1}}{(2n-1)!}\frac{2\pi k}{L}\sin(\phi_0)\right].$$

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß für alle Beschleunigerelemente der Feldstärkevektor so gewählt werden kann, daß $\Phi = A_x = A_z = 0$ gilt.

A.3 Closed-Orbit-Beule mit vier Korrektoren

Seien β_n, μ_n die optischen Funktionen am Ort des Korrektors Kn und β_s, μ_s diejenigen am Ort, an dem Sollparameter der Beule erreicht werden sollen.

Ferner:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \mu_2 - \mu_1 \\ \phi_2 &= \mu_s - \mu_2 \\ \phi_3 &= \mu_3 - \mu_s \\ \phi_4 &= \mu_4 - \mu_3\end{aligned}$$

und $(x_s,\ x'_s)$ vorgegebener Ort und Winkel am Septum, so lassen sich daraus Winkel und Wirkung in einem normalisierten Phasenraum bestimmen:

$$\begin{aligned}J_s &= \sqrt{x_s^2/\beta_s + \beta_s(x'_s - \frac{\alpha_s}{\sqrt{\beta_s}}x_s)^2} \\ tan(\phi_s) &= \beta_s\frac{x'_s - \frac{\alpha_s}{\sqrt{\beta_s}}}{x_s}\end{aligned}$$

Die Kickstärken der Korrektoren im normalisierten Phasenraum $\hat{\theta}_n$ ergeben sich wie folgt:[1]

$$\hat{\theta}_1 = -J_s\frac{\cos(\phi_s - \phi_2)}{\sin(\phi_1)}$$

[1] Die angegebenen Gleichungen gelten nur für den Fall, daß die Korrektoren nach aufsteigender Phasenlage geordnet sind und daß der Ort des Septums zwischen den mittleren Korrektoren liegt.

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_2 &= J_s[\sin(\phi_s-\phi_2)+\frac{\cos(\phi_s-\phi_2)}{\tan(\phi_1)}] \\
\hat{\theta}_3 &= J_s[-\sin(\phi_s+\phi_3)+\frac{\cos(\phi_s+\phi_3)}{\tan(\phi_4)}] \\
\hat{\theta}_4 &= -J_s\frac{\cos(\phi_s+\phi_3)}{\sin(\phi_4)}
\end{aligned}
$$

Die Winkelsummen können nach dem Additionstheorem getrennt werden, die Kickstärken in Kickwinkel θ_n umgerechnet werden. Es ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\theta_1 &= -\sqrt{\frac{\beta_s}{\beta_1}}[\frac{x_s}{\beta_s}\frac{\cos(\phi_2)-\alpha_s\sin(\phi_2)}{\sin(\phi_1)}+x'_s\frac{\sin(\phi_2)}{\sin(\phi_1)}] \\
\theta_2 &= \sqrt{\frac{\beta_s}{\beta_2}}[\frac{x_s}{\beta_s}(\frac{\cos(\phi_2)-\alpha_s\sin(\phi_2)}{\tan(\phi_1)}-\sin(\phi_2)-\alpha_s\cos(\phi_2))+x'_s(\frac{\sin(\phi_2)}{\tan(\phi_1)}+\cos(\phi_2))] \\
\theta_3 &= \sqrt{\frac{\beta_s}{\beta_3}}[\frac{x_s}{\beta_s}(\frac{\cos(\phi_3)+\alpha_s\sin(\phi_3)}{\tan(\phi_4)}-\sin(\phi_3)+\alpha_s\cos(\phi_3))-x'_s(\frac{\sin(\phi_3)}{\tan(\phi_4)}+\cos(\phi_3))] \\
\theta_4 &= \sqrt{\frac{\beta_s}{\beta_4}}[-\frac{x_s}{\beta_s}\frac{\cos(\phi_3)+\alpha_s\sin(\phi_3)}{\sin(\phi_4)}+x'_s\frac{\sin(\phi_3)}{\sin(\phi_4)}]
\end{aligned}
$$

Es stellt sich heraus, daß die Korrektorwinkel in linearer Abhängigkeit vom vorgegebenen Ort und Winkel am Septum berechnet werden können.

A.4 Lineare Erzeugende und Transfermatrix für optische Elemente

Die lineare Hamiltonfunktion zur Beschreibung der Dispersionsfunktion, des Closed-Orbits und der Betatronschwingung für jede Ebene x, z, σ kann in die Standardform:

$$
H_{0,std} = \frac{1}{2}Fp_\xi^2 + R\xi p_\xi + \frac{1}{2}G\xi^2 + S\xi + Tp_\xi \tag{A.1}
$$

gebracht werden.[2] Mit:

$$
A = \begin{pmatrix} R & F & T \\ -G & -R & -S \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

gilt auf Grund der hamiltonischen Bewegungsgleichung:

$$
\frac{\partial}{\partial s}\begin{pmatrix} \xi \\ p_\xi \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \xi \\ p_\xi \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{A.2}
$$

Da im Beschleuniger das Magnetfeld innerhalb eines Elementes als konstant angenommen wird, sind die Koeffizienten R, F, G, S, T innerhalb eines Elementes ebenfalls konstant. Damit kann innerhalb eines Beschleunigerelementes Gleichung (A.2) durch den Ansatz:

$$
\begin{pmatrix} \xi \\ p_\xi \\ 1 \end{pmatrix}(s) = e^{A\cdot l}\begin{pmatrix} \xi \\ p_\xi \\ 1 \end{pmatrix}(s_0),
$$

mit $l = s - s_0$ gelöst werden. Die Matrix A hat damit die Rolle einer Erzeugenden der Matrix $M = \exp(A \cdot l)$, ihre Koeffizienten können leicht aus den Feldern der betrachteten Beschleunigerelemente abgelesen werden.

[2] Der hier vorgestellte Formalismus stellt eine Erweiterung zu dem in [Barber86] S.10 ff. vorgestellten dar.

Das angegebene Verfahren führt zu einer konsistenten Lösung für ξ, p_ξ für jedes s, auch innerhalb eines Beschleunigerelementes.

Die Matrix M läßt sich berechnen. Mit $\alpha = \sqrt{R^2 - FG}$ gilt:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{R}{\alpha}\sinh(\alpha l) + \cosh(\alpha l) & \frac{F}{\alpha}\sinh(\alpha l) & \frac{FS-RT}{\alpha^2}(1-\cosh(\alpha l)) + \frac{T}{\alpha}\sinh(\alpha l) \\ -\frac{G}{\alpha}\sinh(\alpha l) & -\frac{R}{\alpha}\sinh(\alpha l) + \cosh(\alpha l) & \frac{GT-RS}{\alpha^2}(1-\cosh(\alpha l)) - \frac{S}{\alpha}\sinh(\alpha l) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

Diese Form der Matrix ist für alle Werte A, l gültig. Speziell gilt jedoch für $R^2 - FG < 0$ und $\alpha' = \sqrt{-R^2 + FG}$, also $\alpha = i\alpha'$:[3]

$$M = \begin{pmatrix} \frac{R}{\alpha'}\sin(\alpha' l) + \cos(\alpha' l) & \frac{F}{\alpha'}\sin(\alpha' l) & -\frac{FS-RT}{\alpha'^2}(1-\cos(\alpha' l)) + \frac{T}{\alpha'}\sin(\alpha' l) \\ -\frac{G}{\alpha'}\sin(\alpha' l) & -\frac{R}{\alpha'}\sin(\alpha' l) + \cos(\alpha' l) & -\frac{GT-RS}{\alpha'^2}(1-\cos(\alpha' l)) - \frac{S}{\alpha'}\sin(\alpha' l) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\alpha = 0$ gilt:

$$M = \begin{pmatrix} 1 + Rl & Fl & \frac{RT-FS}{2}l^2 + Tl \\ -Gl & 1 - Rl & \frac{RS-GT}{2}l^2 - Sl \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Falls die Elementlänge $l_{elm} = 0$, jedoch $\lim_{l\to 0} G \cdot l \neq 0$ ("dünne Linse"), so gilt:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -G & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei vorausgesetzt wurde, daß $\lim_{l\to 0} F \cdot l = \lim_{l\to 0} R \cdot l = \lim_{l\to 0} S \cdot l = 0$.

Den kompletten Durchlauf durch das Element n beschreibt die Matrix $M_n = \exp(Al_{elm})$. Für Beschleunigerelemente $1, 2$ verschiedener Feldstärke, die in dieser Reihenfolge vom Strahl durchlaufen werden kann eine Gesamtmatrix $M_{1+2} = M_2 \cdot M_1$ erhalten werden. Die Multiplikation der Einzelmatrizen erfolgt also in umgekehrter Reihenfolge des Teilchendurchlaufs. Für einen Gesamtumlauf um den Beschleuniger mit N Elementen kann, startend an der Position 1, eine Umlaufmatrix M_{Ring} erhalten werden als:

$$M_{Ring} = M_N \cdot M_{N-1} \ldots M_1.$$

Periodische Lösung

Für ξ, p_ξ periodisch, wie es bei der Dispersionsfunktion und dem Closed-Orbit der Fall ist, können Startwerte $\xi_0, p_{\xi,0}$ aus der Periodizitätbedingung mit Hilfe der Ringmatrix M_{Ring} gewonnen werden:

$$\begin{pmatrix} \xi_0 \\ p_{\xi,0} \\ 1 \end{pmatrix} = M_{Ring} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ p_{\xi,0} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Seien m_{kl} die Matrixelemente von M_{Ring} sind, folgt:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{m_{12}m_{23} - (m_{22}-1)m_{13}}{(m_{11}-1)(m_{22}-1) - m_{12}m_{21}}, \\ p_{\xi,0} &= \frac{m_{13}m_{21} - (m_{11}-1)m_{23}}{(m_{11}-1)(m_{22}-1) - m_{12}m_{21}}. \end{aligned}$$

Aus den so berechneten Startwerten kann die Funktion $(\xi, p_\xi)(s)$ für den ganzen Beschleuniger errechnet werden.

Integrale Werte der periodischen Lösungen ergeben sich durch Integration der Transportmatrix:

$$\int \begin{pmatrix} \xi \\ p_\xi \end{pmatrix} ds = \int (M \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 \\ p_{\xi,0} \end{pmatrix}) ds = \left(\int ds\ M\right) \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 \\ p_{\xi,0} \end{pmatrix}.$$

[3] Moderne Programmiersprachen wie C^{++} lassen beim Aufruf von trigonometrischen- und algebraischen Funktionen komplexe Argumente zu, so daß sich der Programmierer nicht um das Vorzeichen auftretender Radikanten kümmern muß. In anderen Programmiersprachen muß die Fallunterscheidung bei der Implementation der Formeln explizit durchgeführt werden.

Das Integral der Transportmatrix (A.3) ist:

$$\int M = \begin{pmatrix} \frac{R}{\alpha^3}\cosh(\alpha l) - \frac{1+\sinh(\alpha l)}{\alpha} & \frac{F}{\alpha^2}(\cosh(\alpha l)-1) & \frac{FS-RT}{\alpha^2}(l-\frac{\sinh(\alpha l)}{\alpha}) + \frac{t}{\alpha^2}(\cosh(\alpha l)-1) \\ -\frac{G}{\alpha^2}(\cosh(\alpha l)-1 & -\frac{R}{\alpha^3}(\cosh(\alpha l)-1) - \frac{\sinh(\alpha l)}{\alpha} & \frac{GT-RS}{\alpha^2}(l-\frac{\sinh(l\alpha)}{\alpha}) - \frac{S}{\alpha^2}(\cosh(\alpha l)-1) \\ 0 & 0 & l \end{pmatrix}.$$

Für die Spezialfälle $\alpha < 0$ mit $\alpha' = i\alpha$ ergibt sich:

$$\int M = \begin{pmatrix} -\frac{R}{\alpha'^3}\cos(\alpha' l) - \frac{1+\sin(\alpha' l)}{\alpha'} & -\frac{F}{\alpha'^2}(\cos(\alpha' l)-1) & -\frac{FS-RT}{\alpha'^2}(l-\frac{\sin(\alpha' l)}{\alpha'}) - \frac{T}{\alpha'^2}(\cos(\alpha' l)-1) \\ \frac{G}{\alpha'^2}(\cos(\alpha' l)-1 & \frac{R}{\alpha'^3}(\cos(\alpha' l)-1) + \frac{\sin(\alpha' l)}{\alpha'} & -\frac{GT-RS}{\alpha'^2}(l-\frac{\sin(l\alpha')}{\alpha'}) + \frac{S}{\alpha'^2}(\cos(\alpha' l)-1) \\ 0 & 0 & l \end{pmatrix},$$

für $l = 0$:

$$\int M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

für $\alpha = 0$:

$$\int M = \begin{pmatrix} l + R\frac{l^2}{2} & F\frac{l^2}{2} & T\frac{l^2}{2} + (RT - FS)\frac{l^3}{6} \\ -G\frac{l^2}{2} & l - R\frac{l^2}{2} & -S\frac{l^2}{2} + (RS - GT)\frac{l^3}{6} \\ 0 & 0 & l \end{pmatrix}.$$

Nichtperiodische Lösung

Für $S = 0$ kann die nichtperiodische Lösung der der Hamiltonfunktion (A.1) zugeordneten Bewegungsgleichungen mit Hilfe der optischen Funktion einfach dargestellt werden. Dazu wird für die Teilchenbewegung der Ansatz (siehe [Courant], S. 11):

$$\begin{aligned} x(s) &= \sqrt{\epsilon\beta(s)}\cos(\mu(s) - \mu_0), \\ p(s) &= -\sqrt{\frac{\epsilon}{\beta(s)}}(\sin(\mu(s) - \mu_0) + \alpha(s)\cos(\mu(s) - \mu_0)) \end{aligned}$$

gemacht, wobei ϵ, μ_0 die Freiheitsgrade der Bewegung darstellen und α, β mit dem Umlauf periodische Funktionen sind.[4]

Differenzieren des Ansatzes und Elimination von μ, ϵ ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial s}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta'}{2\beta} + \alpha\mu' & \beta\mu' \\ \frac{\alpha' + \mu' + \alpha^2\mu'}{\beta} & -\frac{\beta'}{2\beta} - \alpha\mu' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}.$$

Durch Vergleich mit der Koeffizientenmatrix A ergibt sich, daß der gewählte Ansatz die der Hamiltonfunktion zugeordneten Bewegungsgleichungen löst, falls:

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\frac{1+\alpha^2}{\beta}F + \beta G, \\ \beta' &= 2(\beta R - \alpha F), \\ \mu' &= F/\beta. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Am Ort s_0 ist $\mu(s_0) = 0$. Daher ist:

$$\begin{aligned} x(s_0) &= \sqrt{\epsilon\beta(s_0)}\cos(\mu_0), \\ p(s_0) &= -\sqrt{\frac{\epsilon}{\beta(s_0)}}(-\sin(\mu_0) + \alpha(s)\cos(\mu_0)). \end{aligned}$$

[4] Die Setzung für μ_0 ist hierbei willkürlich.

Durch Auflösen dieser Gleichung nach $\cos(\mu_0), \sin(\mu_0)$ und Einsetzen in obige Formel kann die Abhängigkeit von den Anfangswerten μ_0, ϵ zu Gunsten der Anfangswerte $x(s_0), p(s_0)$ eliminiert werden. Es ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ p(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta(s_0)}}(\cos(\Delta\mu) + \alpha(s_0)\sin(\Delta\mu) & \sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}\sin(\Delta\mu) \\ \frac{(\alpha(s_0)-\alpha(s)}{\sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}}\cos(\Delta\mu) - \frac{(1+\alpha(s_0)\alpha(s)}{\sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}}\sin(\Delta\mu) & \sqrt{\frac{\beta(s_0)}{\beta(s)}}(\cos(\Delta\mu) - \alpha(s)\sin(\Delta\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(s_0) \\ p(s_0) \end{pmatrix},$$

wobei $\Delta\mu = \mu - \mu_0$ ist. Diese Matrixgleichung gilt zwischen beliebigen Orten s_0, s im Beschleuniger. Durch Vergleich der Koeffizienten mit Gleichung (A.3) können die optischen Funktionen mit Hilfe der Koeffizienten der Transportmatrix ausgedrückt werden. Zunächst können Anfangswerte für die optischen Funktionen aus der Ringmatrix gewonnen werden. Da für einen Umlauf $\beta(s) = \beta(s+L)\ldots$ gilt, ergeben sich die Anfangswerte der optischen Funktionen zu:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{|2m_{12}|}{\sqrt{2 - m_{11}^2 - 2m_{12}m_{21} - m_{22}^2}}, \\ \alpha_0 &= \frac{m_{11} - m_{22}}{2m_{12}}\beta_0, \\ \mu_0 &= 0, \end{aligned}$$

wobei m_{jk} die Koeffizienten der Ringmatrix sind.

Seien nun n_{jk} die Koeffizienten der Transportmatrix vom Ort s_0 zum Ort s, so kann mit Hilfe der optischen Funktionen am Ort s_0 diejenigen am Ort s ausgerechnet werden durch (siehe auch [Wille], S. 107):

$$\begin{aligned} \beta(s) &= n_{11}^2\beta_0 + 2n_{11}n_{12}\alpha_0 + n_{12}^2\gamma_0, \\ \alpha(s) &= -n_{11}n_{21}\beta_0 + (n_{11}n_{22} + n_{12}n_{21})\alpha_0 + n_{22}n_{12}\gamma_0, \\ \gamma(s) &= n_{21}n_{12}\beta_0 + 2n_{22}n_{21}\alpha_0 + n_{22}^2\gamma_0, \\ \mu(s) &= \begin{cases} \beta_0 n_{12} \text{ für } \alpha_0 = \alpha(s) = 0, \\ \arctan\left(\frac{n_{12}}{\left(\frac{\alpha(s)\beta_0 n_{11} + \alpha_0\beta(s)n_{22}}{\alpha_0 + \alpha(s)}\right)}\right). \end{cases} \end{aligned}$$

wobei die Bezeichnung $\gamma = \frac{1+\alpha^2}{\beta}$ eingeführt wurde. Es ist darauf zu achten, daß der Unterschied zwischen s_0 und s nicht zu einem Phasenunterschied $\mu > \pi$ führt, da sonst die arctan()-Funktion uneindeutig wird. Mit Hilfe der Vorzeichen von Zähler und Nenner des Arguments des arctan() kann unterschieden werden, in welchem Quadranten im Bereich $-\pi, \pi$ der Phasenvorschub μ liegt.[5] In der Praxis sollte eine Elementlänge als Unterschied zwischen s_0, s nicht überschritten werden.

A.5 Longitudinale Teilchenbewegung

Die longitudinale Teilchenbewegung im Beschleuniger wird für ultrarelativistische Teilchen durch die Hamiltonfunktion:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma_0^2} - K_x(s)D_x(s)\right)p_\sigma^2 - \frac{c\beta_0}{\omega_{HF}}\frac{eV'(s)}{p_0}(\cos(\frac{\omega_{HF}}{\beta_0 c}\sigma + \phi_0) - \cos(\phi_0)) + C_1\sigma(K_x(s)^2 + K_z(s)^2)$$

beschrieben (siehe Text S. 27). Die Bezeichnungen sind dabei:

$K_{x,z}(s)$	:	$1/\rho$ Dipolstärke (horizontal und vertikal),
β_0	:	Sollgeschwindigkeit der Teilchen bezüglich der Lichtgeschwindigkeit,
γ_0	:	E_0/m Vielfaches der Teilchenenergie bezüglich der Teilchenmasse,
$D_x(s)$	:	Dispersionsfunktion horizontal,
σ	:	$s - t\beta_0 c$ Abweichung der Teilchenposition von der Sollposition,

[5] Insbesondere im longitudinalen Phasenraum können unterhalb der Transitionsenergie lokal negative Phasenvorschübe auftreten.

$$
\begin{aligned}
p_\sigma &: \frac{\Delta E}{E_0} \text{ Longitudinaler Impuls,} \\
V'(s) &: \frac{dV(s)}{ds} \text{ Ableitung der HF-Spannung nach der Umlauflänge } s, \\
\phi_0 &: \text{Stabile Phase (Phasenwinkel des Sollteilchens) ,} \\
p_0 &: \text{Sollimpuls des Teichens,} \\
\omega_{HF} &: \text{Kreisfrequenz der HF,} \\
C_1 &: \frac{2}{3} r_e \gamma_0^3.
\end{aligned}
$$

Stabil umlaufende Teilchen schwingen dabei um einen Gleichgewichtszustand, bei dem der lineare Term in σ bei der Entwicklung von H im Mittel verschwindet:

$$
\underbrace{\oint ds e V'(s) \sin(\phi_0)}_{\text{Aufgenommene Energie}} = \underbrace{\oint ds C_1 (K_x(s)^2 + K_z(s)^2)}_{\text{Abgestrahlte Energie pro Umlauf}} = U_0
$$

Durch diese Bedingung wird die stabile Phase ϕ_0 festgelegt. Die sich einstellende Schwingung ist i.a. langsam gegen die Umlauffrequenz der Teilchen. Daher kann in guter Näherung statt H die über die Umlauflänge gemittelte Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$ betrachtet werden:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma_0^2} - \alpha\right) p_\sigma^2 - \frac{eV}{p_0} \frac{c\beta_0}{L\omega_{HF}} \left(\cos(\frac{\omega_{HF}}{c\beta_0}\sigma + \phi_0) - \cos(\phi_0)\right) + \frac{eV}{Lp_0}\sigma \sin(\phi_0) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma_0^2} - \alpha\right) p_\sigma^2 - \frac{U_0}{\sin(\phi_0)\beta_0 p_0 L} \frac{c}{\omega_{HF}} \left(\cos(\frac{\omega_{HF}}{\beta_0 c}\sigma + \phi_0) - \cos(\phi_0) + \frac{\omega_{HF}}{\beta_0 c}\sigma \sin(\phi_0)\right)
\end{aligned}
$$

wobei $\alpha = \frac{1}{L}\oint ds \frac{D_x}{\rho_x}$ der Momentum Compaction Faktor und L die Ringlänge und $\phi = \frac{\omega_{HF}}{c}\sigma$ die Phasenverschiebung zwischen HF und dem umlaufenden Teilchen ist. Es wurde die Bedingung der Phasenstabilität eingesetzt.

A.5.1 Kleine Auslenkungen

Für kleine Auslenkungen in σ (d.h.: $\frac{\omega_{HF}}{c}\sigma \ll 1$) müssen nur Terme bis zur 2. Ordnung von $\mathcal{H}$ berücksichtigt werden. Es stellt sich eine harmonische Schwingung ein, die sogenannte Synchrotronschwingung. Die Frequenz dieser Schwingung, bezogen auf die Umlauffrequenz, wird als Synchrotronarbeitspunkt Q_σ bezeichnet und ist gegeben als:

$$
\begin{aligned}
Q_\sigma &= \sqrt{\frac{eV\cos(\phi_0)}{\beta_0^2 p_0 c} \frac{(\alpha - \frac{1}{\gamma_0^2})k}{2\pi}} \\
&= \sqrt{\frac{(\alpha - \frac{1}{\gamma_0^2})k}{2\pi\beta_0^2 p_0 c} \sqrt{(eV)^2 - U_0^2}}
\end{aligned}
$$

wobei k die Harmonischenzahl der HF ist. Das Verhältnis der Halbachsen der Synchrotronschwingung ist gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
\beta_s &= \frac{L(\alpha - \frac{1}{\gamma_0^2})}{2\pi Q_\sigma} \text{und} \\
\sigma_{max} &= \beta_s p_{\sigma,max} = \beta_s \frac{\Delta E}{\beta_0 E_0}_{max} \simeq \beta_s \frac{\Delta p}{p_0}
\end{aligned}
$$

Die stabile Phase kann mit Hilfe des Synchrotronarbeitspunkts berechnet werden zu:

$$
\tan(\phi_0) = \frac{U_0(\alpha - \frac{1}{\gamma_0^2})k}{2\pi Q_\sigma^2 \beta_0 p_0 c}
$$

A.5.2 Große Auslenkungen

In $\mathcal{H}$ kann der Term in p_σ^2 als kinetische Energie betrachtet werden, der Rest von $\mathcal{H}$ ist potentielle Energie. Mit der Betrachtungsweise der Schwingung als Umwandlung von potentieller in kinetische Energie können die Extrempunkte der Teilchenbewegung berechnet werden.

A.5.3 Energieakzeptanz

Die Fixpunkte von $\mathcal{H}$ lassen sich aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_\sigma} &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \sigma} &= 0 \end{aligned}$$

berechnen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sigma_{fix} &= 0 \text{ und } \frac{\beta_0 c}{\omega_{HF}}(\pi - 2\psi_0) \\ p_{\sigma,fix} &= 0 \end{aligned}$$

Dabei ist der Fixpunkt $(0,0)$ stabil und der Fixpunkt $(\frac{\beta_0 c}{\omega_{HF}}(\pi - 2\psi_0), 0)$ instabil. Die Energieakzeptanz $p_{\sigma,max}$ wird erreicht, wenn die potentielle Energie am Ort des instabilen Fixpunkts in kinetische Energie umgewandelt ist, also:

$$\begin{aligned} p_{\sigma,max}^2 &= \frac{2U_0}{(\alpha - \frac{1}{\gamma_0^2})\sin(\phi_0) p_0 c L} \frac{\beta_0 c}{\omega_{HF}} (-\cos(\pi - \phi_0) + \cos(\phi_0) - (\pi - 2\phi_0)\sin(\phi_0)) \\ &= \frac{2U_0}{(\alpha - \frac{1}{\gamma_0^2})\sin(\phi_0) p_0 c L} \frac{\beta_0 c}{\omega_{HF}} (+2\cos(\phi_0) - (\pi - 2\phi_0)\sin(\phi_0)) \\ &= \frac{U_0}{(\alpha - \frac{1}{\gamma_0^2}) p_0 c \pi k} (2\cot(\phi_0) - (\pi - 2\phi_0)) \\ &= \frac{V_0}{(\alpha - \frac{1}{\gamma_0^2}) p_0 c \pi k} \frac{2}{q} (\sqrt{q^2 - 1} - \arccos(\frac{1}{q})) \end{aligned}$$

wobei $q = \frac{V_0}{U_0}$ der Überspannungsfaktor ist. Für die Berechnungen sind alle Größen direkt meßbar oder allein aus der Maschinengeometrie bestimmbar, bis auf den Momentum Compaction Faktor α. Es ist zu beachten, daß für nicht relativistische Teilchen die relative Energieabweichung gegeben ist durch:

$$\frac{\Delta p_s}{p_0} = p_\sigma - \frac{1}{2\gamma_0^2} p_\sigma^2 - \ldots .$$

Zur Bestimmung der Bucketlänge muß ermittelt werden, bei welcher Auslenkung σ_{max} die potentielle Energie von σ_{fix} wieder erreicht wird. Die Bunchlänge ist der Unterschied zwischen den Maximalauslenkungen $\Delta\sigma = \sigma_{fix} - \sigma_{max}$. Dann muß gelten:

$$-2\cos(\phi_0) + (\pi - 2\phi_0)\sin(\phi_0) = \cos(\frac{\omega_{HF}}{\beta_0 c}\Delta\sigma + \pi - \phi_0) - \cos(\phi_0) + (\pi - 2\phi_0 + \frac{\omega_{HF}}{\beta_0 c}\Delta\sigma)\sin(\phi_0).$$

Diese Gleichung kann aufgelöst werden nach ϕ_0. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \arctan\left(\frac{1 - \cos(\frac{\omega_{HF}}{\beta_0 c}\Delta\sigma)}{\sin(\frac{\omega_{HF}}{\beta_0 c}\Delta\sigma) - \frac{\omega_{HF}}{\beta_0 c}\Delta\sigma}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{1 - \cos(\frac{2\pi\Delta\sigma}{\sigma_0})}{\sin(\frac{2\pi\Delta\sigma}{\sigma_0}) - \frac{2\pi\Delta\sigma}{\sigma_0}}\right) \end{aligned}$$

oder:

$$\frac{1}{\sqrt{q^2-1}} = -\frac{1-\cos(\frac{2\pi\Delta\sigma}{\sigma_0})}{\sin(\frac{2\pi\Delta\sigma}{\sigma_0}) - \frac{2\pi\Delta\sigma}{\sigma_0}},$$

wobei $\sigma_0 = \frac{\beta_0 c}{f_{HF}}$ der durch die HF vorgegebene Bunchabstand ist. Mit dieser Formel kann durch Iteration $\Delta\sigma$ numerisch bestimmt werden.

A.6 Modell-Hamiltonfunktion

Fit der Modell–Hamiltonfunktion

Lokalisierung der Resonanz

Sei die Hamiltonfunktion des Beschleunigers $H = H_{lin}(J) + H_{nl}(J,\phi)$. Dann kann H wegen der Periodizität in allen Winkelkoordinaten fourierentwickelt werden als:

$$H = < H(\vec{J}) > + \sum_{\vec{n} \neq (0,\ldots,0)} H_{\vec{n}}(\vec{J}) \exp(i\vec{n} \cdot \vec{\phi}).$$

Bedingung für das Vorliegen einer Resonanz ist, daß für ein $\vec{n}$ gilt:

$$\vec{\omega} \cdot \vec{n} \ll 1 \text{ und } H_{\vec{n}} \simeq 1,$$

wobei $\vec{\omega} = \frac{\partial < H(\vec{J}) >}{\partial \vec{J}}$ die lineare Frequenz ist. Denn zusätzlich zur Erfüllung der Resonanzbedingung muß auch eine Anregung der jeweiligen Resonanz vorhanden sein, um eine qualitative Änderung der Phasenraumtrajektorien hervorzubringen.

Ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, daß eine durch $\vec{n}$ charakterisierte Resonanz tatsächlich hervortritt, ist damit die Größe:

$$s_{\vec{n}}(\vec{J}) = \frac{H_{\vec{n}}(J)}{\vec{\omega}(\vec{J})}.$$

Im Simulator kann die Resonanzstruktur des Phasenraums untersucht werden. Dies geschieht systematisch an verschiedenen Punkten $\vec{J}_i$ auf einem Gitter im Raum der Wirkungen, wobei der Gitterabstand der Punkte wählbar ist.

Dabei sollte der Gitterabstand vom Benutzer so eingestellt werden, daß der Abstand einen Bereich von 10% bis 20% der Phasenraumverteilung des Strahls umfaßt. Deutlich kleinere Resonanzen tragen zu Meßwerten, die ja Mittelwerte über die gesamte Strahlverteilung darstellen, nicht bei.

Für einen Gitterpunkt $\vec{J}_i$ wird zunächst die lineare Frequenz numerisch bestimmt durch:

$$\omega_k(\vec{J}_i) = \frac{< H(J_i^0, \ldots J_i^k + \epsilon, \ldots, J_i^N) > - < H(\vec{J}) >}{\epsilon}.$$

Sodann wird $H(\vec{J}_i)$ fouriertransformiert, wobei die Zahl der berechneten Fourierkoeffizienten die maximale Ordnung der Resonanz in einer Dimension festlegt.

Danach werden die sich für J_i ergebenden verschiedenen $s_{\vec{n}}$ der Größe nach geordnet und, falls sie betragsmäßig oberhalb einer vorgegebenen Schwelle liegen, dem Benutzer angezeigt.

Der Benutzer kann nun auswählen, ob er eine der gefundenen Resonanzen in ihrer Auswirkung auf das Phasenraumverhalten analysieren will.

Alternativ kann der Benutzer direkt einen Resonanzvektor $\vec{n}$ und eine Phasenraumposition $\vec{J}$ eingeben, bei der er eine Resonanz vermutet. Dies ist zeitersparend. Besonders im Falle der Resonanzextraktion, wo gezielt eine einzige Resonanz angeregt werden soll, kann der Benutzer die Untersuchung dieser Resonanz vorgeben.

Fit der Modell–Hamiltonfunktion

Sind Resonanzvektor $\vec{n}$ und Resonanzposition $\vec{J}$ vorgegeben, sowie die Transformation ins Resonanz–Koordinatensystem durchgeführt, so können die Koeffizienten der Modell–Hamiltonfunktion ermittelt werden (siehe Gleichung (2.14) auf S. 33).

In den Resonanzkoordinaten sei dabei wiederum $J_i \neq J_{res} = const$ angenommen und die Abkürzung $J = J_{res}$ gewählt wird. Die $\pm\vec{n}$–Komponente der Fouriertransformierten von H in alten Koordinaten entspricht der $(0,\ldots,\pm 1,\ldots 0)$–Komponente in Resonanzkoordinaten. Zur Berechnung der $H_{\vec{n}}$-Komponente muß also in den Resonanzkoordinaten über alle Winkel außer ϕ_{res} gemittelt werden. Im folgenden sei daher $H_0(J) =< H > (J)$ und $H_{\pm 1} = H_{(0,\ldots,\pm 1,\ldots 0)}$.

Es wird zunächst untersucht, ob überhaupt ein Fixpunkt im zu fittenden Bereich vorliegt. Dazu muß $H_\pm = H_0 + |H_{\pm 1}|$ ein Extremum im Fitbereich haben. Die Existenz eines Extremums wird zunächst durch ein Drei-Punkte Kriterium getestet, wobei für $J_1 < J_2 < J_3$ gelten muß, daß $H_\pm(J_2) - H_\pm(J_1))(H_\pm(J_3) - H_\pm(J_2)) < 0$. Wird dieses Kriterium im Fitbereich nicht erfüllt, so liegt keine Resonanz vor und die weitere Analyse wird abgebrochen.

Liegt eine Resonanz vor, so wird $H_\pm(J)$ an einer vorgebbaren Zahl von Positionen J_i bestimmt.

Wiederum wird an allen J_i durch das Drei-Punkte Kriterium das Auftreten eines Extremums von $H_\pm$ getestet.

Je nach Anforderung des Benutzers wird eine Gewichtung der verschiedenen J_i vorgenommen. Im Normalfall soll die Lage der Fixpunkte exakt wiedergegeben werden. Hier werden bei Auftreten eines Extremums von $H_\pm$ nur die umliegenden J_i im Fit gewertet.

Liegt $J = 0$ im Fitbereich muß die Nebenbedingung $F_0 = 0$ gefordert werden. Interessiert das Verhalten für J am Rande des Fitbereichs, werden die entsprechenden J_i besonders gewichtet.

Parabelfit

Zum Fit der Koeffizienten $D_0^\pm$, $D_1^\pm$, $D_2^\pm$ aus den Wirkungen J_1, den zugehörigen $H_0(J_i)$ und den Gewichten w_i werden die Summen:

$$S_{j\,k} = \sum_i J_i^j \cdot H_\pm(J_i)^k w_i$$

berechnet. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
D_0^\pm &= \frac{S_{01}S_{20}S_{40} + S_{10}S_{30}S_{21} + S_{20}S_{30}S_{11} - S_{21}S_{20}S_{20} - S_{30}S_{30}S_{01} - S_{40}S_{11}S_{10}}{S_{00}S_{20}S_{40} + S_{10}S_{30}S_{20} + S_{20}S_{30}S_{10} - S_{20}S_{20}S_{20} - S_{30}S_{30}S_{00} - S_{40}S_{10}S_{10}},\\
D_1^\pm &= \frac{S_{00}S_{11}S_{40} + S_{01}S_{30}S_{20} + S_{20}S_{21}S_{10} - S_{20}S_{11}S_{20} - S_{30}S_{21}S_{00} - S_{40}S_{10}S_{01}}{S_{00}S_{20}S_{40} + S_{10}S_{30}S_{20} + S_{20}S_{30}S_{10} - S_{20}S_{20}S_{20} - S_{30}S_{30}S_{00} - S_{40}S_{10}S_{10}},\\
D_2^\pm &= \frac{S_{00}S_{20}S_{21} + S_{10}S_{11}S_{20} + S_{01}S_{21}S_{10} - S_{01}S_{20}S_{20} - S_{11}S_{30}S_{00} - S_{21}S_{10}S_{10}}{S_{00}S_{20}S_{40} + S_{10}S_{30}S_{20} + S_{20}S_{30}S_{10} - S_{20}S_{20}S_{20} - S_{30}S_{30}S_{00} - S_{40}S_{10}S_{10}}.
\end{aligned}$$

Dann ist $G_i = \frac{1}{2}(D_i^+ + D_i^-)$ und entsprechend $F_i = \frac{1}{2}(D_i^+ - D_i^-)$.

Umformung der Modell-Hamiltonfunktion

Es ergibt sich nach dem eben dargestellten Fit die Modell-Hamiltonfunktion (2.14):

$$H_{res} = \sum_{i=0}^{2}(G_i + F_i\cos(\tilde{\phi}))J^i,$$

Sei nun J_{st}, ϕ_{st} der stabile Fixpunkt der Modell-Hamiltonfunktion. Dann kann H mit Hilfe von $\Delta J = J - J_{st}$ und $\Delta\phi = \phi - \phi_{st}$ geschrieben werden, wobei $\phi_{st} = 0, \pi$ ist:

$$\begin{aligned}
H &= \sum \left(G_i + F_i\cos(\Delta\phi + \phi_{st})\right)(\Delta J + J_{st})\\
&= \sum \left(G_i + \tilde{F}_i\cos(\Delta\phi)\right)(\Delta J + J_{st}) \text{ mit } \tilde{F}_i = \begin{cases} F_i & \text{für } \phi_{st} = 0 \\ -F_i & \text{für } \phi = \pi \end{cases}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & G_0 + J_{st}G_1 + J_{st}^2 G_2 + (\tilde{F}_0 + \tilde{F}_1 J_{st} + \tilde{F}_2 J_{st}^2)\cos(\Delta\phi) + \\
& [G_1 + 2J_{st}G_2 + (\tilde{F}_1 + 2J_{st}\tilde{F}_2)\cos(\Delta\phi)]\Delta J + \\
& [G_2 + \tilde{F}_2\cos(\Delta\phi)]\Delta J^2.
\end{aligned}
$$

Durch Addition einer Konstante und Einsetzen von J_{st} läßt sich H umschreiben zu:

$$
\begin{aligned}
\tilde{H} &= -(\tilde{F}_0 + \tilde{F}_1 J_{st} + \tilde{F}_2 J_{st}^2)(1-\cos(\Delta\phi)) + \\
&\quad \frac{G_1\tilde{F}_2 - \tilde{F}_1 G_2}{G_2 + \tilde{F}_2}(1-\cos(\Delta\phi))\Delta J \\
&\quad -\tilde{F}_2(1-\cos(\Delta J)) + (\tilde{F}_2 + G_2)\Delta J^2 \\
&= (f_0 + f_1\Delta J + f_2\Delta J^2)(1-\cos(\Delta\phi)) + g_2\Delta J^2,
\end{aligned}
$$

mit:

$$
\begin{aligned}
f_0 &= -(\tilde{F}_0 + \tilde{F}_1 J_{st} + \tilde{F}_2 J_{st}^2), \\
f_1 &= \frac{G_1\tilde{F}_2 - \tilde{F}_1 G_2}{G_2 + \tilde{F}_2}, \\
f_2 &= -\tilde{F}_2, \\
g_2 &= \tilde{F}_2 + G_2.
\end{aligned}
$$

und es folgt:

$$
\tilde{H} = 2(f_0 + f_1\Delta J + f_2\Delta J^2)\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) + g_2\Delta J^2.
$$

Im folgenden wird wiederum die Tilde der neuen Hamiltonfunktion unterdrückt, ferner sollen wieder J und ϕ für Wirkung und Winkel verwendet werden, wobei aber immer der Abstand vom stabilen Fixpunkt gemeint ist.

Kanonische Transformation

Sei nun $\alpha = H$, so kann nach den Ausführungen in Abschnitt 2.2.1 der neue Winkel $\tilde{\phi}$ berechnet werden als:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\phi} &= 2\pi\frac{\partial\left(\int_0^\phi J(\phi')d\phi'\right)}{\partial\left(\oint J(\phi')d\phi'\right)} \\
&= 2\pi\frac{\left(\frac{\partial\int_0^\phi J\,d\phi'}{\partial\alpha}\right)}{\left(\frac{\partial\oint J\,d\phi'}{\partial\alpha}\right)} = 2\pi\frac{\int_0^\phi\frac{\partial J}{\partial\alpha}d\phi'}{\oint\frac{\partial J}{\partial\alpha}d\phi'}.
\end{aligned}
$$

Sei $I(\alpha,\phi) = \int_0^\phi \frac{\partial J(\phi')}{\partial\alpha}d\phi'$ so ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\tilde{J} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\alpha I(\alpha', 2\pi)d\alpha', \\
\tilde{\phi} &= 2\pi\frac{I(\alpha,\phi)}{I(\alpha,2\pi)}.
\end{aligned}
$$

Zu berechnen ist also $I(\alpha,\phi)$.

$$
\begin{aligned}
I(\alpha,\phi) &= \int_0^\phi \frac{\partial J(\phi')}{\partial\alpha}d\phi' \\
&= \int\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(-\frac{f_1 s^2}{2f_2 s^2 + g_2} \pm \sqrt{\left(\frac{f_1 s^2}{2f_2 s^2 + g_2}\right)^2 - \frac{2f_0 s^2 - \alpha}{2f_2 s^2 + g_2}}\right)d\phi' \\
&= \int \pm\frac{d\phi'}{2\sqrt{\alpha g_2 + (2\alpha f_2 - 2f_0 g_2)s^2 + (f_1^2 - 4f_0 f_2)s^4}}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\alpha g_2}} \int \frac{d\phi'}{\sqrt{1+2\left(\frac{f_2}{g_2}-\frac{f_0}{\alpha}\right)s^2+\frac{f_1^2-4f_0f_2}{\alpha g_2}s^4}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\alpha g_2}} \int \frac{d\phi'}{\sqrt{1+A_1s^2+A_2s^4}},$$

mit:

$$s = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right),\ A_1 = 2\left(\frac{f_2}{g_2}-\frac{f_0}{\alpha}\right),\ A_2 = \frac{f_1^2-4f_0f_2}{\alpha g_2}.$$

Durch die Substitution $t = tan\left(\frac{\phi}{2}\right)$ läßt sich das Integral auf Standard–Form bringen ([Bronstein] S. 294). Da $d\phi = \frac{2}{1+t^2}dt$ und $\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{t^2}{1+t^2}$ folgt:

$$I(\alpha,\phi) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha g_2}} \int_0^{\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)} \frac{2}{1+t^2} \frac{dt}{\sqrt{1+\frac{A_1t^2}{1+t^2}+A_2\frac{t^4}{(1+t^2)^2}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha g_2}} \int \frac{dt}{\sqrt{1+(2+A_1)t^2+(1+A_1+A_2)t^4}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha g_2}} \int \frac{dt}{\sqrt{1+B_1t^2+B_2t^4}},$$

mit:

$$B_1 = 2+A_1,\ B_2 = 1+A_1+A_2.$$

Das Polynom $1+B_1t^2+B_2t^4$ hat nun zwei Nullstellen $t_{1,2}$ in t^2 mit:

$$t_{1,2} = \frac{1}{2B_2}(-B_1 \pm \sqrt{B_1^2-4B_2}),$$

so daß

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\alpha g_2 B_2}} \int_0^{\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)} \frac{dt}{(t^2-t_1)(t^2-t_2)}.$$

Je nach Vorzeichen von $t_{1,2}$ muß nun eine Fallunterscheidung getroffen werden.

Zwei negative Nullstellen

Für den Fall $t_{1,2} < 0$ seien $t_{1,2}$ umbenannt in $t_>, t_<$ mit $|t_>| > |t_<|$. Dann ist mit $m = \frac{t_>-t_<}{t_>}$:

$$I^1(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\alpha g_2 B_2}} \frac{F(\phi|m)}{\sqrt{-t_>}} = \frac{1}{\sqrt{-\alpha g_2 B_2 t_>}} sc^{-1}\left(\frac{\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\sqrt{-t_<}}|m\right),$$

wobei $F(\phi|m)$ das elliptische Integral erster Gattung und $sc(u|m)$ eine elliptische Jacobi–Funktion ist ([Abram] S. 570-574,596).[6] Insbesondere ist $I^1(2\pi) = \frac{4K(m)}{\sqrt{-\alpha g_2 B_2 t_>}}$, wobei $K(m)$ die Viertelperiode der elliptischen Jacobi–Funktionen ist.

Es folgt, daß:

$$\tilde{\phi} = 2\pi\frac{I^1(\phi)}{I^1(2\pi)} = \frac{2\pi}{4K(m)} sc^{-1}\left(\frac{\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\sqrt{-t_<}}|m\right).$$

Durch Umkehrung erhält man:

$$\phi = 2\arctan\left(\sqrt{-t_<}\, sc\left(\frac{2}{\pi}K(m)\tilde{\phi}|m\right)\right).$$

[6] Die Bezeichnung der elliptischen Integrale und Jacobi–Funktionen sowie die Bezeichnung der Argumente folgt der Konvention von [Abram].

Zur Berechnung von $\tilde{J}$ wird hier statt der direkten Berechnung des Integrals $\oint J d\phi'$ die Berechnung als:

$$\tilde{J} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha} I^1(\alpha', 2\pi)d\alpha' = \frac{1}{2\pi}\int \frac{4K(m(\alpha'))}{\sqrt{-\alpha' g_2 B_2 t_>(\alpha')}}d\alpha'$$

gewählt.

Nullstellen mit verschiedenen Vorzeichen

Für den Fall $t_1 \cdot t_2 < 0$ seien $t_{1,2}$ umbenannt in $t_+ > 0,\ t_- < 0$. Dann ist mit $m^* = \frac{t_+}{t_+ - t_-} = \frac{1}{m}$

$$I^2(\phi) = \frac{F(\phi|m^*)}{\sqrt{\alpha g_2 B_2 (t_+ - t_-)}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha g_2 B_2 (t_+ - t_-)}} sd^{-1}\left(\frac{(t_+ - t_-)\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\sqrt{-t_+ t_-}}|m^*\right),$$

und:

$$\tilde{\phi} = \frac{2\pi}{4K(m^*)} sd^{-1}\left(\frac{(t_+ - t_-)\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\sqrt{-t_- t_+}}|m^*\right),$$

sowie durch Umkehrung:

$$\phi = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{t_+ t_-}{t_- - t_+}} sd\left(\frac{2}{\pi}K(m^*)\tilde{\phi}|m^*\right)\right).$$

Wiederum wird zur Berechnung von $\tilde{J}$ das Integral

$$\tilde{J} = \frac{1}{2\pi}\int I^2(\alpha', 2\pi)d\alpha' = \frac{1}{2\pi}\int \frac{4K(m^*(\alpha'))}{\sqrt{\alpha' g_2 B_2 (t_+(\alpha') - t_-(\alpha'))}}d\alpha'$$

numerisch ausgeführt.

Berechnung der neuen Wirkung durch Integration

Zur Berechnung der neuen Wirkung $\tilde{J}$ muß das Integral

$$\tilde{J}(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha} I^{1,2}(\alpha', 2\pi)d\alpha'$$

ausgeführt werden. Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 2.2.1 ist:

$$\begin{aligned} I^1(\alpha, 2\pi) &= \frac{4K(m(\alpha))}{\sqrt{-\alpha g_2 B_2 t_>(\alpha)}}, \\ I^2(\alpha, 2\pi) &= \frac{4K(m^*(\alpha))}{\sqrt{\alpha g_2 B_2 (t_+(\alpha) - t_-(\alpha))}}. \end{aligned}$$

Dabei kann K(m) für $0 < m < 1$ besser als $2 \cdot 10^{-8}$ angenähert werden durch ([Abram], S. 591):

$$K = \sum_{i=0}^{4} \left(k_i^a - k_i^b \log(1-m)\right)(1-m)^i,$$

mit:

$$\begin{aligned} k_i^a &= \{1.38629436112,\ 0.09666344259,\ 0.03590092383,\ 0.03742563713,\ 0.01451196212\}, \\ k_i^b &= \{0.5,\ 0.12498593597,\ 0.06880248576,\ 0.03328355346,\ 0.00441787012\}. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $B_1,\ B_2$ lassen sich in Abhängigkeit von α schreiben als:

$$B_1 = c_0 + \frac{c_1}{\alpha},\ B_2 = d_0 + \frac{d_1}{\alpha},$$

mit:

$$\begin{aligned} c_0 &= 2 + 2\tfrac{f_2}{g_2}, \quad & c_1 &= -2f_0, \\ d_0 &= 1 + \tfrac{f_2}{g_2}, \quad & d_1 &= -2f_0 + \frac{f_1^2 - 4f_0 f_2}{g_2}. \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$Q = \frac{B_1^2}{B_2} = \frac{(m-2)^2}{1-m}.$$

Damit kann m in Abhängigkeit von α bzw. Q ausgedrückt werden:

$$m = 2 + \frac{Q}{2}\left(\sqrt{1 - \frac{4}{Q}} - 1\right),$$

so daß:

$$\begin{aligned} I^1 &= \frac{K(m)}{\pi\sqrt{\frac{g_\alpha 2B_1}{Q(1-\sqrt{1-4/Q})}}}, \\ I^2 &= \frac{K(m^*)}{\pi\sqrt{g[2]\alpha B_1(1-\sqrt{1-4/Q})}}. \end{aligned}$$

Wegen der $\log(1-m)$-Abhängigkeit haben $I^{1,2}$ jedoch eine Singularität bei $m = 1$, so daß das Integral uneigentlich wird, falls $m(\alpha) = 1$ im Integrationsbereich liegt. Da $\lim_{m\to 1} Q = \infty$, folgt, daß singuläre Stellen bei $\alpha_{1,2} = 0,\ -\frac{d_1}{d_0}$ auftreten.

Beachtet man die Definition von $\tilde{H} = 2(f_0 + f_1 J + f_2 J^2)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + g_2 J^2$, wobei $(J,\phi) = (0,0)$ die Position des stabilen Fixpunkts und $(J,\phi) = (-\frac{f_1}{2f_2+g_2}, \pi)$ die Position des instabilen Fixpunkts bezeichnet, so stellt sich heraus, daß $\alpha_{1,2}$ genau den Wert der Hamiltonfunktion am stabilen bzw. instabilen Fixpunkt wiedergeben. Darum sei im folgenden $\alpha_{1,2}$ in $\alpha_{st,inst}$ umbenannt, mit:

$$\alpha_{st} = 0,\ \alpha_{inst} = -\frac{d_1}{d_0}.$$

Mit $\alpha_0 = \tilde{H}(-J_{st}, 0)$ ergibt sich als Integrationsweg:

	$J_{st} < J_{inst}$	$J_{st} > J_{inst}$
$J_{st} > 0,\ J_{inst} > 0$	$\alpha_0 \to \alpha_{st} \to \alpha_{inst}$	$\alpha_0 \to \alpha_{inst} \to \alpha_{st}$
$J_{st} > 0,\ J_{inst} < 0$		$\alpha_0 \to \alpha_{st}$
$J_{st} < 0,\ J_{inst} > 0$	$\alpha_0 \to \alpha_{inst}$	

Zur Vermeidung der Singularität bei $\alpha_{sing} = \alpha_{st,inst}$ wird die Integraltransformation $z = \sqrt{\alpha_{sing} - \alpha}$ durchgeführt wird. Ferner ist zu beachten, daß, da Q bei jeder Singularität einen Vorzeichenwechsel macht, das relative Vorzeichen der Nullstellen $t_{1,2}$ bei der Singularität wechselt. Dann ist:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_0}^{\alpha} I(\alpha')d\alpha' &= \int_{\alpha_0}^{\alpha_{sing}} I^{1,2}d\alpha' + \int_{\alpha_{sing}}^{\alpha} I^{2,1}d\alpha' \\ &= \int_{\sqrt{\alpha_{sing}-\alpha_0}}^{\alpha_0} (-2z)I^{1,2}(\alpha_{sing} - z^2)dz + \int_{\alpha_0}^{\sqrt{\alpha_{sing}-\alpha}} (-2z)I^{2,1}(\alpha_{sing} - z^2)dz \\ &= -2\left(\int_{\sqrt{\alpha_{sing}}-\alpha_0}^{\alpha_0} zI^{1,2}(\alpha_{sing} - z^2)dz + \int_{\alpha_0}^{\sqrt{\alpha_{sing}-\alpha}} zI^{2,1}(\alpha_{sing} - z^2)dz\right), \end{aligned}$$

womit die Singularität aufgehoben ist, da die $\log(1-m)$ schwächer abfällt als z.[7]

[7] Es ist zu beachten, daß der $\frac{1}{\sqrt{\ }}$–Term in $I^{1,2}$ nicht zur Singularität beiträgt, da $\lim_{\alpha\to\alpha_{st,inst}} \neq 0$.

A.7 Frequenzspektrum einer Teilchenverteilung

Spektrum ohne Phasenmodulation

Die Teilchenverteilung sei zerlegbar in Winkel- und Wirkungsanteil:

$$\rho(\vec{J},\vec{\phi}) = \rho_J(\vec{J}) \cdot \rho_\phi(\vec{\phi}).$$

Bisher war die Umlauflänge s als Parameter unterdrückt worden. Um das Signal einer Teilchenverteilung am Ort eines Monitors berechnen zu können, muß s jedoch in der Dichteverteilung und der betrachteten Koordinate bei der Berechnung des Moments M^k berücksichtigt werden:

$$M^k = \int d^3\phi \rho_\phi(\vec{\phi} + \omega_0\vec{Q}t; s_0 + \beta ct) \cdot \xi^k(\vec{\phi}; s_0),$$

wobei s_0 der Ort des Monitors ist.

Für $\sigma = 0$ und ein festes $\vec{J}$ berechnet sich das Frequenzspektrum als Fouriertransformierte der Zeitentwicklung von M^k:

$$F^k(\omega) = \int dt \cdot e^{i\omega t} \int d^3\phi \rho_\phi(\vec{\phi} + \omega_0\vec{Q}t; s_0 + \beta_0 ct)\xi^k(\vec{\phi}; s_0)$$

wobei T die Umlaufzeit und ω_0 die entsprechende Umlauffrequenz ist. Mit Hilfe der Fouriertransformierten von ρ, bzw. ξ in den Winkeln kann das Frequenzspektrum berechnet werden. Dabei muß ρ, das mit der Ringlänge L periodisch ist, auch nach der Umlauflänge s fouriertransformiert werden. Seien $\tilde{\xi}^k_{\vec{q}}$ und $\tilde{\rho}_{\vec{p},n}$ die Komponenten der Fouriertransformation von ξ^k bzw. ρ_ϕ, wobei der Index n die Transformationskomponenten nach s kennzeichnet, während die Fouriertransformierte der Koordinate für $\xi^k(s_0)$ bestimmt wurde. Dann ist:

$$\begin{aligned} F^k(\omega) &= \int dt \int d^3\phi e^{i\omega t} \sum_{n,\vec{p},\vec{q}} \tilde{\rho}_{\vec{p},n}\tilde{\xi}^k_{\vec{q}} \exp\left(i[\vec{p}(\vec{\phi} + \omega_0\vec{Q}t) + n\frac{2\pi}{L}(s_0 + \beta_0 ct)]\right) e^{i\vec{q}\vec{\phi}} \\ &= \int dt \int d^3\phi \sum_{n,\vec{p},\vec{q}} \tilde{\rho}_{\vec{p},n}\tilde{\xi}^k_{\vec{q}} \exp\left(i[(\vec{p}+\vec{q})\vec{\phi} + (\omega + \omega_0\vec{p}\vec{Q} + n\omega_0)t + n\frac{2\pi}{L}s_0]\right), \end{aligned}$$

wobei mit $2\pi\beta_0 c/L = \omega_0$ die Umlauffrequenz eingesetzt wurde. Das Integral $d^3\phi$ kann ausgeführt werden und ergibt nur einen Beitrag für $\vec{p} + \vec{q} = 0$. Genauso kann das Integral dt ausgeführt werden, das nur einen Beitrag ergibt für $(\omega + \omega_0\vec{p}\vec{Q} + n\omega_0)$=0. Dann ist:

$$\begin{aligned} F^k(\omega) &= \sum_{n,\vec{p}} \tilde{\rho}_{\vec{p},n}\tilde{\xi}^k_{-\vec{p}}\delta(\omega + \omega_0\vec{p}\vec{Q} + n\omega_0) \exp\left(in\frac{2\pi}{L}s_0\right) \\ &= \sum_{n,\vec{p}} F^k_{n,\vec{p}}\delta(\omega + \omega_0\vec{p}\vec{Q} + n\omega_0), \end{aligned}$$

mit:

$$F^k_{n,\vec{p}} = \tilde{\rho}_{\vec{p},n}\tilde{\xi}^k_{-\vec{p}} \exp\left(in\frac{2\pi}{L}s_0\right).$$

Das Spektrum der Teilchenverteilung wiederholt sich also im Abstand der Umlauffrequenz ω_0. Um den Umlaufpeak erscheinen an den Positionen $\vec{p}\cdot\vec{Q}$ Frequenzlinien der Höhe $\tilde{\rho}_{-p,n}\tilde{\xi}^k_{\vec{p}}$. Die Harmonischen der Umlauffrequenz sind mit der longitudinalen Ringfüllung moduliert.

Spektrum mit Phasenmodulation

Sei nun $\sigma \neq 0$. An Stelle der Zeit t muß nun in obiger Formel jeweils $t - \sigma(t)/(\beta_0 c)$ eingesetzt werden. Damit wird das oben berechnete Signal phasenmoduliert mit $\sigma(nT)$.

Bedingt durch eine Impulsänderung der Teilchen ändert sich zudem der Phasenvorschub pro Zeit. Sei $p_\sigma = \frac{\Delta p}{p}$. Dann ändert sich mit p_σ der Arbeitpunkt vermöge der Chromatizität: $Q_\xi \rightarrow Q_\xi + C_\xi p_\sigma$. Weiterhin

ändert sich die Umlauffrequenz auf Grund der Momentum Compaction: $\omega_0 \rightarrow \omega_0(1+(1/\gamma_0^2-\alpha)p_\sigma)$. Ferner ist im Mittel $(1/\gamma_0^2-\alpha)p_\sigma = \frac{\partial}{\partial s}\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\sigma}{\beta_0}$ (siehe Abschnitt A.5), so daß:

$$\begin{aligned}
\vec{\phi}(s) &= \int dt \left(\vec{Q}+p_\sigma\vec{C})\omega_0(1+(1/\gamma_0^2-\alpha)p_\sigma\right) \\
&= \int dt \left(\vec{Q}\omega_0 + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\sigma}{\beta_0 c}(\frac{1}{1/\gamma_0^2-\alpha}\vec{C}+\vec{Q})\omega_0 + o(p_\sigma^2)\right) \\
&= \vec{Q}\omega_0(t+\frac{\sigma}{\beta_0 c}) + \frac{1}{1/\gamma_0^2-\alpha}\vec{C}\omega_0\frac{\sigma}{\beta_0 c}.
\end{aligned}$$

Sei nun $\vec{\Omega}_C = \frac{1}{1/\gamma_0^2-\alpha}\vec{C}\omega_0$, dann ist

$$\vec{\phi}(t) = \vec{Q}\omega_0(t+\frac{\sigma}{\beta_0 c}) + \vec{\Omega}_C\frac{\sigma}{\beta_0 c}.$$

Damit ergibt sich $F^k(\omega)$ als:

$$\begin{aligned}
F^k(\omega) &= \int dt e^{i\omega t}\int d^3\phi\rho_\phi\left(\vec{\phi}+\omega_0\vec{Q}(t+\frac{\sigma}{\beta_0 c}+\Omega_c\frac{\sigma}{\beta_0 c};s_0+\beta_0 c(t+\frac{\sigma}{\beta_0 c}))\right)\xi^k(\vec{\phi};s_0) \\
&= \int dt\int d^3\phi e^{i\omega t}\sum_{n,\vec{p},\vec{q}}\tilde{\rho}_{\vec{p},n}\tilde{\xi}^k_{\vec{q}}\times \\
&\qquad \exp\left(i[\vec{p}(\vec{\phi}+\omega_0\vec{Q}(t+\frac{\sigma}{\beta_0 c})+\Omega_C\frac{\sigma}{\beta_0 c})+\vec{q}\phi+n\frac{2\pi}{L}(s_0+\beta_0 c(t+\frac{\sigma}{\beta_0 c}))]\right)e^{i\vec{q}\vec{\phi}} \\
&= \int dt\sum_{n,\vec{p}}\tilde{\rho}_{\vec{p},n}\tilde{\xi}^k_{-\vec{p}}\exp\left(i[t(\omega+\omega_0\vec{p}\vec{Q}+n\omega_0)+\frac{\sigma}{\beta_0 c}(\omega_0\vec{p}\vec{Q}+\vec{\Omega}_C+n\omega_0)+n\frac{2\pi}{L}s_0]\right),
\end{aligned}$$

wobei das Integral über $d^3\phi$ ausgeführt wurde.

Seien nun $\tilde{\sigma}_r$ die Fourierkomponenten von $\sigma(\phi_\sigma)$. Da σ reell, ist $\tilde{\sigma}_{-r} = \tilde{\sigma}_r^*$. Ferner sei $\phi_{\sigma,r} = \arctan\left(\frac{\Im(\tilde{\sigma}_r)}{\Re(\tilde{\sigma}_r)}\right)$ der Phasenwinkel der Komponente σ_r. Mit

$$\begin{aligned}
\exp iu(\tilde{\sigma}_r e^{i\omega_0 Q_\sigma rt}+\tilde{\sigma}_{-r}e^{-i\omega_0 Q_\sigma rt}) &= \exp\left(iu2|\tilde{\sigma}_r|\cos\left(\omega_0 Q_\sigma rt+\phi_{\sigma,r}\right)\right) \\
&= \sum_m i^{-m}\mathcal{J}_m(2u|\tilde{\sigma}_r|)\exp\left(im(\omega_0 Q_\sigma rt+\phi_{\sigma,r})\right).
\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{J}_m$ die Besselfunktion der Ordnung m ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
F^k(\omega) &= \int dt\sum_{n,\vec{p}}\tilde{\rho}_{\vec{p},n}\tilde{\xi}^k_{-\vec{p}}\exp\left(i[t(\omega+\omega_0\vec{p}\vec{Q}+n\omega_0)+n\frac{2\pi}{L}s_0]\right)\times \\
&\qquad \prod_r\exp\left(\frac{1}{\beta_0}\sigma_r e^{\omega_0 Q_\sigma rt}(\omega_0\vec{p}\vec{Q}+\vec{\Omega}_C+n\omega_0)]\right) \\
&= \int dt\sum_{n,\vec{p}}\tilde{\rho}_{\vec{p},n}\tilde{\xi}^k_{-\vec{p}}\exp\left(i[t(\omega+\omega_0\vec{p}\vec{Q}+n\omega_0)+n\frac{2\pi}{L}s_0]\right)\times \\
&\qquad \prod_r\left(\sum_m i^{-m}\mathcal{J}_m(2(\omega_0\vec{p}\vec{Q}+\vec{\Omega}_c\vec{p}+n\omega_0)\frac{|\tilde{\sigma}_r|}{\beta_0})\exp\left(i[m(\omega_0 Q_\sigma rt+\phi_{\sigma_r})]\right)\right).
\end{aligned}$$

Da im allgemeinen ein r_{max} gefunden werden kann, ab dem die Fourierkomponenten σ_r vernachlässigbar sind, kann $F_k(\omega)$ umgeschrieben werden als:

$$\begin{aligned}
F^k(\omega) &= \int dt\sum_{n,\vec{p}}\tilde{\rho}_{\vec{p},n}\tilde{\xi}^k_{-\vec{p}}\exp\left(i[t(\omega+\omega_0\vec{p}\vec{Q}+n\omega_0)+n\frac{2\pi}{L}s_0]\right)\times \\
&\qquad \prod_{r=0}^{r_{max}}\left(i^{-m_r}\mathcal{J}_{m_r}(2(\omega_0\vec{p}\vec{Q}+\vec{\Omega}_c\vec{p}+n\omega_0)\frac{|\tilde{\sigma}_r|}{\beta_0})\exp\left(i[m_r(\omega_0 Q_\sigma rt+\phi_{\sigma,r})]\right)\right) \\
&= \int dt\sum_{n,\vec{p},\vec{m}}\tilde{\rho}_{\vec{p},n}\tilde{\xi}^k_{-\vec{p}}\left(\prod_{r=0}^{r_{max}}\left(i^{-m_r}\mathcal{J}_{m_r}(2(\omega_0\vec{p}\vec{Q}+\vec{\Omega}_c\vec{p}+n\omega_0)\frac{|\tilde{\sigma}_r|}{\beta})\right)\right)\times
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \exp\left(i[t(\omega+\omega_0\vec{p}\vec{Q}+n\omega_0)+\sum_r m_r(\omega_0 Q_\sigma r t+\phi_{\sigma,r})+n\frac{2\pi}{L}s_0]\right) \\
= & \sum_{n,\vec{p},\vec{m}} \tilde{\rho}_{\vec{p},n}\tilde{\xi}^k_{-\vec{p}}\left(\prod_{r=0}^{r_{max}}\left(i^{-m_r}\mathcal{J}_{m_r}(2(\omega_0\vec{p}\vec{Q}+\vec{\Omega}_c\vec{p}+n\omega_0)\frac{|\tilde{\sigma}_r|}{\beta})\right)\right)\times \\
& \delta(\omega+\omega_0\vec{p}\vec{Q}+n\omega_0+\sum_r m_r\omega_0 Q_\sigma r)e^{i[m_r\phi_{\sigma,r}+n\frac{2\pi}{L}s_0]} \\
= & \sum_{n,\vec{p},\vec{m}} F^k_{n,\vec{p}}K_{\vec{m},\vec{p}}\delta(\omega+\vec{p}\vec{Q}+n\omega_0+\sum_r m_r r\omega_0 Q_\sigma),
\end{aligned}
$$

wobei die Integration über die Zeit ausgeführt wurde. Es ist $\vec{m}$ ein Vektor mit $r_{max}+1$ Komponenten aus ganzen Zahlen und

$$
K_{\vec{m},\vec{p}}=\prod_r i^{-m_r}\left(\mathcal{J}_{m_r}(2(\omega_0\vec{p}\vec{Q}+\vec{\Omega}_C\vec{p}+n\omega_0)|\tilde{\sigma}_r|)\exp(im_r\phi_{\sigma,r})\right)
$$

ist.

Durch die Phasenmodulation bekommt damit jede Frequenzlinie des unmodulierten Spektrums $F^k_{n,\vec{p}}$ Seitenlinien im Abstand der Vielfachen von $\omega_0 Q_\sigma$.

A.8 Technischer Anhang zum Simulator

Im folgenden wird die Syntax der Startdateien dargestellt. Dabei wird jeweils eine links stehende Form durch die rechts stehenden möglichen Syntaxkonstrukte ausgefüllt. Verschiedene Möglichkeiten zur Ausfüllung sind durch einen Doppelpunkt ':' getrennt. Zeichen, die nicht interpretiert werden sollen, werden durch Hochkommata "' gekennzeichnet. Dabei wird Klein/Großschreibung nicht berücksichtigt. Eventuell auslaßbare Zeichen werden von einem Fragezeichen '?' gefolgt. Leerzeichen zwischen Formen werden unterdrückt. Runde Klammern '()' fassen Ausdrücke zusammen.

Allgemeine Definitionen

`ziffern` : '0' bis '9' mehrmals *ganze Zahl*

`letter` : 'A' bis 'Z' oder '_' *Buchstabe*

`alphanumletter` : `letter` oder '0' bis '9' oder '.' *alphanumerische Zahl*
`wahrheitswert` : 'TRUE'
: 'FALSE'

`kommentar` : '!' bis Rest der Zeile
`number` : `ziffern`
: `ziffern` '.' `ziffern` 'e-' `ziffern` *reelle Zahl*

`string` : `letter` und `alphanumletter` mehrmals *Zeichenkette*
`coupling` : 'NONE' *Kopplung zum Kontrollsystem: keine*
: 'COUPLED' *Hole und setze Kontrollsystemwert immer*
: 'GETVALUE' *Hole Kontrollsystemwert immer*
: 'PUTVALUE' *Setze Kontrollsystemwert immer*
: 'GETONCE' *Hole Kontrollsystemwert einmal*
: 'PUTONCE' *Setze Kontrollsystemwert einmal*

```
value : value '+' value   Addiere Werte
      : value '-' value   Subtrahiere Werte
      : value '/' value   Dividiere Werte (falls Divisor nicht 0)
      : value '*' value   Multipliziere Werte
      : '(' value ')'     Geklammerter Wert
      : number            direkte Zahlangabe
      : string            Variablen Referenz
      : '-' value         negativer Wert, Präzedenz berücksichtigt
```

Definitionen der Startup-Datei

```
dateien : datei           Dateibezeichnungen
        : dateien datei
pfad : (('/')?string) mehrmals   Pfadbezeichnung
datei : 'VARPATH' '=' pfad   Variablen-Datei
      : 'NETPATH' '=' pfad   Netzwerk-Datei
      : 'ELMPATH' '=' pfad   Elemente-Datei
```

Definitionen der Variablen-Datei

```
var_expressions : var_expression                  Variablen Definitionen
                : var_expressions var_expression

var_expression : '*'string '=' var_denote_exprs

var_type : '(int)'       Variablen Typ ganze Zahl
         : '(float)'     Variablen Typ reelle Zahl
         : '(double)'    Variablen Typ reelle Zahl mit hoher Genauigkeit
         : '(boolean)'   Variablen Typ Wahrheitwert Zahl

var_denote_expressions : var_denote_expression                          Variablen Deskriptoren
                       : var_denote_expressions var_denote_expression

var_denote_expression : value                      Wertzuweisung
                      : var_type value             Wertzuweisung mit Typangabe
                      : '(string)' string          Stringzuweisung
                      : 'NAME' '=' string          Zuweisung des Kontrollsystemnamens
                      : 'COUPLING' '=' coupling    Zuweisung der Variablenkopplung an Kontrollsystem
```

Definitionen der Netzwerk-Datei

```
net_expressions : net_expression                  Knotenbezeichnungen im Internet
                : net_expressions net_expression

net_expression : 'HOST' '=' hostname
hostname : string
         : (number '.') mehrmals
```

Definitionen der Elemente-Datei

```
elm_expressions : elm_expression                  Elementdefinitionen
                : elm_expressions elm_expression
```

```
elm_expression : element_expr    Elementdefinition
               : vardef_expr     Variablendefinition
               : line_expr       Definition einer Elementfolge
               : symmetry_expr   Supersymmetriedefinition für Elementfolge
               : 'PRINT' ';'     Statusausgabe der Elementfolge

element_expr : string':' geometry_exprs param_exprs ';'   Element mit Geometrie und Parametern
             : string':' '=' string':' ';'                Element gleich definiertem Element

param_exprs : leer
            : param_expr              Elementparameter
            : param_exprs param_expr

geometry_exprs : leer
               : geometry_expr                  Geometrieangaben
               : geometry_exprs geometry_expr

geometry_expr : 'LENGTH '=' value        Länge des Elementes
              : 'WIDTH '=' '&' value     Breite des Elementes
              : 'ANGLE '=' '&' value     Winkel des Elementes
              : 'DISTANCE '=' '&' value  Distanz vom Sollorbit des Elementes
              : 'MARKER'                 Element markiert

param_expr : param '=' value               Wertzuweisung eines Parameters
           : param '=' '&' string          Parameter gekoppelt an Variablenwert
           : param '=' '(' denote_exprs ')'  Parameterdeskriptor

denote_exprs : denote_expr
             : denote_exprs denote_expr

denote_expr : 'value' '=' value          Wertzuweisung
            : 'value' '=' '&' string     Parameterwert gekopplet an Variablenwert
            : 'timedep' '=' value        lineare Zeitabhängigkeit
            : 'timedep' '=' '&' string   lineare Zeitabhängigkeit gekoppelt an Variablenwert
            : 'PRIVATE'                  Wert nicht mit anderem Element gekoppelt

param : 'DIPOLE'                 Dipol
      : 'Q'('UADRU')?POLE'       Quadrupolstärke
      : 'SEX'('TU')?'POLE'       Sextupolestärke
      : 'OCTUPOLE'               Oktupolstärke
      : number'POLE'             Multipolstärke mit Nummer
      : number'SKEW'('POLE')?    Stärke eines gedrehten Multipols
      : 'CAVITY'                 HF-Spannung (Peak)

vardef_expr : string '=' var_denote_exprs   Variablendefinition


line_expr : 'LINE' '=' names    Start einer Elementfolge
          : 'LINE' '+=' names   Fortsetzung einer Elementfolge

names : string':'         Liste von Namen
      : names string':'

symmetry_expr : 'SYMM'('ETRY')? '+' ';'   Elementfolge gleichsinnig verdoppelt
              : 'SYMM'('ETRY')? '-' ';'   Elementfolge gegensinnig verdoppelt
```

Literaturverzeichnis

[Abrahams] Abrahams, P.W., Bruce, R.L.: *UNIX for the Impatient*, Reading, Massachusetts (Addison-Wesley) 1992

[Abram] Abramowitz, M., Stegun, I.A. (Hrsg.): *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Washington (National Bureau of Standards) 1968 (7. Auflage)

[Alt68] Althoff, K.H. et al.: *The 2.5 GeV Electron Synchrotron of Bonn University*, in: Nucl. Instr. and Meth., 61 (1968) p. 1-30

[Alt85] Althoff, K.H. et al.: *Vorschlag für den Bau eines Stretcherringes am 2.5 GeV- Elektronensynchrotron der Universität Bonn*, (revidierte Fassung Mai 1985), Bonn (Bonn-IR-82-17) 1982

[Barber86] Barber D.P., Mais, H., Ripken, G, Willeke, F.: *Nonlinear Theory of coupled Synchro-Betatron Motion*, Hamburg (DESY 86-147) 1986

[Barber94] Barber D.P., Heinemann, K., Ripken, G, Willeke, F.: *Notes on Synchro-Betatron Coupling for Particles of Arbitrary Energy Using a 6-Dimensional Symplectic Dispersion Formalism*, Hamburg (DESY HERA 94-02) 1994

[Barut] Barut, A.O.: *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, New York (MACMILLAN) 1964

[Bell] Bell, J.S.: *Hamiltonian Mechanics*, in: CAS Cern Accelerator School - Advanced Accelerator Physics, Genf (CERN 87-03) 1987, S. 5-40

[Bengtsson] Bengtsson, J.: *Non-Linear Transverse Dynamics for Storage Rings with Applications to the Low-Energy Antiproton Ring (LEAR) at CERN*, Genf (CERN 88-05) 1988

[Berz88] Berz, M.: *Differential Algebraic Treatment of Beam Dynamics to very high Orders including Applications to Spacecharge*, in: Eminluzer, Ch.M.: Linear Accelerator and Beam Optics Codes (AIP Conference Proceedings 177), New York 1988 (American Institute of Physics), S. 275-300

[Berz90] Berz, M.: *COSY INFINITY Version 5 User's Guide and Reference Manual*, East Lansing (Michigan State University, MSUCL-811) 1990

[Berz93] Berz, M.: *Cosy Infinity Version 6*, in Berz, M., Martin, S., Ziegler, K.: Nonlinear Problems in Accelerator Physics, Institute of Physics Conference Series Number 131, Bristol, Philadelphia (Institute of Physics) 1993, S. 125-133

[Bronstein] Bronstein, I., Semendajajew, K.: *Taschenbuch der Mathematik*, Leipzig (B.G. Teubner) 1961 (4. Auflage)

[Brown] Brown K.L., Carey, D.C., Iselin, Ch., Rothacker, F.: *TRANSPORT – A Computer Program for Designing Charged Particle Beam Transport Systems*, Genf (CERN 80-04) 1980

[Bryant] Bryant, P.J.: *The Principles of Circular Accelerators and Storage Rings*, Cambridge (Cambridge University Press) 1993

[Chao] Chao, A.W.: *Comments of Nonlinear Dynamics Studies in Storage Rings*, in: Month, M., Dienes, M.: Physics of Particle Accelerators, Vol I (AIP Conference Proceedings 184), New York 1989 (American Insitute of Physics), S. 964-960

[Chin] Chin, Y.H.: *Quantum Lifetime*, Hamburg (DESY 87-062) 1987

[Code] The Los Alamos Accelerator Code Group: *A Compendium of Computer Codes used in Particle Accelerator Design and Analysis*, in: Month, M., Dienes, M.: Physics of Particle Accelerators, Vol II (AIP Conference Proceedings 184), New York 1989 (American Insitute of Physics), S. 1137-1326.

[Courant] Courant, E.D., Snyder, H.S.: *Theory of the alternating gradient synchrotron*, in: Annals of Physics 3, 1958, S. 1-48

[Duder] Duderstadt, J.J., Martin, W.R.: *Transport Theory*, New York (Wiley) 1942

[Farv] Farvacque, L., Laclare, J.L., Ropert, A.: *Beta Users' Guide*, überarbeitete Ausgabe, Grenoble (ESRF-SR/LAT-88-08) 1989

[Goetz90] Götz, Th.: *Vollautomatische Messung des ELSA-Arbeitspunkts mit "EPOS"*, Bonn (BONN-IR-90-50) 1990

[Goetz94] Götz, Th. *Dissertation* (in Vorbereitung), Bonn 1994

[Goldstein] Goldstein, H.: *Classical Mechanics*, Reading (Addison-Wesley) 1959

[Grote] Grote, H., Iselin, F.C.: *The MAD Program (Methodical Accelerator Design) Version 8.1 User's ReferenceManual*, Genf (CERN/SL/90-13 (AP)) 1990

[Guig] Guignard, G.: *A General Treatment of Resonances in Accelerators*, Genf (CERN 78–11) 1978

[Hacker] Hacker, U. et. al.: *The COSY Control System, distributed Realtime Operating System for Accelerator Control*, in: IEEE Seventh Conference REAL TIME'91 on Computer Applications in Nuclear, Particle and Plasma Physics, Conference Record, New York (IEEE Service Center), 1991

[Hagedorn] Hagedorn, H.L., Botman, J.I.M, Kleeven, W.J.G.M: *Hamiltonian theory as tool for accelerator physicists*, in: Turner, S. (Hrsg): *Cern Accelerator School, Fourth Advanced Accelerator Physics Course*, Genf (CERN 92-01) 1992, S. 1-50

[Hardt] Hardt, W.: *Ultraslow Extraction out of LEAR (transverse aspects)*, Genf (CERN, PS/DL/LEAR Note 81-6, $\bar{p}p$-LEAR Note 98) 1981

[Helm] Helm, R.H., Lee, M. J., Morton, P. L., Sands, M.: *Evaluation of Synchrotron Radiation Integrals* Santa Cruz (Standford Linear Accelerator Center), in: IEEE Transactions on Nuclear Science, Juni 1973, S. 900-901

[Husmann87] Husmann, D., Schwille, W.J.: *ELSA - ein neuer Beschleuniger der Mittelenergiephysik*, Bonn (Bonn-IR-87-30) 1987

[Husmann88] Husmann, D., Schwille, W.J.: *ELSA - die neue Bonner Elektronen-Stretcher-Anlage*, in: Physikalische Blätter, Jahrgang 44 (1988), Nr. 2, Weinheim 1989, S. 40-44

[Husmann/Petry] Husmann, D., Petry, H.R.: *Teilchenbeschleuniger II*, Vorlesung WS 91/92

[Iselin] Iselin, F.C.: *Status of MAD (Version 8.5) and Future Plans*, in Berz, M., Martin, S., Ziegler, K.: Nonlinear Problems in Accelerator Physics, Institute of Physics Conference Series Number 131, Bristol, Philadelphia (Institute of Physics) 1993, S. 113-123

[Jackson] Jackson, J.D.: *Classical Electrodynamics*, New York (Wiley) 1965

[Keil] Keil, J.: *Aufbau eines breitbandigen Intensitätsmonitors zur Messung, Überwachung und Optimierung der ELSA-Füllstruktur*, Bonn (BONN-OB-94-18), 1994

[Laclare] Laclare, J.L.:*Bunched Beam Coherent Instabilities* in: Turner, S. (Hrsg): *Cern Accelerator School, Advanced Accelerator Physics*, Vol I, Genf (CERN 87-03) 1987, S. 264-326

[Levine] Levine, R.J.; Mason, T.; Brown, D.: *lex & yacc*, Sebastpool, CA, (O'Reilly & Associates) 1990, 2. Auflage

[LeCroy] LeCroy: *The LeCroy Model 9400 Digital Oscilloscope Operator's Manual*, Chesnut Ridge (USA) 1986

[Licht] Lichtenberg, A.J., Liebermann, M.A.: *Regular and Stochastic Motion*, Berlin, New York, Heidelberg (Springer) 1982

[Neckenig] Neckenig, M.: *Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Verbesserung der Zeitstruktur des extrahierten Elektronenstrahls aus dem Stretcherring* **ELSA**, Bonn (BONN-IR-93-16) 1993

[Picard91] Picard, M: *Das Steuer- und Diagnosesystem EPOS und dessen Anwendung zur Messung des transversalen Phasenraums and ELSA*, Bonn (BONN-IR-91-76) 1991

[Picard94] Picard, M. *Dissertation* (in Vorbereitung), Bonn 1994

[Press] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T.: *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge (University Press) 1986

[Ripken] Ripken: *Non-Linear Equations of Coupled Synchro-Betatron Motion and their Solution within the Framework of A Non-Linear 6-dimensional (symplectic) Tracking Program for ultra-relativistic Protons*, Hamburg (DESY-85-084) 1985

[Risken] Risken, H.: *The Fokker-Planck-Equation*, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo (Springer), 1984

[Rohrer] Rohrer, Urs: *Graphic Transport for Windows*, Computerprogramm, Villingen (PSI) 1993

[Schult] Schult, B.: *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge (Cambridge University Press) 1980

[Schwille] Schwille, W.J.: *Physik an der Bonner Elektronen-Stretcher-Anlage ELSA*, in: Physikalische Blätter, Jahrgang 45 (1989) Nr. 7, Weinheim 1989, S. 255-259

[Tennyson] Tennyson, J.: *The Instability for Bunched Beams in ISABELLE*, in: Month, M., Herrera, J.C. (Hrsg.) : Nonlinear Dynamics and the Beam–Beam Interaction (AIP Conference Proceedings 57), New York 1979 (American Institute of Physics), S. 158-193

[Warnock87] Warnock, R.L., Ruth, R.D.: *Invariant Tori through direct Solution of the Hamilton-Jacobi Equation*, in: Pysica 26D, (1987), S. 1-36

[Warnock89] Warnock, R.L., Ruth, R.D, Gabella, W. Ecklund, K.: *Methods of Stability Analysis in Nonlinear Mechanics*, in: Month, M., Dienes, M.: Physics of Particle Accelerators, Vol I (AIP Conference Proceedings 184), New York 1989 (American Insitute of Physics), S. 995-1014

[Wenzel] Wenzel, J.: *Korrektur der Gleichgewichtsbahn an der Bonner 3.5 GeV-Elektronen-Stretcher-Anlage ELSA*, Bonn (BONN-IR-90-36), 1990

[Wille] Wille, K.: *Physik der Teilchenbeschleuniger und Synchrotronstrahlungsquellen*, Stuttgart (Teubner) 1992

[Wilson] Wilson, E.J.N.: *Nonlinear Resonances*, in: Turner, S. (Hrsg): *Cern Accelerator School, Advanced Accelerator Physics*, Vol I, Genf (CERN 87-03) 1987, S. 41-74

[Wolfram] Wolfram, S.: *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*, Redwood City (Addison-Wesley) 1991, 2. Auflage

[Zeijts] Zeijts, J. van, Neri, F.: *The arbitrary order design code Tlie 1.0*, in Berz, M., Martin, S., Ziegler, K.: Nonlinear Problems in Accelerator Physics, Institute of Physics Conference Series Number 131, Bristol, Philadelphia (Institute of Physics) 1993, S. 135-145

[Zotter] Zotter, B.: *Effect of Bunchlength on Chromaticitz Measurement in LEP*, Genf (CERN SL/AP 91-32) 1991

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. Dirk Husmann, dem ich an dieser Stelle für seine Betreuung und Unterstützung während meiner Diplomarbeit und Promotion danken möchte. Für die freundschaftliche Zusammenarbeit und gute Unterstützung bedanke ich mich bei Herrn Thomas Götz und Herrn Michael Picard, deren anregende Diskussionsbeiträge meine Arbeit wesentlich mit geprägt haben. Bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Dr. Wolther von Drachenfels für seine stete Bereitschaft, in Diskussionen zur Lösung auch nicht-wissenschaftlicher Probleme beizutragen. Ferner möchte ich mich bei der gesamten ELSA-Betriebsmannschaf für ihre Unterstützung bedanken.

Zu Dank verpflichtet bin ich auch der COSY-Mannschaft. Herr Dr. Rudolf Maier ermöglichte mir die Tätigkeit an COSY, die viele Anregungen für die vorliegende Arbeit lieferte. Für die tatkräftige Unterstützung und die wertvollen Diskussionen bedanke ich mich bei Herrn Dr. Dieter Prasuhn und Herrn Dr. Hans Stockhorst.

Lebenslauf

Personalangaben

Johannes Wenzel
geboren am 10. März 1965 in Trier
deutsche Staatsangehörigkeit, verheiratet

Schulbildung

1971-1975	Comenius–Grundschule in Koblenz
1975-1984	Görres–Gymnasium in Koblenz
20. Juni 1984	Abitur

Studium

WS 1984-WS 1990	Physik an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
10. Okt. 1986	Vordiplom Physik, Nebenfach Chemie
24. Okt. 1990	Diplom Physik, Diplomarbeit zur Beschleunigerphysik, Nebenfach Philosophie
Seit Okt. 1990	Anfertigung der Dissertation an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn zur Beschleunigerphysik
Juni 1991-März 1994	Stipendiat im Graduiertenkolleg "Die Erforschung der subnuklearen Strukturen der Materie"